Таблица – Значения разности минимального и максимального нормально распределенных случайных чисел методом Бокса-Мюллера и с использованием ЦПТ

	Значения разности максимального и минимального случайных чисел, метод Бокса-Мюллера	Значения разности максимального и минимального случайных чисел, ЦПТ, n=6
Значение разности	10.8538	8.1125

На практике возможен вариант, когда одно максимальное или минимальное значение для метода Бокса-Мюллера дают худшие результаты по сравнению с ЦПТ. Чтобы избежать данного явления, необходимо увеличивать выборку чисел, но в любом случае разностные значения максимального и минимального числа для метода Бокса-Мюллера больше. По данным проведенного эксперимента можно сделать выводы, что для получения методом Бокса-Мюллера удовлетворительных результатов при формировании значений величин, распределенных по нормальному закону, требуется достаточное количество равномерно распределенных случайных чисел. Метод суммирования дает усечения максимального и минимального значений случайных величин для 70 002 равномерно распределенных чисел.

Список цитированных источников

1. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К.К. Васильев, М.Н. Служивый. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 170 с.
2. Меньших, Т.Ю. Генераторы псевдослучайных чисел для криптографической защиты канала связи // Соврем.пробл. математики и выч. техники: матер. IX Республ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест,19-21 ноября 2015 г. – Брест: БрГТУ , 2015. – С.31-34.

УДК 519.2

Мисиюк М.А., Онищук К.В.

Научные руководители: к.т.н., доцент Махнист Л.П., к.ф.-м.н., доцент Каримова Т.И.

О НЕКОТОРЫХ МОМЕНТАХ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Показательное (экспоненциальное) распределение [1] – непрерывное распределение вероятностей случайной величины X , задаваемое плотностью

$$p(x)=\begin{cases}0, & если \;\; x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & если \; x\geq 0,\end{cases}$$

где λ $(\lambda>0)$ параметр распределения. Статистический смысл параметра λ состоит в следующем: λ есть среднее число событий на единицу времени, то есть $1/\lambda$ есть средний промежуток времени между двумя последовательными событиями. Показательное распределение часто встречается в теории массового обслуживания и теории надежности. Например, экспоненциальное распределение имеют случайные величины: время ожидания при техническом обслуживании; продолжительность телефонных разговоров, ежедневно регистрируемых на телефонной станции; срок службы радиоэлектронной аппаратуры.

Показательное распределение обладает свойством отсутствия последействия: для любых $x > 0$, $y > 0$ выполняется равенство

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x),$$

где $P(X > x + y | X > y)$ – условная вероятность события $X > x + y$ при условии $X > y$.

Действительно,

$$P(X > x+y | X > y) = \frac{P(X > x+y)}{P(X > y)} = \frac{1 - P(X < x+y)}{1 - P(X < y)} = \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(y)} =$$

$$= \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda(x+y)}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda y}\right)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = 1 - F(x) = 1 - P(X < x) = P(X > x).$$

Это свойство называется также марковским свойством.

Моментом n-го порядка [2] ($n = 0, 1, 2, \ldots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X - a)^n\right)$.

Начальным моментом n-го порядка ($n = 0, 1, 2, \ldots$) случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$. Заметим, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом n-го порядка случайной величины X (относительно центра распределения, т. е. числа $a = M(X)$) называется $\mu_n = M\left((X - M(X))^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Факториальным моментом n-го порядка ($n = 0, 1, 2, \ldots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X - a)(X - a - 1)\ldots(X - a - n + 1)\right)$.

Начальным факториальным моментом n-го порядка ($n = 0, 1, 2, \ldots$) случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = M\left(X(X - 1)\ldots(X - n + 1)\right)$. Заметим, что $\alpha_{[0]} = 1$, $\alpha_{[1]} = M(X)$.

Центральным факториальным моментом n-го порядка ($n = 0, 1, 2, \ldots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т. е. числа $a = M(X)$) называется

$$\mu_{[n]} = M\left((X - M(X))^{[n]}\right) = M\left((X - M(X))(X - M(X) - 1)\ldots(X - M(X) - n + 1)\right).$$

Заметим, что $\mu_{[0]} = 1$, $\mu_{[1]} = 0$, $\mu_{[2]} = D(X)$.

Для начальных моментов *n*-го порядка показательного распределения выполняется:

$$\alpha_n = M\left(X^n\right) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x^n dx = -\int_0^{+\infty} x^n d\left(e^{-\lambda x}\right) = -x^n e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\left(x^n\right) =$$

$$= -\left(\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-\lambda x} - 0^n e^{-\lambda \cdot 0}\right) + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x^{n-1} dx = \frac{n\alpha_{n-1}}{\lambda}$$

Пользуясь полученной рекуррентной формулой, найдем некоторые начальные моменты. Учитывая, что $\alpha_0 = \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$, получим $\alpha_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \alpha_0 = \frac{1}{\lambda}$,

$\alpha_2 = \frac{2}{\lambda}\alpha_1 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$, $\alpha_3 = \frac{3}{\lambda}\alpha_2 = \frac{3}{\lambda} \cdot \frac{2}{\lambda^2} = \frac{6}{\lambda^3}$, $\alpha_4 = \frac{4}{\lambda}\alpha_3 = \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{6}{\lambda^3} = \frac{24}{\lambda^4}$,

$\alpha_5 = \frac{5}{\lambda}\alpha_4 = \frac{5}{\lambda} \cdot \frac{24}{\lambda^4} = \frac{120}{\lambda^5}$, $\alpha_6 = \frac{6}{\lambda}\alpha_4 = \frac{6}{\lambda} \cdot \frac{120}{\lambda^5} = \frac{720}{\lambda^6}, \ldots$

Таким образом, *начальные моменты* n-го порядка определяются соотношением $\alpha_n = \frac{n!}{\lambda^n}$.

Математическое ожидание показательного закона распределения $MX = \alpha_1 = \frac{1}{\lambda}$.

Найдем формулу для вычисления центральных моментов n-го порядка.

$$\mu_n = M\left(\left(X - M(X)\right)^n\right) = \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^n dx = \left| \begin{array}{c} x - \frac{1}{\lambda} = t,\ dx = dt \\ x = 0,\quad t = -\frac{1}{\lambda} \end{array} \right| = \frac{1}{e}\int\limits_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} t^n dt.$$

К полученному интегралу применим теорему интегрирования по частям.

$$\mu_n = e^{-1}\int\limits_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} t^n dt = -e^{-1}\int\limits_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} t^n d\left(e^{-\lambda t}\right) = -e^{-1} t^n e^{-\lambda t}\Bigg|_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} + e^{-1}\int\limits_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} e^{-\lambda t} d\left(t^n\right) =$$

$$= -e^{-1}\left(\lim_{t \to +\infty} t^n e^{-\lambda t} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}\right) + e^{-1} n \int\limits_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= -e^{-1}\lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{e^{\lambda t}} + \frac{(-1)^n}{\lambda^n} + \frac{n}{\lambda} e^{-1}\int\limits_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} t^{n-1} dt = \frac{(-1)^n}{\lambda^n} + \frac{n\mu_{n-1}}{\lambda}.$$

Следовательно, $\mu_1 = -\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu_0}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = 0$ (так как $\mu_0 = 1$),

$\mu_2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2\mu_1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$, $\mu_3 = -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3\mu_2}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^3}$,

$\mu_4 = \frac{1}{\lambda^4} + \frac{4\mu_3}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^4} + \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{9}{\lambda^4}$, $\mu_5 = -\frac{1}{\lambda^5} + \frac{5\mu_4}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda^5} + \frac{5}{\lambda} \cdot \frac{9}{\lambda^4} = \frac{44}{\lambda^5}$,

$\mu_6 = \frac{1}{\lambda^6} + \frac{6\mu_5}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^6} + \frac{6}{\lambda} \cdot \frac{44}{\lambda^5} = \frac{265}{\lambda^6}, \ldots$

Так как имеет место представление $\mu_n = \frac{a_n}{\lambda^n}$, то $\mu_n = \frac{(-1)^n}{\lambda^n} + \frac{n\mu_{n-1}}{\lambda} = \frac{(-1)^n}{\lambda^n} + \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-1}} = \frac{(-1)^n + na_{n-1}}{\lambda^n}$ и, следовательно, значения a_n удовлетворяют рекуррентному соотношению $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$.

Учитывая, что центральные моменты n-ого порядка μ_n связаны с начальными моментами соотношением [2] $\mu_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \alpha_{n-m} \alpha_1^m$, получим

$$\mu_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \alpha_{n-m} \alpha_1^m = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \frac{(n-m)!}{\lambda^{n-m}} \cdot \frac{1}{\lambda^m} = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m (n-m)! =$$

$$= \frac{1}{\lambda^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!} = \frac{1}{\lambda^n} \cdot \frac{n!}{0!} - \frac{1}{\lambda^n} \cdot \frac{n!}{1!} + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{m=2}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!} = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{m=2}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!}.$$

Из этого соотношения также можно получить, что

$$\mu_n = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{m=2}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!} = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{m=2}^{n-1} (-1)^m \frac{n!}{m!} + \frac{1}{\lambda^n} (-1)^n \frac{n!}{n!} =$$

$$= \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^{n-1}} \sum_{m=2}^{n-1} (-1)^m \frac{(n-1)!}{m!} + \frac{(-1)^n}{\lambda^n} = \frac{n\mu_{n-1}}{\lambda} + \frac{(-1)^n}{\lambda^n}.$$

Тогда, *дисперсия* $\mu_2 = D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{m=2}^{2} (-1)^m \frac{2!}{m!} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{2!}{2!} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ (*среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}$),

$$\mu_3 = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{m=2}^{3} (-1)^m \frac{3!}{m!} = \frac{1}{\lambda^3} \left(\frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} \right) = \frac{1}{\lambda^3} (3-1) = \frac{2}{\lambda^3},$$

$$\mu_4 = \frac{1}{\lambda^4} \sum_{m=2}^{4} (-1)^m \frac{4!}{m!} = \frac{1}{\lambda^4} \left(\frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} \right) = \frac{1}{\lambda^4} (12-4+1) = \frac{9}{\lambda^4},$$

$$\mu_5 = \frac{1}{\lambda^5} \sum_{m=2}^{5} (-1)^m \frac{5!}{m!} = \frac{1}{\lambda^5} \left(\frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} \right) = \frac{1}{\lambda^5} (60-20+5-1) = \frac{44}{\lambda^5}, \ldots$$

$$\mu_6 = \frac{1}{\lambda^6} \sum_{m=2}^{6} (-1)^m \frac{6!}{m!} = \frac{1}{\lambda^6} \left(\frac{6!}{2!} - \frac{6!}{3!} + \frac{6!}{4!} - \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{6!} \right) = \frac{1}{\lambda^6} (360-120+30-6+1) = \frac{265}{\lambda^6}$$

Замечание. *Центральные моменты* n-го порядка можно рассчитывать по формуле $\mu_n = \frac{a_n}{\lambda^n}$, где значения a_n удовлетворяют рекуррентному соотношению $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$, $a_0 = 1$.

Действительно,

$$a_n = \sum_{m=2}^{n} \frac{(-1)^m n!}{m!} = \sum_{m=2}^{n-1} \frac{(-1)^m n!}{m!} + \frac{(-1)^n n!}{n!} = n \sum_{m=2}^{n-1} \frac{(-1)^m (n-1)!}{m!} + (-1)^n = na_{n-1} + (-1)^n.$$

Например, $a_3 = 3a_2 + (-1)^3 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $a_4 = 4a_3 + (-1)^4 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$, $a_5 = 5a_4 + (-1)^5 = 5 \cdot 9 - 1 = 44$, $a_6 = 6a_5 + (-1)^6 = 6 \cdot 44 + 1 = 265$, ...

Число $!n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m n!}{m!}$ называется <u>*субфакториалом*</u> *числа* n. Следовательно, $a_n = !n$. Тогда *центральные моменты* n-ого порядка можно рассчитывать по формуле $\mu_n = \frac{!n}{\lambda^n}$.

Заметим, что *нормированный момент n*-го порядка равен $\frac{\mu_n}{\sigma^n} = !n$ – *субфакториалу натурального числа n*.

Тогда, *коэффициент асимметрии* $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = a_3 = 2$ и *эксцесса коэффициент* (эксцесс – скалярная характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального распределения) $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = a_4 - 3 = 9 - 3 = 6$.

Коэффициент вариации $V(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = 1$.

Так как для медианы M_eX показательного закона распределения выполняется

$$\int_0^{M_eX} \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{M_eX} = -e^{-\lambda M_eX} + e^{-\lambda 0} = -e^{-\lambda M_eX} + 1 = 0,5 \text{ и}$$

$$\int_{M_eX}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{M_eX}^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} - e^{-\lambda M_eX}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}} + e^{-\lambda M_e(X)} = e^{-\lambda M_e(X)} = 0,5,$$

то $e^{-\lambda M_eX} = 0,5$ или $-\lambda M_eX = \ln 0,5 = -\ln 2$.

Следовательно, $M_eX = \frac{\ln 2}{\lambda}$ – *медиана* показательного распределения.

С другой стороны, для медианы распределения со строго монотонной функцией распределения $F(x)$ выполняется $M_e(X) = F^{-1}(0,5)$, а квантиль x_p порядка p удовлетворяет соотношению $x_p = F^{-1}(p)$. Так как функция распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, то $F^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\lambda}$ и медиана $x_{1/2} = M_e(X) = \frac{\ln 2}{\lambda}$, а *квантиль* x_p *порядка* p удовлетворяет соотношению $x_p = F^{-1}(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$.

Список цитированных источников

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Зеневич, Е.А. Моменты распределения вероятностей / Е.А. Зеневич, Н.В. Фомина (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест : Из-во БрГТУ, 2012. – Ч. 1. – С. 68–72.
3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1977. – 831 с.