

Шаг m $X_i^{(m)} = X_i^{(m-1)} + \Delta X_i^{(m)}$; причём $X_i^{(m-1)}$ совершает работу на упруго-вязких перемещениях, а $\Delta X_i^{(m)}$ - на упругих в пределах времени $\Delta t = t_m - t_{m-1}$.

$$\sum_{i=1}^n \{ \delta_{i1} \Delta X_1^{(m)} + \delta_{i2} \Delta X_2^{(m)} + \dots + \Delta u_0^{(m)} + \Delta \varphi_0^{(m)} c_i + \varphi_p^{m-1} \cdot \Delta_p^{(m-1)} + \Delta (\Delta_p)^m + S_i^{(m)} \} = 0$$

$$- \sum_{i=1}^N \Delta X_i^{(m)} c_i = 0 \quad (5)$$

$$- \sum_{i=1}^N \Delta X_i^{(m)} = 0$$

Здесь $\Delta_p^{(m)} = \varphi^{0m} \Delta_p^{(0)}$;

$$S_i^{(m)} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} (\varphi_k^{0,m} - \varphi_k^{0,m-1}) X_k^{(m-1)}.$$

На каждом шаге находится приращение неизвестных $\Delta X_k^{(m)}$; $\Delta u_0^{(m)}$; $\Delta (\Delta \varphi_0)^{(m)}$.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вычисление функционала полной энергии и его дифференцирование по каждому из неизвестных коэффициентов проводилось в общем виде с помощью пакета компьютерной алгебры "Matematika-3" [6]. Была составлена программа расчета системы перекрестных балок на упругом основании (рис.3), учитывающая реологические свойства железобетона - его ползучесть. Прогнозы системы на каждом участке Б.Н. Жемочкина определялись с учетом ползучести железобетона по формуле $y(t) = y(0) [1 + C_1 (1 - e^{-\gamma t})]$

где $y(0)$ - деформации участков в момент загрузки;

t - время в сутках;

УДК 539.3

Генфуд С.

РАСЧЕТ S-ОБРАЗНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

ВВЕДЕНИЕ

Расчет фундаментных конструкций или сооружений был выполнен впервые на допущении Винклера: осадка упругого основания пропорциональна давлению в месте осадки, что позволило решить дифференциальное уравнение изгиба плиты в замкнутой форме. В 1930 годы концепция Винклера была дополнена разработкой методов и расчетов балок и плит на упругом основании с использованием решений об упругой полуплоскости и упругом полупространстве, полученных соответственно Фламаном и Буссинеском [1]. При проектировании стали широко применять метод Жемочкина [2] и таблицы безразмерных коэффициентов, разработанные Горбуновым-Посадовым [3] на основе метода полиномов. В предлагаемой статье задача о расчете плиты, не имеющей осей симметрии в плане на произвольном упругом основании в полярных координатах, также решается методом Б. Н. Жемочкина.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плиту конечной жесткости, имеющую S-образную форму в плане в полярных координатах, находящуюся на поверхности упругого основания любого типа под действием произвольной внешней нагрузки (рис. 1). Ставится задача определения реактивных напряжений на контакте между плитой и основанием, ее перемещений и внутренних усилий в ней. При расчете принимаются следующие предположения [3]:

- ◆ Касательные напряжения на контакте плиты с основанием принимаются равными нулю;
- ◆ между плитой и упругим основанием могут возникать как сжимающие, так и растягивающие контактные напряжения;
- ◆ для плит считаются справедливыми гипотезы теории

C_1 - характеристика ползучести. Принимаем $C_1 = 0,005$; $\gamma = 1,0$

Число участков Б.Н. Жемочкина для всей системы составило 162. Размеры поперечного сечения стержней постоянны и равны 1,2x0,4 м. Результаты расчета для упругого полупространства и бетона с $E_0 = 20 \text{ МПа}$; $\nu_0 = 0,3$; $E_b = 20 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ и действия на систему равномерно распределенной нагрузки $q = 13,76 \text{ кН/м}$ приведены на рисунках 3 и 4. На рис. 3а показано распределение осадок грунта по оси "Б" системы (рис.1) в момент загрузки и по истечении 20 суток после загрузки. На рис.3б показаны значения реактивного отпора грунта по оси "Б" в момент загрузки и по истечении 20 суток после загрузки.

На рис. 4а показано распределение осадок грунта по оси "3" в момент загрузки и по истечении 20 суток после загрузки. На рис.4б показаны значения реактивного отпора грунта по оси "3" в момент загрузки и по истечении 20 суток соответственно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Горбунов - Посадов М.Н., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М., Стройиздат, 1984. 679с.
2. Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М., Стройиздат, 1962. 260с.
3. Босаков С.В. Изгиб сжатой прямоугольной пластинки на упругом основании любого типа. МТИ, т.2, №2, с. 93-95.
4. Босаков С.В., Семенюк С.Д. Расчет системы перекрестных балок на двухслойном упругом основании. - В журн. Вестник Брестского политехнического института, 2000, №1, с.14-16.
5. Клепиков С.Н. Расчет упруго-вязких стержневых систем шаговым методом. Прикладная механика. Том VI, в.2, К., 1970, с. 105...109.
6. Дьяконов В.П. Системы символьной математики. Matematika 2 и Matematika 3. М., СК.Пресс, 1998, 328 с.

Генфуд Салах. Аспирант каф. строительной механики Белорусской государственной политехнической академии. Беларусь, БГПА, 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины 65.

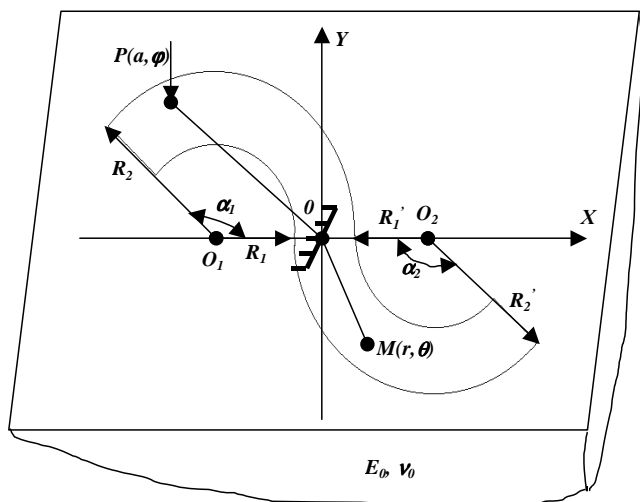


Рисунок 1. Рассматриваемая плита на упругом основании изгиба тонких пластинок [4].

РАСЧЕТ ПЛИТЫ

Рассчитываемую плиту разбиваем на участки Б. Н. Жемочкина, которые образуются радиально расходящимися лучами и концентрическими окружностями [2], причем радиально расходящиеся лучи и концентрические окружности исходят из двух центров O_1 и O_2 (рис. 1). В центре тяжести каждого участка поставим жесткую вертикальную связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Полученную статическую неопределимую систему рассчитываем смешанным методом строительной механики, где за неизвестные принимаются усилия X_k в связях Жемочкина, углы поворота плиты φ_{Ox} , φ_{Oy} и линейное перемещение u_0 введенного в начале координат защемления O . Система канонических уравнений смешанного метода для решения поставленной задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \delta_{ik} X_k + \varphi_{Ox} y_i + \varphi_{Oy} x_i + u_0 + \Delta_{iP} \right) &= 0; \\ - \sum_{k=1}^n X_k y_k + M_{Px} &= 0; \\ - \sum_{k=1}^n X_k x_k + M_{Py} &= 0; \\ - \sum_{k=1}^n X_k + Q &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где n - число участков Б. Н. Жемочкина на плите;
 M_{Px} , M_{Py} - моменты равнодействующей внешней нагрузки Q относительно осей координат Ox и Oy ;
 x_k , y_k - плечи усилия X_k относительно осей координат;
 Δ_{iP} - прогиб точки i плиты с защемленной точкой от действия внешней нагрузки;
 δ_{ik} - взаимное перемещение в разрезанной связи i между плитой с защемленной точкой и основанием от единичной силы в связи k . Значения перемещений δ_{ik} даются формулой

$$\delta_{ik} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 b} F_{ik} + W_{ik}, \quad (2)$$

здесь F_{ik} - перемещения точек плиты от осадки основания, определяемые в зависимости от вида упругого основания [5] и формы участка Жемочкина;

W_{ik} - перемещения от прогиба плиты с защемленной точкой, определяются ниже методом Ритца [4].

Для вычисления вертикальных перемещений поверхности упругого основания, на котором лежат плита, использовано решение, полученное в работе [6]. Это общее решение для расчета любой жесткой плиты, имеющей любую форму в плане в полярных координатах на произвольном упругом основании под действием произвольных внешних сил.

Прогибы плиты под действием сосредоточенной силы P будем искать в виде совокупности решений Клебша [4] для дифференциального уравнения изгиба плиты, удовлетворяющих уравнениям равновесия и кинематическим граничным условиям:

$$W(r, \theta) = W_M(r, \theta) + W_I(r, \theta) + \sum_{j=2}^n W_j(r, \theta), \quad (3)$$

где $W_M(r, \theta)$ - особое решение, соответствующее действию сосредоточенной силы P на бесконечную плиту [7]

$$W_0(r, \theta) = \frac{P b^2}{16 \pi D} \left[\frac{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2}{b^2} \times \ln \frac{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2}{b^2} + \frac{2ar \cos(\varphi - \theta)}{b^2} \left(\ln \frac{a^2}{b^2} + 1 \right) - \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a^2}{b^2} - \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} \right]; \quad (4)$$

$$W_1(r, \theta) = B_{21} \frac{r^3}{b^3} \cos \theta + C_{21} \frac{r^3}{b^3} \sin \theta;$$

$$W_j(r, \theta) = B_{1j} \frac{r^j}{b^j} \cos j\theta + C_{1j} \frac{r^j}{b^j} \sin j\theta + B_{2j} \frac{r^{j+2}}{b^{j+2}} \cos j\theta + C_{2j} \frac{r^{j+2}}{b^{j+2}} \sin j\theta,$$

где D - цилиндрическая жесткость плиты;
 B_{ij} и C_{ij} , $i=1, 2$; $j=1, n$ - неизвестные коэффициенты.

Для их определения используем метод Ритца [3].

Находим энергию изгиба плиты по формуле

$$U = \frac{D}{2} \iint_S \Psi(r, \theta) r dr d\theta, \quad (5)$$

где

$$\Psi(r, \theta) = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right]^2 - \beta \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{W}{r} \right)}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right],$$

здесь $\beta = 2(1 - \nu)$; ν - коэффициент Пуассона плиты; S - площадь плиты.

Работа Π сосредоточенной силы P при переходе плиты из деформируемого состояния в исходное равно

$$\Pi = \Pi_1 + \sum_{j=2}^n \Pi_j, \quad (6)$$

$$\Pi_1 = -\frac{Pa^3}{b^3} (B_{21} \cos \varphi + C_{21} \sin \varphi) - \frac{Pa^2}{8\pi D};$$

$$\Pi_j = B_{1j} \frac{a^j}{b^j} \cos j\varphi + C_{1j} \frac{a^j}{b^j} \sin j\varphi + B_{2j} \frac{a^{j+2}}{b^{j+2}} \cos j\varphi + C_{2j} \frac{a^{j+2}}{b^{j+2}} \sin j\varphi$$

Функционал полной энергии плиты и действующей на нее нагрузки дается формулой

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (7)$$

Коэффициенты B_{ij} и C_{ij} найдем из следующей системы уравнений в матричной форме

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B_{ij}} = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_{ij}} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Отметим, что при удержании достаточного количества членов ряда (3), статические граничные условия выполняются автоматически [4]. Поэтому при решении системы уравнений (8) можно учесть несколько решений Клебша.

Подчеркнем, что подинтегральные функции слагаемых системы уравнений (8) приводят к несобственным интегралам, которые берутся методами приближенного интегрирования из-за громоздкости и сложности получаемых формул для этих слагаемых и также своих пределов интегрирования. Решение системы уравнений (8) позволяет найти прогибы плиты.

После определения коэффициентов B_{ij} и C_{ij} выражение для перемещений δ_{ik} системы канонических уравнений (1) принимает вид

$$\delta_{ik} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 b} [F_{ik} + \xi W_{ik}], \quad (9)$$

где $\xi = \frac{\pi E_0 b^3}{(1 - \nu_0^2) D}$ - показатель гибкости [3];

$$W_{ik} = \frac{D}{b^2} [W(r, \theta)]. \quad (10)$$

На основании (10) выражение перемещения Δ_{iP} (1) получаем

$$\Delta_{iP} = \xi \sum_{k=1}^n W_{ik} P_k, \quad (11)$$

здесь P_k - равнодействующая внешней нагрузки на участке k плиты.

Осадки плиты S'_i определяются формулой

Частные решения Клебша	а	б	в	г	д	е
$B_{ij}(63)$	0,00345	/	0,05850	/	0,00377	/
$B_{ij}(171)$	0,00345	/	0,02518	/	0,00377	/
$C_{ij}(63)$	/	0,09131	/	-0,00113	/	-0,00926
$C_{ij}(171)$	/	0,09131	/	0,04250	/	-0,00926

Частные решения Клебша	ж	з	и	к	л	м
$B_{ij}(63)$	-0,01207	/	-0,00586	/	0,00197	/
$B_{ij}(171)$	-0,00721	/	0,00239	/	0,00197	/
$C_{ij}(63)$	/	0,01461	/	0,07403	/	0,00005
$C_{ij}(171)$	/	0,01053	/	0,03606	/	0,00005

$$S'_i = \sum_{k=1}^n F_{ik} P_k \approx \sum_{k=1}^n W_{ik} P_k. \quad (12)$$

Численным дифференцированием осадок плиты S'_i вычисляются внутренние усилия в ее сечениях [8].

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right);$$

$$M_\theta = -D \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right);$$

$$M_{r\theta} = -(1 - \nu) D \left(\frac{\partial^2 W}{r \partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right);$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta W); \quad Q_\theta = -D \frac{\partial}{r \partial \theta} (\Delta W),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

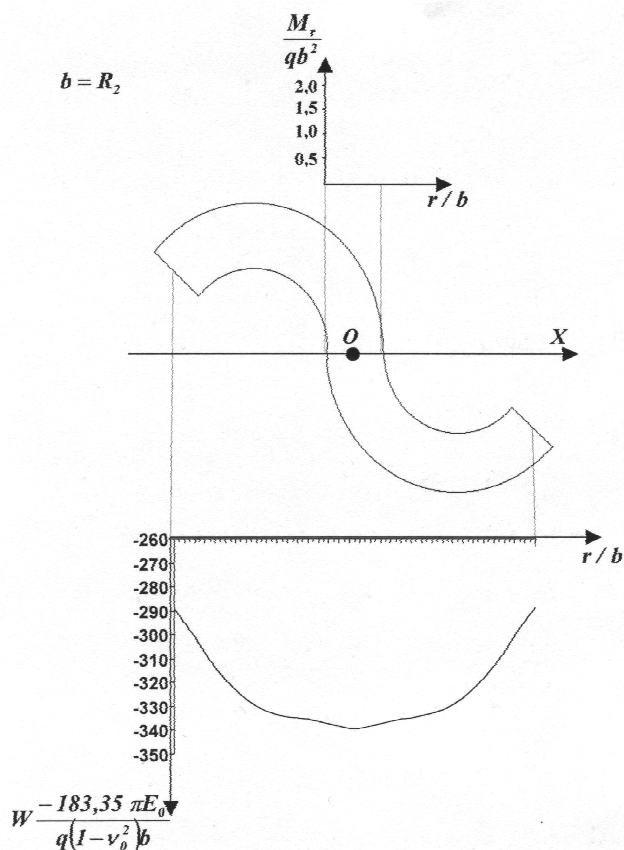


Рисунок 2. Результаты расчета S-образной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки

ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера была рассмотрена плита (рис. 1) на упругом полупространстве, загруженная равномерно распределенной нагрузкой q . При расчете плита разбивалась на 216 участков (по Жемочкину). Принято: $R_1 = R'_1$, $R_2 = R'_2 = 2R_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, $\xi = 50$. Численные результаты, полученные с использованием ПЭВМ, приведенные в таблице, показывают значения коэффициентов B_{ij} , C_{ij} при учете нескольких решений Клебша. Анализ данных

таблицы показывает, что только слагаемые ряда (3), где степень при r четная, дают сходимость ряда (3), соответствующего решению данной задачи.

$$\begin{aligned}
 a &= B_{12} r^2 \cos 2\theta; & \bar{b} &= C_{12} r^2 \sin 2\theta; & v &= B_{21} r^3 \cos \theta; \\
 z &= C_{21} r^3 \sin \theta; & d &= B_{24} r^4 \cos 2\theta; & e &= C_{24} r^4 \sin 2\theta; \\
 \varkappa &= B_{13} r^3 \cos 3\theta; & z &= C_{13} r^3 \sin 3\theta; \\
 u &= B_{23} r^5 \cos 3\theta; & \kappa &= C_{23} r^5 \sin 3\theta; \\
 l &= B_{14} r^4 \cos 4\theta; & m &= C_{14} r^4 \sin 4\theta.
 \end{aligned}$$

Для этой же плиты в двух сечениях на рис. 2 приведены эпюры радиальных моментов M_r и осадок W .

ВЫВОДЫ

Полученные результаты показывают, что предлагаемый подход позволяет рассчитывать пластинки любой гибкости, имеющие любую форму в плане в полярных координатах, на произвольном упругом основании при действии произвольных внешних сил. Однако при выборе координатных функции необходимо рассматривать принимать во внимание сходимость получаемого решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1979. – С. 560.
2. Жемочкин Б. Н., Сеницын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. Москва: Стройиздат, 1962. – С. 237.
3. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. Москва: Стройиздат, 1984. – С. 657.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Физматгиз, 1963. – С. 627.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. – С. 490.
6. Босаков С. В., Генфуд С. Расчет сложной формы жестких пластинок на упругом основании любого типа в полярных координатах// Материалы технологии, инструменты. – 1999. –№ 2. – С. 24–26.
7. Босаков С. В., Генфуд С. Построение функции Грина для бесконечной изгибаемой пластинки с заземленной точкой под действием сосредоточенной силы// Вестник БПИ. – 2000. –№ 1.
8. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. Москва: Стройиздат, 1984. – С. 469.

УДК 624.012.4: 539.432

Драган В.И., Шалобыта Т.П., Шалобыта Н.Н.

ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ КОНТАКТОВ САМОНАПРЯЖЕННЫХ СБОРНО-МОНОЛИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

В настоящее время использование сборно-монолитных железобетонных конструкций в различных отраслях промышленности находят широкое применение, как при новом

строительстве, так и при реконструкции. Использование данных конструкций создает специфические особенности подхода к определению их сопротивления эксплуатационным воз-

Драган Вячеслав Игнатьевич. К.т.н., профессор, зав. каф. строительных конструкций, проректор по научной работе Брестского государственного технического университета.

Шалобыта Татьяна Петровна. К.т.н., ст. преподаватель каф. технологии бетона и строительных материалов Брестского государственного технического университета.

Шалобыта Николай Николаевич. Ст. преподаватель каф. строительных конструкций Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.