

**Рисунок 4 – График изменения функции устойчивости**

Рассчитать с помощью рассматриваемой программы можно рамы, имеющие до пяти неизвестных по методу перемещений ( $n \leq 5$ ) и до пяти отличающихся друг от друга параметров устойчивости  $v_i$ .

#### **Список цитированных источников**

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

УДК 681.3:624.04

**Матяс П.И.**

**Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ В РАСЧЕТАХ РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Рассматриваются плоские рамы, нагруженные системой взаимосвязанных узловых центрально приложенных сил  $P_i$  ( $i=1...m$ ). Для рам известны их геометрия, размеры и соотношения жесткостей элементов. Считаем, что все силы  $P_i$  изменяются (растут) пропорционально одному параметру  $P$ . Задача устойчивости решается статическим способом с использованием метода перемещений [1]. Разрешающее уравнение устойчивости имеет вид

$$R(v) = \begin{vmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) & \dots & r_{1n}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) & \dots & r_{2n}(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}(v) & r_{n2}(v) & \dots & r_{nn}(v) \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где  $n$  – степень кинематической неопределенности рамы;  $v$  – параметр устойчивости, определяемый для сжатых стержней выражением

$$v_i = l_i \sqrt{\frac{N_i}{EJ_i}}. \quad (2)$$

Здесь:  $l_i$  – длина рассматриваемого  $i$ -го стержня;  $N_i$  – продольная сжимающая сила в этом стержне;  $EJ_i$  – жесткость  $i$ -го стержня.

Уравнение (1) является нелинейным трансцендентным уравнением. Для решения таких уравнений используем учебную компьютерную программу «Parust», описанную в работе [1].

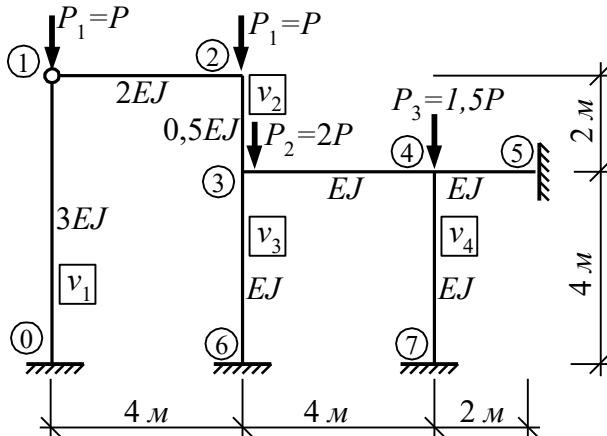


Рисунок 1

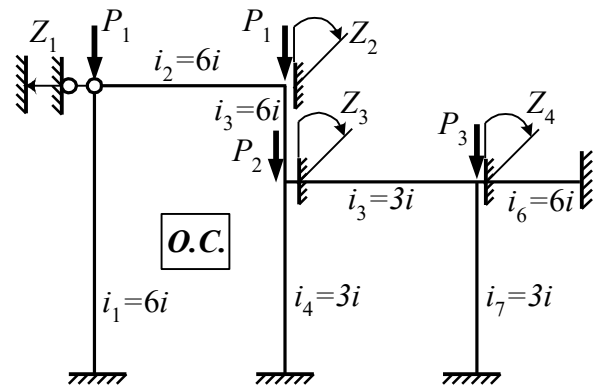


Рисунок 2

Решим задачу устойчивости, например, для рамы, представленной на рис. 1. Параметры устойчивости четырех сжатых стержней определяются выражениями:

$$v_1 = 6\sqrt{\frac{P}{3EJ}}; \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{P}{0,5EJ}}; \quad v_3 = 4\sqrt{\frac{P+2P}{EJ}}; \quad v_4 = 4\sqrt{\frac{1,5}{2EJ}}. \quad (3)$$

Приняв первый параметр устойчивости  $v_1$  за основной ( $v_1 = v_0$ ), получим коэффициенты соотношения параметров устойчивости:

$$k_{v1} = 1; \quad k_{v2} = 0,817; \quad k_{v3} = 2; \quad k_{v4} = 1. \quad (4)$$

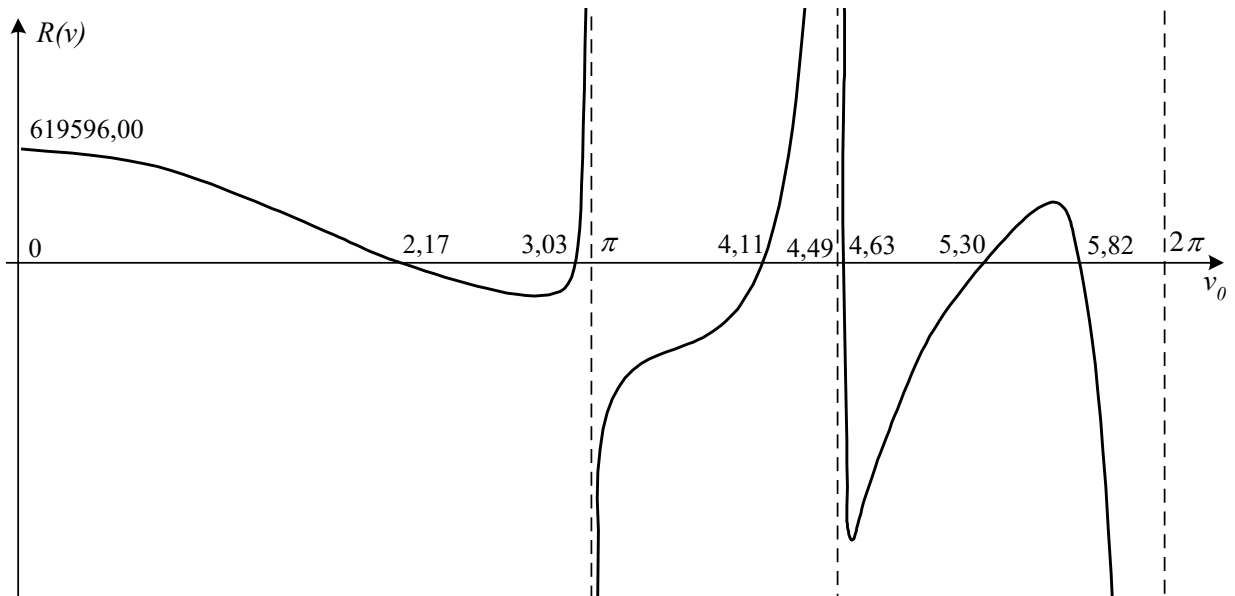
Выполнив расчет рассматриваемой рамы на устойчивость методом перемещений [1], основная система которого показана на рис. 2, получим уравнение устойчивости рамы в виде

$$R(v) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

где реактивные усилия в дополнительных связях определяются выражениями:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 0,5i\eta_1(v_1) + 18i\eta_2(v_2); & r_{12} &= r_{21} = 18i\varphi_4(v_2); & r_{13} &= r_{31} = 18i\varphi_4(v_2); \\ r_{14} &= r_{41} = 0; & r_{22} &= 18 + 24i\varphi_2(v_2); & r_{23} &= r_{32} = 12i\varphi_3(v_2); & r_{24} &= r_{42} = 0; \\ r_{23} &= 24i\varphi_2(v_2) + 12i\varphi_2(v_3) + 12i; & r_{34} &= r_{43} = 6i; & r_{44} &= 12i\varphi_2(v_3) + 36. \end{aligned} \quad (6)$$

Решая уравнение (5) с помощью программы «Parust» [2] получим значение критического параметра устойчивости ( $v_{0кр} = 2,1703$ ) и график изменения функции устойчивости, представленный на рис. 3.



**Рисунок 3 – График функции устойчивости рамы на рис. 1**

Критические нагрузки для стержней рамы определяются выражением

$$P_{i\text{кр}} = \frac{v_{i\text{кр}}^2 EJ_i}{l_i^2} = \frac{(k_{vi} v_{0\text{кр}})^2 EJ_i}{l_i^2}. \quad (7)$$

Значение критического параметра нагрузки  $P$ , через который выражаются все критические нагрузки, будет равно:

$$P_{\text{кр}} = \frac{v_{1\text{кр}}^2 EJ_1}{l_1^2} = \frac{v_{0\text{кр}}^2 3EJ}{6^2}.$$

Выполнив анализ функции устойчивости для представленной рамы, можно выявить ряд закономерностей, которые соблюдаются для всех рам и изложены ниже.

Как известно [1], потеря устойчивости отдельных стержней рамы может быть определена критической силой Эйлера, которая определяется выражением

$$P_{i\text{кр}}^{\text{эйл}} = \frac{\pi^2 EJ_i}{(\mu_i l_i)^2}, \quad (8)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня, значения которого для ряда случаев нам известны: для шарнирно закрепленного с двух сторон сжатого стержня –  $\mu = 1$ ; для стержня, защемленного с одной стороны, и шарнирно опертого с другой –  $\mu = 0,7$ ; для стержня, защемленного с одной стороны –  $\mu = 2$  и для стержня, защемленного с двух сторон –  $\mu = 0,5$ .

Приравняв выражения (5) и (6), получим

$$v_i = \frac{\pi}{\mu_i}, \quad \text{а} \quad v_0 = \frac{v_i}{k_{vi}}. \quad (9)$$

Тогда для рамы на рис. 1 местной потере устойчивости стержней будут соответствовать следующие значения параметров устойчивости:

а) для стержня 0–1:  $v_1 = v_0 = \frac{\pi}{\mu_1} = \frac{\pi}{0,7} = 4,488$ ;

б) для стержня 2–3:  $v_2 = \frac{\pi}{\mu_2} = \frac{\pi}{0,5} = 2\pi$ ;  $v_0 = \frac{v_2}{k_{v2}} = \frac{2\pi}{0,817} = 7,687$ ;

в) для стержня 3–6:  $v_3 = \frac{\pi}{\mu_2} = \frac{\pi}{0,5} = 2\pi$ ;  $v_0 = \frac{v_3}{k_{v3}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ;

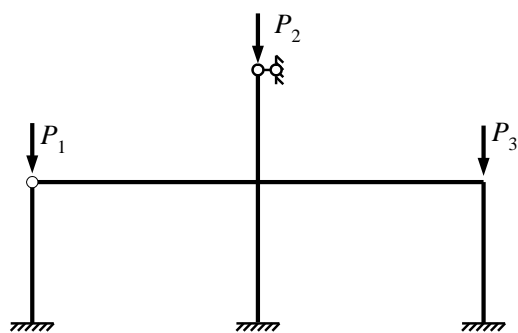
г) для стержня 4–7:  $v_4 = \frac{\pi}{\mu_2} = \frac{\pi}{0,5} = 2\pi$ ;  $v_0 = \frac{v_4}{k_{v4}} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ .

Каждому из этих значений на графике функции устойчивости соответствует точка разрыва (точка  $v_0 = 7,687$  выходит за изображенные пределы изменения графика), то есть точки разрыва функции  $R(v)$  отвечают местной потере устойчивости сжатых стержней рамы.

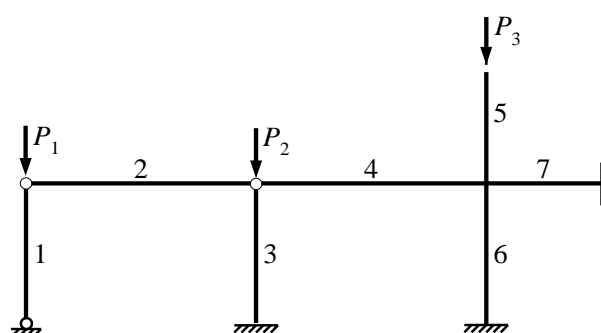
Анализ результатов расчета рам на устойчивость позволяет выделить две группы рам:

1. Связанные рамы, возможная потеря устойчивости отдельных стержней в которых (местная потеря устойчивости) описывается уравнением  $R(v) = 0$  (например, рама на рис. 8). Для рам этой группы критическим нагрузкам всегда будет соответствовать общая форма потери устойчивости. Местная потеря устойчивости стержней в таких рамах не может реализоваться, так как любая деформация одного из стержней будет вызывать сопротивление остальной части рамы и включение ее в общую работу системы.

2. Несвязанные рамы, для которых уравнение  $R(v) = 0$  не охватывает все возможные местные потери устойчивости стержней. Например, местная потеря устойчивости стержней 1, 3 и 5 в раме на рис. 9 не будет описываться уравнением  $R(v) = 0$ . Для таких рам после определения критических нагрузок общей потери устойчивости необходимо произвести их сравнение с критическими нагрузками местной потери устойчивости отдельных стержней.



**Рисунок 8**



**Рисунок 9**

В случаях, когда возникает сомнение о связности рамы, можно выполнить проверку стержней рамы на местную потерю устойчивости.

#### **Список цитированных источников**

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.

2. Матяс, П.И. Учебная программа решения уравнений устойчивости в Mathcad в расчетах рам на устойчивость / Сборник конкурсных научных работ молодых ученых и студентов / БрГТУ. – Брест, 2016.