

10. Alyavdin P., Werner F. Auswahl maßgebender Lastkombinationen für große Tragwerke// Bauingenieur, Band -72, Heft 7/8, Juli/Aug. 1997. - S. 355 – 361.

11. Рабинович И.М. Кинематический метод в строительной механике в связи с графической кинематикой плоских цепей. – М., Изд-во Московск. высш. техническ. училища, 1928, 407 с.

УДК 539.3

БОСАКОВ С.В., ГЕНФУД С.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ С ЗАЩЕМЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Рассмотрим бесконечную изгибаемую пластинку с защемлением в начале координат под действием сосредоточенной силы P (рис. 1).

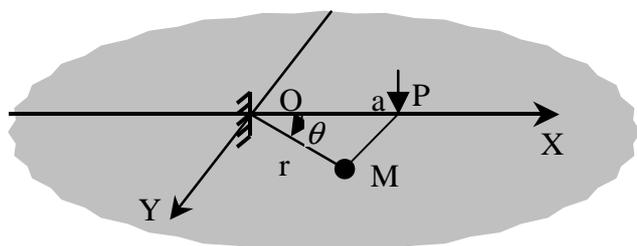


Рисунок 1. Бесконечная пластинка под действием сосредоточенной силы

Искомое решение для прогибов пластинки должно удовлетворять:

- уравнениям равновесия;
- статическим условиям на бесконечности для изгибающего момента и приведенной поперечной силы ($M_r = V_r = 0$ при $r \rightarrow \infty$);
- геометрическим условиям в начале координат

$$\left(W \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \right).$$

При построении решения будем использовать решение Клебша [1], которое применительно к рассматриваемой задаче с одной осью симметрии и действием сосредоточенной силы принимает вид [1]

$$W(r, \theta) = W_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k(r) \cos k \theta;$$

$$W_0(r) = A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r^2 + A_4 r^2 \ln r^2, \quad k = 0;$$

$$W_1(r) = B_{11} r + B_{21} r^3 + B_{31} r^{-1} + B_{41} r \ln r, \quad k = 1;$$

$$W_k(r) = B_{1k} r^k + B_{2k} r^{k+2} + B_{3k} r^{-k} + B_{4k} r^{-k+2}, \quad k > 1; \tag{1}$$

Из условий в начале координат при $r = 0$ нам необходимо в (1) учесть только следующие частные решения

$$W_0(r) = A_2 r^2 + A_4 r^2 \ln r^2, \quad k = 0;$$

$$W_1(r) = B_{21} r^3, \quad k = 1;$$

$$W_k(r) = B_{1k} r^k + B_{2k} r^{k+2}, \quad k > 1;$$

Из статических условий на бесконечности для радиально-го изгибающего момента [2]

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)$$

и приведенной поперечной силы [2]

$$V_r = -D \left(\frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\nu}{r^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)$$

нам также нужно в написанных выше формулах (2) ограничиться слагаемыми с r в степени не выше двух, чтобы выполнить статические граничные условия на бесконечности. Итак, имеем:

$$W_0(r) = A_2 r^2 + A_4 r^2 \ln r^2;$$

$$W_2(r) = B_{12} r^2 \cos 2 \theta. \tag{3}$$

К этим функциям $W_0(r)$ и $W_2(r)$ необходимо добавить особое решение [3], соответствующее действию сосредоточенной силы, приложенной в точке $M(a, \theta)$ рассматриваемой пластинки. Поэтому, предварительно, принимаем:

$$W(r, \theta) = A_2 r^2 + A_4 r^2 \ln r^2 + B_{12} r^2 \cos 2 \theta + \frac{P}{16 \pi D} \times (a^2 - 2ar \cos \theta + r^2) \ln(a^2 - 2ar \cos \theta + r^2) \tag{4}$$

Проверим, как выполняются в (4) геометрические условия в начале координат

При $r = 0$ то
$$\begin{cases} W(0, \theta) = \frac{P}{16 \pi D} a^2 \ln a^2; \\ \frac{\partial W(0, \theta)}{\partial r} = -2a \cos 2 \theta. \end{cases} \tag{5}$$

Из (5) следует, что к выражению (4) необходимо добавить два слагаемых, чтобы выполнялись граничных условия для

Босаков Сергей Владимирович. К.т.н., доцент каф. строительной механики Белорусской государственной политехнической академии.

Генфуд Салах. Аспирант каф. строительной механики Белорусской государственной политехнической академии. Беларусь, БГПА, 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины 65.

перемещения и угла поворота в начале координат. Вводя ве-

личину b - некоторый линейный размер, предварительно получим

$$W(r, \theta) = A_2 \frac{r^2}{b^2} + A_4 \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} + B_{12} \frac{r^2}{b^2} \cos 2\theta + \frac{Pb^2}{16\pi D} \times \left[\frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} \ln \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} + \frac{2ar \cos \theta}{b^2} \left(\ln \frac{a^2}{b^2} + 1 \right) - \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a^2}{b^2} - \frac{r^2}{b} \ln \frac{r^2}{b^2} \right]. \quad (6)$$

Последнее слагаемое в квадратных скобках для особого решения добавлено, чтобы обеспечить выполнение условия $W(r, \theta) = 0$ при $a = 0$.

Так как статических граничных условий два, а неизвестных коэффициентов в (6) A_2, A_4, B_{12} — три, то один из них необходимо отбросить. Отбрасываем коэффициент с множителем $\cos 2\theta$, так как он соответствует наличию двух осей симметрии в рассматриваемой задаче. Поэтому при выборе

$$W(r, \theta) = A_2 \frac{r^2}{b^2} + A_4 \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} + B_{12} \frac{r^2}{b^2} \cos 2\theta + \frac{Pb^2}{16\pi D} \times \left[\frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} \ln \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} + \frac{2ar \cos \theta}{b^2} \left(\ln \frac{a^2}{b^2} + 1 \right) - \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a^2}{b^2} - \frac{r^2}{b} \ln \frac{r^2}{b^2} \right].$$

радиальный изгибающий момент равен

$$M_r = -D \left\{ 2 \frac{A_2}{b^2} + 2 \frac{A_4}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} + 6 \frac{A_4}{b^2} + \frac{P}{16\pi D} \times \left[2 \ln \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} + \frac{(-2a \cos \theta + 2r)^2}{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2} - 2 \ln \frac{r^2}{b^2} - 4 \right] + 2 \frac{\nu A_2}{b^2} + 2 \frac{\nu A_4}{b^2} \left(\ln \frac{r^2}{b^2} + 1 \right) + \frac{\nu P}{16\pi D} \times \left[2 \ln \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} - 2 \ln \frac{r^2}{b^2} + \frac{4a^2 \sin^2 \theta}{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2} \right] \right\} \quad (7)$$

Для определения коэффициентов A_2, A_4 (7) приравняем в (7) коэффициенты при одинаковых множителях при $r \rightarrow \infty$.

$$A_2 + A_4 \ln \frac{r^2}{b^2} + 3A_4 + \nu \left(A_2 + A_4 \ln \frac{r^2}{b^2} + A_4 \right) = 0. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_4 + \nu A_4 = 0 \quad n \text{пу} \ln \frac{r^2}{b^2} \\ A_2 + 3A_4 + \nu(A_2 + A_4) = 0 \quad n \text{пу} r^0 \end{array} \right. \quad (8)$$

Отсюда следует, что $A_2 = A_4 = 0$.

Окончательно получаем искомую формулу для определения перемещений изгибаемой бесконечной пластинки с защемленной точкой под действием сосредоточенной силы

$$W(r, \theta) = \frac{Pb^2}{16\pi D} \left[\frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} \ln \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} + \frac{2ar \cos \theta}{b^2} \left(\ln \frac{a^2}{b^2} + 1 \right) - \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a^2}{b^2} - \frac{r^2}{b} \ln \frac{r^2}{b^2} \right]. \quad (9)$$

Как видно в процессе вывода, полученный результат (9) удовлетворяет всем перечисленным в начале статьи требованиям. Необходимо подчеркнуть, что в полученном решении (9) ввиду нереальности бесконечной пластинки теорема о взаимности перемещений на бесконечности не соблюдается.

На рис.2 показаны прогибы бесконечной пластинки с защемленной точкой под действием сосредоточенной силы при $a = 0.7$.

Выводы. Полученная для перемещения формула (9) может быть использована при расчете любых фундаментных плит методом Б. Н. Жемочкина [4]. Отметим, что (9) также можно получить из решения задачи об изгибе круглой пластинки радиуса a с защемленной точки под действием сосредоточенной силы [5] путем предельного перехода при $a \rightarrow \infty$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и

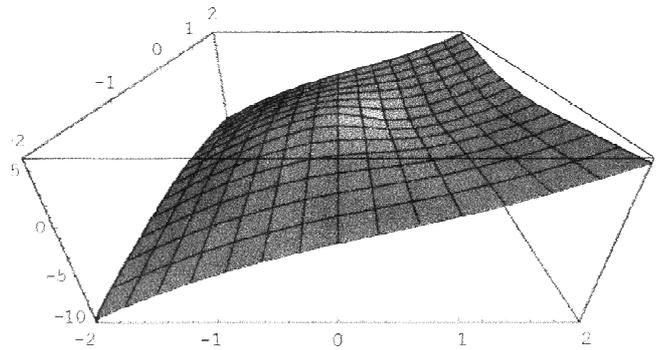


Рисунок 2. Прогибы бесконечной пластинки от действия сосредоточенной силы

- оболочки. Москва: (1963)
2. Ржаницын А. Р. Строительная механика. Москва: (1991)
3. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. Москва: (1984)
4. Жемочкин Б. Н., Синицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. Москва: (1962)
5. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Пластины, диски, балки-стенки. Киев: (1959)