

МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Рассмотрим стержень или пластинку, лежащую без трения на линейно - деформируемом основании [1] под действием внешней нагрузки $q(x,y)$. Предположим, что на контакте между ними могут возникнуть только нормальные напряжения $p(x,y)$. Дифференциальное уравнение равновесия для изгибаемых стержня или пластинки на упругом основании запишем так

$$A \cdot w = f, \tag{1.1}$$

где A - некоторый дифференциальный оператор, равный:

$$A = \frac{d^4}{dx^4} \text{ - для стержня};$$

$$A = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \text{ - для пластинки в прямоугольных координатах};$$

$$A = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right) \text{ - для пластинки в полярных координатах};$$

w - прогибы стержня или пластинки, равные из условия совместности деформаций осадкам упругого основания;

f - правая часть, зависящая от жесткости стержня или пластинки, внешней нагрузки и контактных напряжений.

К. Ректорисом [2] показано, что при представлении решения (1.1) методом Ритца в форме ряда

$$w = \sum_{k=1}^n a_k w_k, \tag{1.2}$$

где w_k - базисная функция, удовлетворяющая требованиям полноты и линейной независимости; а неопределенные коэффициенты a_k находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (Aw_1, w_1)a_1 + (Aw_1, w_2)a_2 + \dots + (Aw_1, w_n)a_n = (f, w_1) \\ (Aw_2, w_1)a_1 + (Aw_2, w_2)a_2 + \dots + (Aw_2, w_n)a_n = (f, w_2) \\ \dots \\ (Aw_n, w_1)a_1 + (Aw_n, w_2)a_2 + \dots + (Aw_n, w_n)a_n = (f, w_n) \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь (Aw_k, w_l) - скалярное произведение [2].

Если принятая система базисных функций (1.2) ортогональна, то все побочные коэффициенты в (1.3) обращаются в нуль. Поэтому для решения поставленной задачи в качестве базисных функций примем собственные функции уравнения изгибных колебаний стержня или пластинки

$$A \cdot w - \lambda^4 \cdot w = 0 \tag{1.4}$$

при соответствующих граничных условиях.

Ранее А. И. Цейглиным подобное представление (1.4) позволило эффективно решить ряд контактных задач [3].

Если стержень длиной 2ℓ со свободными концами лежит на упругом основании в условиях плоской задачи теории уп-

ругости, то в качестве базисных функций целесообразно принять [4]

$$w_i(x) = A_i \left(\frac{ch \lambda_i x / \ell}{ch \lambda_i} + \frac{cos \lambda_i x / \ell}{cos \lambda_i} \right) + B_i \left(\frac{sh \mu_i x / \ell}{sh \mu_i} + \frac{sin \mu_i x / \ell}{sin \mu_i} \right), \quad |x| \leq \ell \tag{1.5}$$

$$th \lambda_i + tg \lambda_i = 0; \quad th \mu_i - tg \mu_i = 0.$$

Если стержень со свободными концами лежит на упругом основании в условиях пространственной задачи теории упругости, то, считая его не изгибаемым в поперечном направлении [5], для базисных функций также необходимо принять представление (1.5).

Для круглой пластинки радиуса b со свободными краями в условиях осесимметричного изгиба [3]

$$w_i(r) = J_0(\lambda_i \frac{r}{b}) + \frac{J_1(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)} I_0(\lambda_i \frac{r}{b}), \quad r \leq b, \tag{1.6}$$

где собственные числа λ_i определяются из трансцендентного уравнения

$$J_0(\lambda_i)I_1(\lambda_i) + J_1(\lambda_i)I_0(\lambda_i) = \frac{2}{\lambda_i} (1 - \nu_p) J_1(\lambda_i)I_1(\lambda_i).$$

Здесь ν_p - коэффициент Пуассона пластинки.

Перед решением системы (1.3) необходимо найти связь между контактными напряжениями $p(x,y)$ и принятыми базисными функциями $w_i(x,y)$. В общем случае для пространственной задачи для этого нужно решить интегральное уравнение

$$a_k w_k(x,y) = \iint_S K(x-\xi, y-\eta) p(\xi, \eta) d\eta d\xi, \tag{1.7}$$

где $K(x,y)$ - функция Грина линейно-деформируемого основания.

Решение (1.7) можно представить в виде [6]

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_{ik} F_i(x,y), \tag{1.8}$$

где α_{ik} - элементы некоторой матрицы;

$F_i(x,y)$ - принятая система ортогональных полиномов для распределения контактных напряжений.

С учетом (1.8) система (1.3) становится полностью заполненной и ее решение позволяет найти коэффициенты при базисных функциях (1.2), откуда их дифференцированием по известным формулам определяются усилия и напряжения по формуле (1.8).

2. Численная реализация предлагаемого подхода проведена на осесимметрично нагруженной кольцевой пластинке ($a \leq r \leq b$). Решение уравнения осесимметричных колеба-

Босаков Сергей Владимирович. Д.т.н., профессор каф. строительной механики Белорусской государственной политехнической академии.

Беларусь, БГПА, 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины 65.

ний такой кольцевой пластинки (1.4) имеет вид [7]

$$w(r) = C_1 J_0(\lambda \frac{r}{b}) + C_2 Y_0(\lambda \frac{r}{b}) + C_3 I_0(\lambda \frac{r}{b}) + C_4 K_0(\lambda \frac{r}{b}) \quad (2.1)$$

где $J_n(z)$ - функция Бесселя первого рода [7];

$Y_n(z)$ - функция Бесселя второго рода [7];

$I_n(z), K_n(z)$ - функции Бесселя мнимого аргумента [7];

$C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ - постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Радиальные поперечная сила Q_r и изгибающий момент M_r в кольцевой пластинке цилиндрической жесткости D при условии (2.1) равны

$$Q_r(r) = -D \lambda^3 \left[C_1 J_1(\lambda \frac{r}{b}) + C_2 Y_1(\lambda \frac{r}{b}) + C_3 I_1(\lambda \frac{r}{b}) - C_4 K_1(\lambda \frac{r}{b}) \right]$$

$$M_r(r) = DC_1 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[J_0(\lambda \frac{r}{b}) - (1-\nu) \frac{b}{\lambda r} J_1(\lambda \frac{r}{b}) \right] +$$

$$+ DC_2 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[Y_0(\lambda \frac{r}{b}) - (1-\nu) \frac{b}{\lambda r} Y_1(\lambda \frac{r}{b}) \right] -$$

$$- DC_3 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[I_0(\lambda \frac{r}{b}) - (1-\nu) \frac{b}{\lambda r} I_1(\lambda \frac{r}{b}) \right] +$$

$$+ DC_4 \frac{\lambda^2}{b^2} \left[K_0(\lambda \frac{r}{b}) - (1-\nu) \frac{b}{\lambda r} K_1(\lambda \frac{r}{b}) \right] \quad (2.2)$$

Выполнение статических граничных условий на свободных краях кольцевой пластинки для M_r и Q_r при $r = a, b$ позволяет найти совокупность собственных чисел λ_i из равного нулю определителя F и затем собственные функции (1.2).

Таким образом, прогибы кольцевой пластинки представим в виде ряда

$$w(r) = w_1 + \sum_{i=2}^{\infty} C_{1i} \left[J_0(\lambda_i \frac{r}{b}) + \frac{C_{2i}}{C_{1i}} Y_0(\lambda_i \frac{r}{b}) + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{3i}}{C_{1i}} I_0(\lambda_i \frac{r}{b}) + \frac{C_{4i}}{C_{1i}} K_0(\lambda_i \frac{r}{b}) \right] \quad (2.3)$$

где w_1 является постоянной, соответствует случаю абсолютно жесткого кольцевого штампа и собственному значению $\lambda_1 = 0$;

$\frac{C_{ni}}{C_{1i}} (n = 2, 3, 4)$ - определяются из граничных условий

для (2.2).

Пусть функция Грина упругого линейно - деформируемого основания может быть представлена в виде [8]

$$F = \begin{vmatrix} J_1(\lambda) & Y_1(\lambda) & I_1(\lambda) & -K_1(\lambda) \\ J_1(\lambda \frac{a}{b}) & Y_1(\lambda \frac{a}{b}) & I_1(\lambda \frac{a}{b}) & -K_1(\lambda \frac{a}{b}) \\ J_0(\lambda) - dJ_1(\lambda) & Y_0(\lambda) - dY_1(\lambda) & I_0(\lambda) - dI_1(\lambda) & -K_0(\lambda) - dK_1(\lambda) \\ J_0(\lambda \frac{a}{b}) - \frac{db}{a} J_1(\lambda \frac{a}{b}) & Y_0(\lambda \frac{a}{b}) - \frac{db}{a} Y_1(\lambda \frac{a}{b}) & I_0(\lambda \frac{a}{b}) - \frac{db}{a} I_1(\lambda \frac{a}{b}) & -K_0(\lambda \frac{a}{b}) - \frac{db}{a} K_1(\lambda \frac{a}{b}) \end{vmatrix}, \quad d = (1-\nu_p) \lambda^{-1}$$

$$K(r, \rho) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{h} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] J_0\left(\frac{u}{h} R\right) du \right\},$$

$$R = \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos\theta + \rho^2}, \quad (2.4)$$

где h - некоторый линейный размер;

E_0, ν_0 - упругие постоянные основания.

$L(u)$ - трансцендентная функция, зависящая от вида упругого основания.

Рассмотрим интегральное уравнение для кольцевой осесимметрично нагруженной пластинки [9], прогибы которой описываются одной из собственных функций (2.3)

$$w_i(r) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho p(\rho) K(r, \rho) d\rho d\theta \quad (2.5)$$

После интегрирования (2.5) по θ с учетом соотношения [7]

$$J_0(mR) = J_0(mr)J_0(m\rho) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(mr)J_k(m\rho) \cos m\theta$$

получаем

$$w_i(r) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \int_0^a \rho p(\rho) \times$$

$$\times \left[4 \frac{K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right)}{\rho+r} + \frac{2\pi}{h} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] J_0\left(\frac{u\rho}{h}\right) J_0\left(\frac{ur}{h}\right) du \right] d\rho \quad (2.6)$$

где $K(z)$ - полный эллиптический интеграл [7].

В (2.6) выполним подстановку [9]

$$r = a e^{\frac{1+x}{\omega}}; \quad \rho = a e^{\frac{1-x}{\omega}}; \quad \omega = \frac{2}{\ln(b/a)} \quad (2.7)$$

и представим распределение реактивных напряжений в виде

$$\psi(x) = \frac{\rho^{3/2}}{a^{3/2}} p(\rho) \quad (2.8)$$

В результате получаем исходное уравнение для решения

$$\sqrt{\frac{r}{a}} w_i(r) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} a \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \left[4 \frac{K\left(\frac{1}{c\kappa}\right)}{c\kappa} + \frac{\pi a}{h} e^{\frac{2+x}{2\omega}} \int_0^{\infty} [L(u) - 1] J_0\left(\frac{u\rho}{h}\right) J_0\left(\frac{ur}{h}\right) du \right] \psi(x) \frac{dx}{\omega}$$

$$z = \frac{t-x}{2\omega} \quad (2.9)$$

Согласно [9] принимаем

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_n(x); \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & 4 \frac{K\left(\frac{1}{chz}\right)}{chz} + \frac{\pi i}{h} e^{\frac{2+t+x}{2\omega}} \int_0^{\infty} [L(u)-1] J_0\left(u \frac{\rho}{h}\right) J_0\left(u \frac{r}{h}\right) du = \\ & - \ln \left| \frac{t-x}{\omega} \right| + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \left(\frac{b}{h}, \omega \right) T_m(x) T_n(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $T_m(x)$ - полином Чебышева первого рода [7].

После интегрирования (2.9) по переменной x с учетом спектрального соотношения [1]

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \ln|t-x| \frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\pi \ln 2; \quad m=0. \\ & = -\frac{\pi}{m} T_m(t), \quad m=1,2,\dots, \end{aligned}$$

получаем уравнение относительно переменной t . Умножаем все члены этого уравнения на

$$\frac{T_n(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad n=0,1,2,\dots \text{ и интегрируем в пределах } (-$$

$1 \leq t \leq 1$). Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов B_n представления (2.10). Ее можно записать в следующем матричном виде

$$[E][B] = \frac{E_0}{2\pi(1-\nu_0^2)a} [A]$$

или

$$\begin{bmatrix} E_{00} + \ln 2\omega & \frac{1}{2} E_{10} & \frac{1}{2} E_{20} & \frac{1}{2} E_{30} \dots \\ \frac{1}{2} E_{01} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} E_{11} & \frac{1}{4} E_{21} & \frac{1}{4} E_{31} \dots \\ \frac{1}{2} E_{02} & \frac{1}{4} E_{12} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} E_{22} & \frac{1}{4} E_{32} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{E_0}{2\pi(1-\nu_0^2)a} \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ A_{3i} \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$A_{k0} = \pi \omega e^{\frac{1}{2\omega}} I_k \left(\frac{1}{2\omega} \right); \quad (2.12)$$

$$A_{ik} = \omega e^{\frac{1}{2\omega}} \int_{-1}^1 \left[J_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \gamma_{1k} Y_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \gamma_{2k} I_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \gamma_{3k} K_0\left(\lambda_k \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) \right] e^{\frac{t}{2\omega}} \frac{T_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\gamma_{1k} = \frac{C_{2k}}{C_{1k}}; \gamma_{2k} = \frac{C_{3k}}{C_{1k}}; \gamma_{3k} = \frac{C_{4k}}{C_{1k}}$$

Интеграл в (2.12) брался численно по квадратурной формуле, используя нули полиномов Чебышева первого рода [10]. Решение системы (2.12) для всех собственных функций дает возможность получить связь между коэффициентами разложения (1.2) и (2.10) в следующем виде

$$B_k = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ik} A_i, \quad (2.13)$$

где коэффициенты α_{ik} являются элементами матрицы

$$[\alpha] = [E]^{-1} \quad (2.14)$$

Таким образом, распределение контактных напряжений (2.10) дается формулой

$$p(r) = \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i+1,n+1} A_i \frac{T_n(\omega \ln \frac{r}{a} - 1)}{\sqrt{1 - (\omega \ln \frac{r}{a} - 1)^2}} \quad (2.15)$$

И скалярные произведения (1.3) получаются

$$\begin{aligned} (p(r), w_1) &= \frac{E_0 a}{2(1-\nu_0^2)\omega} A_i e^{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1,i} I_n \left(\frac{1}{2\omega} \right) \\ (p(r), w_j) &= \frac{E_0 a}{2\pi(1-\nu_0^2)\omega} e^{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{n+1,i} A_i \int_{-1}^1 \frac{e^{2\omega} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \times \\ & \times [J_0\left(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \gamma_{1j} Y_0\left(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \gamma_{2j} I_0\left(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right) + \\ & + \gamma_{3j} K_0\left(\lambda_j \frac{a}{b} e^{\frac{1+t}{2\omega}}\right)] dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

причем последний интеграл в (2.16) берется численно подобно (2.12).

Свободные члены системы уравнений К. Ректориса (1.3) определяются в зависимости от вида внешней нагрузки на пластинку. Для действия на пластинку равномерно распределенной нагрузки q , например, они равны

$$\begin{aligned} (f, w_1) &= \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} \int_a^b q(r) w_1 r dr d\theta = \frac{\pi q}{D} (b^2 - a^2); \\ (f, w_i) &= \frac{2\pi q}{D} \left\{ \frac{b^2}{\lambda_i} [J(\lambda_i) + \gamma_{1i} Y_1(\lambda_i) + \gamma_{2i} Y_1(\lambda_i) + \gamma_{3i} Y_1(\lambda_i)] - \frac{ab}{\lambda_i} [J\left(\lambda_i \frac{a}{b}\right) + \right. \\ & \left. + \gamma_{1i} Y_1\left(\lambda_i \frac{a}{b}\right) + \gamma_{2i} Y_1\left(\lambda_i \frac{a}{b}\right) + \gamma_{3i} Y_1\left(\lambda_i \frac{a}{b}\right)] \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

На этом этапе расчета возможно получить решение для жесткого кольцевого штампа. При этом необходимо учесть

только одно собственное число $\lambda_1 = 0$ и поэтому на основании (2.16) и (2.17) осадка кольцевого штампа, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой q получается в таком виде

$$w_1 = A_1 = \frac{qa(1-\nu_0^2)}{E_0} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \frac{\omega e^{-\frac{1}{2\omega}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1,1} I_n \left(\frac{1}{2\omega} \right)} \quad (2.18)$$

3. Численные результаты приведем для кольцевой пластинки с данными

$$a = 0.5b; \nu_p = 1/6; \frac{E_0 b^3}{2\pi(1-\nu_0^2)D} = 5,$$

лежащей на упругом слое конечной толщины $h = b$, шарнирно сцепленным с жестким основанием. В этом случае [8] для (2.4) на основании асимптотических свойств представим

$$L(u) - 1 = e^{-2u} \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k,$$

$$b_0 = -1; b_1 = -1.5; b_2 = -1; b_3 = -1/3;$$

$$b_4 = 0; b_5 = 1/18; b_6 = 1/45; \dots$$

что позволяет представить

$$\int_0^{2\pi\omega} \int_0^{\omega} [L(u) - 1] J_0 \left(\frac{u}{h} \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos\theta + \rho^2} \right) d\theta du =$$

$$2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_k \frac{(k+2m)!}{2^{k+1} (m!)^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right)^m P_m \left(\frac{\rho^2 + r^2}{\rho^2 - r^2} \right) \left(-\frac{r^2}{16h^2} \right)^m$$

где $P_m(z)$ - полином Лежандра [7].

В процессе вычислений на ПЭВМ получено для 5 членов разложения (1.2) и 10 членов разложения (2.10)

i	λ_i	γ_{11}	γ_{21}	γ_{31}
2	3.087622938	0.31181586	-0.08516220	1.368944030
3	9.626189261	0.27064160	-0.00010407	-49.433663
4	15.80578056	0.14282070	-0.000000204	1124.023747
5	22.06005009	0.10122185	0.0	-26180.648

УДК 621.791

Вагин В.В.

КОНТРОЛЬ НАРУШЕНИЙ ТЕРМИЧЕСКОГО ЦИКЛА ЭЛЕКТРОДУГОВОЙ СВАРКИ ТЕПЛОУСТОЙЧИВЫХ СТАЛЕЙ МАГНИТНЫМИ МЕТОДАМИ

На основе исследований магнитных характеристик теплоустойчивой стали 12Х1МФ в зонах сплавления и термического влияния при различных режимах электродуговой сварки предложен новый подход для оценки качества и прогнозирования долговечности эксплуатации сварных соединений паропроводов на основе магнитной структуроскопии.

Из теплоустойчивых сталей перлитного класса наиболее

$$[E] = \begin{vmatrix} 1.53789 & 0.06073 & 0.03001 & 0.00693... \\ 0.06073 & 0.09241 & 0.01058 & 0.00235... \\ 0.03001 & 0.01058 & 0.04208 & 0.00195... \\ 0.00693 & 0.00235 & 0.00195 & 0.03710... \end{vmatrix}$$

$$\frac{D}{qb^4} [A]^T = \begin{vmatrix} 0.03335 & -0.00603 & 0.00101 & 0.00038 & 0.00002 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{q} [B]^T = \begin{vmatrix} 0.10695 & 0.09211 & 0.00242 & -0.00837 & -0.00314 & -0.00007 & 0.00010 \end{vmatrix}$$

Контролем правильности и точности полученных результатов будет проверка уравнения равновесия, которая в нашем случае дает

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b p(r) r dr = 2\pi a^2 \frac{e^{-\frac{1}{2\omega}}}{\omega} \sum_{m=0}^{10} B_m I_m \left(\frac{1}{2\omega} \right) = 0.75qb^2$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Развитие теории контактных задач в СССР. Под. ред. Л.А. Галина. М.: Наука. - 1976. - С. 493.
2. Ректорис К. Вариационные принципы в математической физике и технике. М.: Мир. - 1985. - С. 589.
3. Цейтлин А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат. - 1984. - С. 334.
4. Фаддеева В.Н. О фундаментальных функциях оператора X^{IV} . Труды математического института АН СССР. Т.2861949. - С.157-159.
5. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат. - 1984. - С. 679.
6. Босаков С.В. Вариационный подход к решению контактной задачи для упругой полуплоскости. ПМ, т.30. - N7. - 1994. - С. 70-73.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМ. - 1963. - С. 1097.
8. Ворович И.М., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука. - 1974. - С. 455.
9. Александров В.М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. МТТ. - 1967. - С.108-116.
10. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. - 1979. - С. 830.

Вагин Валерий Васильевич. Аспирант Могилевского государственного технического университета. Беларусь, МГТУ, 212005, г. Могилев, ул. Ленина 70.