Результаты, полученные для различного размера *n* групп складываемых чисел, взятых из начального массива одинакового размера *k* , сведены в таблицу.

Таблица – Параметры усечения нормализованного распределения псевдослучайных чисел

Параметр усечения	Значение границы усечения при размере *n* группы складываемых чисел			
	n=6	*n*=12	*n*=18	*n*=24
V'_{MIN}	– 4,2426	– 6,0	– 7,2910	– 7,6720
V'_{MAX}	3,8699	4,4367	4,4033	4,5971

Анализ приведенных данных показывает, что с увеличением числа *n* размах нормализованного распределения возрастает, что дает основания утверждать об улучшении получаемого нормального распределения при увеличении количества суммируемых равномерно распределенных чисел. При этом, однако, пропорционально уменьшается количество k/n нормально распределенных чисел, что может считаться недостатком данного метода с точки зрения снижения периода генерации такой псевдослучайной последовательности. Поэтому, в качестве продолжения исследований, необходимо провести сравнительную оценку других методов получения нормально распределенных чисел, например, метода Бокса-Мюллера, который, в отличие от метода суммирования, не дает усечения распределения получаемой случайной величины.

Список цитированных источников

1. Васильев, К.К. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К.К. Васильев, М.Н. Служивый. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 170 с.

2. Хазан, В.Л. Математические модели дискретных каналов связи декаметрового диапазона радиоволн: учебное пособие / В.Л. Хазан. – Омск: ОмГТУ, 1998. – 106 с.

3. Меньших, Т.Ю. Генераторы псевдослучайных чисел для криптографической защиты канала связи / Т.Ю. Меньших / Соврем. пробл. математики и выч. техники: матер. IX Республ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест,19-21 ноября 2015 г. – Брест: БрГТУ , 2015. – С.31-34.

УДК 004.4

Меньших Т.Ю.

Научный руководитель: Дереченник С.С., к.т.н., доцент

РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATLAB МЕТОДА БОКСА-МЮЛЛЕРА ПОЛУЧЕНИЯ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

В настоящее время существует несколько способов получения нормального закона распределения с помощью математического моделирования. Начиная с конца XIX века, в теории вероятностей ввели понятие центральной предельной теоремы (ЦПТ), которая посвящена установлению сумм равномерно распределенных случайных величин для реализации нормального закона распределения. Чтобы получить нормальный закон распределения чисел с помощью ЦПТ, требуется сложить случайные числа с любым законом распределения (в нашем случае – равномерный закон распределения), нормализовать их и перевести в нужный диапазон нормального распределения [1]. Основным недостатком данного метода является требование достаточно большого числа равномерно-распределенных чисел для получения одного случайного числа, распределенного по нормальному закону, и усечение максимального и минимального случайного значения этих чисел. Позже, в 1958 году, Д. Бокс и М. Мюллер предложили новый метод моделирования стандартных нормально распределенных случайных величин.

Новизна работы состоит в программной разработке метода Бокса-Мюллера для получения нормально распределенных псевдослучайных чисел с помощью программной среды MatLab. В работе приведены результаты анализа получения нормального закона распределения с помощью центральной предельной теоремы и методом Бокса-Мюллера, проведены сравнительные испытания, сделаны выводы по качеству и целесообразности использования каждого из методов.

В отличие от методов, основывающихся на центральной предельной теореме, метод Бокса-Мюллера не дает усечения минимального и максимального значения случайной величины. Алгоритм формирования псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения, используемый в данной работе, разработан профессором Омского государственного технического университета В.Л. Хазаном и подробно описан ранее [2]. Для его формирования необходимо знать два параметра: начальное случайное число и разрядность двоичного числа. Для примера исследуем 70 000 псевдослучайных чисел при начальном случайном числе X0=33 и разрядности двоичного числа N=53, полученных с помощью данного алгоритма. Для построения гистограммы плотности распределения 70 000 псевдослучайных чисел воспользуемся следующим алгоритмом, реализованным с помощью программной среды MatLab:

```
% X    -  псевдослучайные числа
% M    -  частота появления чисел на заданном
          интервале (задает высоту каждого столбца)
% M1   -  значения плотности вероятности
% l    -  количество псевдослучайных чисел
M=hist(X,20);
M1=M/l*20;
bar(M1,1);
```

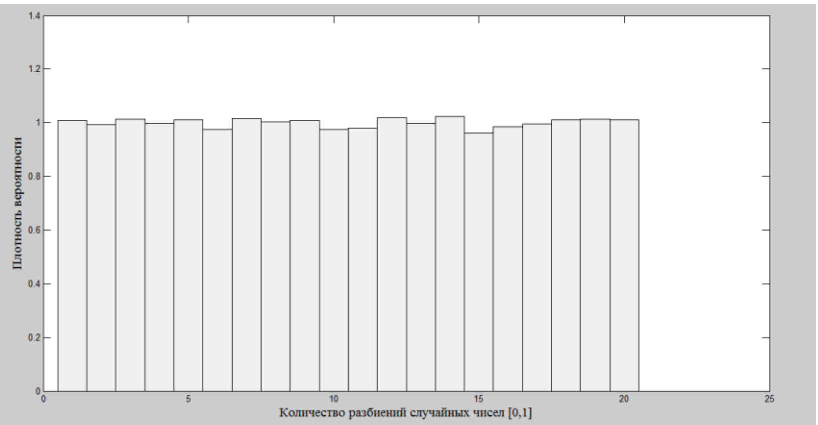

Рисунок 1 – Гистограмма относительных частот для 70 000 равномерно распределенных пседвослучайных чисел (по оси абсцисс – номер интервала)

Далее воспользуемся формулами преобразования Бокса-Мюллера, в которой используются две независимые равномерно распределенные на интервале [0,1] псевдослучайные величины X_1 и X_2:

$$V = \cos\,(2\pi X_1)\sqrt{2\ln\,(\frac{1}{X_2})}\;, \tag{1}$$

$$V = \sin\,(2\pi X_1)\sqrt{2\ln\,(\frac{1}{X_2})}\;. \tag{2}$$

Для получения двух псевдослучайных чисел X_1 и X_2 зададим начальные случайные числа $X0_1 = 33$ и $X0_2 = 34$.

Согласно преобразованию Бокса-Мюллера числа X_1 являются значением угла для косинуса и синуса и «растянуты» на интервале от 0 до 2π. Поэтому 70000 псевдослучайных чисел равномерного распределения будут тоже равномерно распределены, только на интервале [0,2π]. Гистограммы косинуса и синуса случайных чисел приведены на рисунке 2.

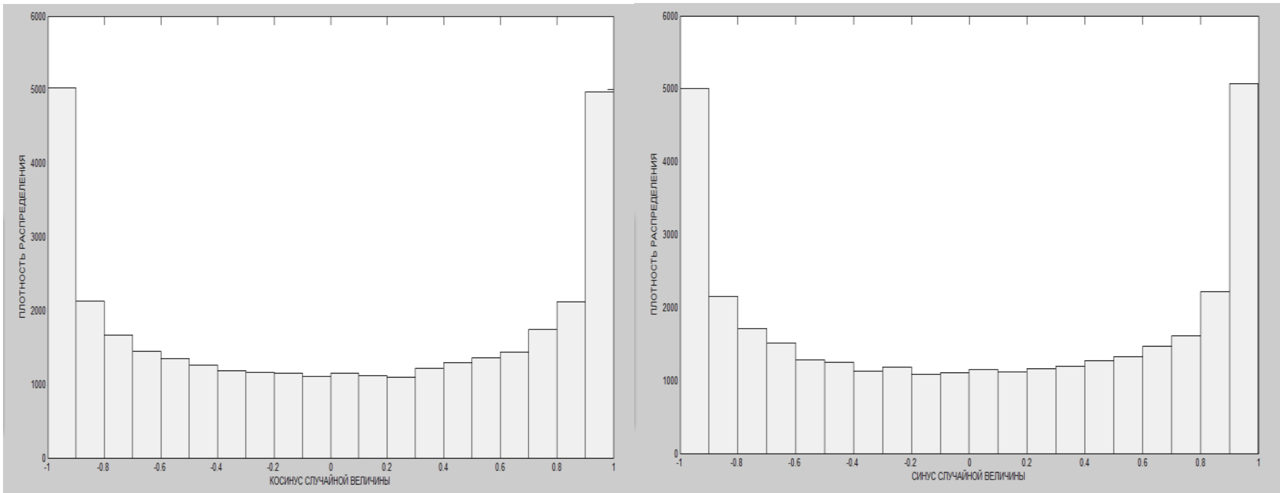

Рисунок 2 – Гистограммы косинуса (слева) и синуса (справа) 35 000 псевдослучайных чисел с равномерным распределением плотности вероятности на интервале [0, 2π]

С помощью формулы $\sqrt{2\ln\,(\frac{1}{X_2})}$ из равномерного закона распределения чисел на интервале [0,1] получим рэлеевский закон распределения. Гистограмма распределения для 70000 псевдослучайных чисел показана на рисунке 3.

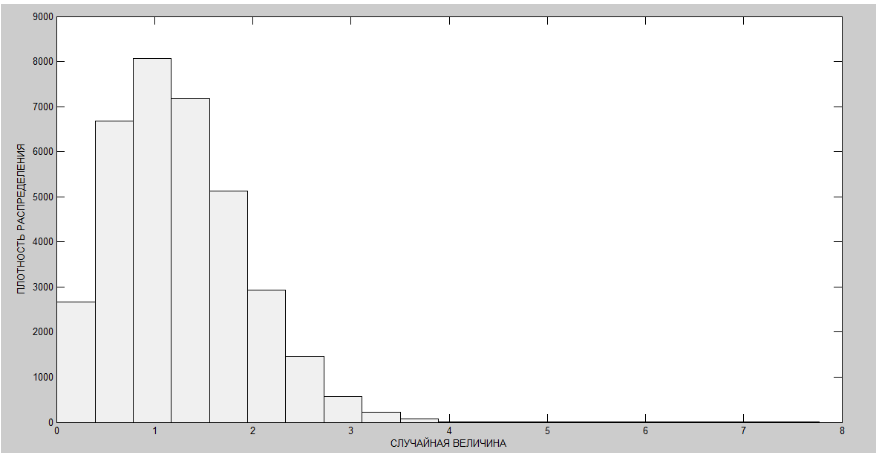

Рисунок 3 – Гистограмма 70 000 псевдослучайных чисел с рэлеевским законом распределения плотности вероятности

Для нахождения величины с нормальным законом распределения необходимо перемножить полученные значения косинуса или синуса и величин с рэлеевским распределением, т. е. воспользоваться формулами (1) и (2) для нахождения V. Получим нормализованный закон нормального распределения чисел, то есть со значениями $m = 0$, $\sigma = 1$.

Гистограммы полученного распределения изображены на рисунке 4.

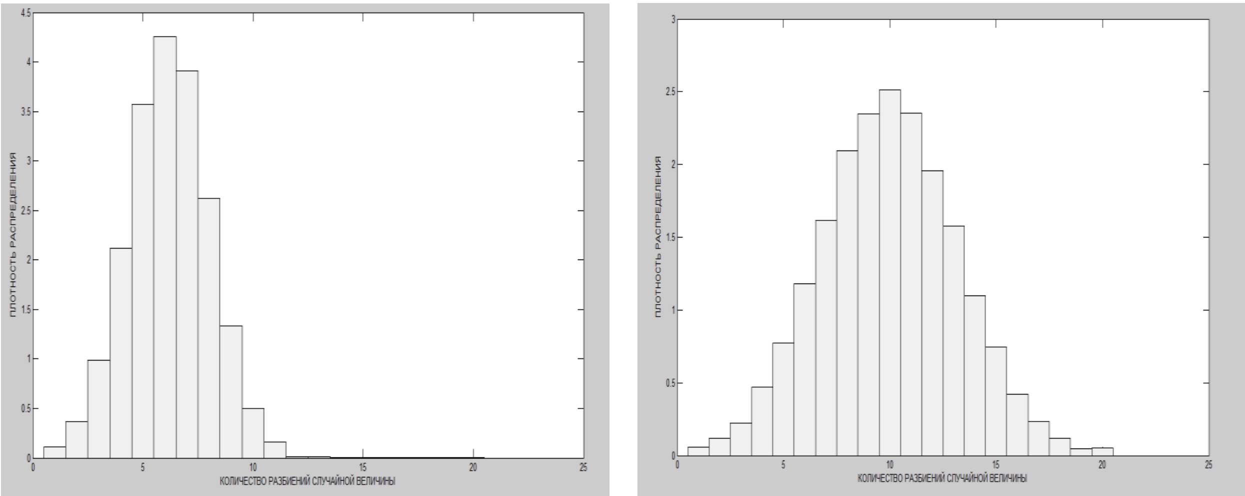

Рисунок 4 – Гистограммы 35 000 пседвослучайных чисел для косинуса (слева) и синуса (справа) с нормальным законом распределения плотности вероятности, реализованная методом Бокса-Мюллера

Метод Бокса-Мюллера не дает усечения минимального и максимального значений случайных величин. Чтобы наглядно это показать, реализуем метод суммирования равномерно распределенных чисел и сравним полученные значения.

Для удобства возьмем 70 002 чисел для n=6. После преобразования равномерного закона распределения путем сложения по 6 случайных чисел получим нормализованный закон распределения, тогда усечение имеет значения минимума min=-4.2426 и максимума max=3.8699.

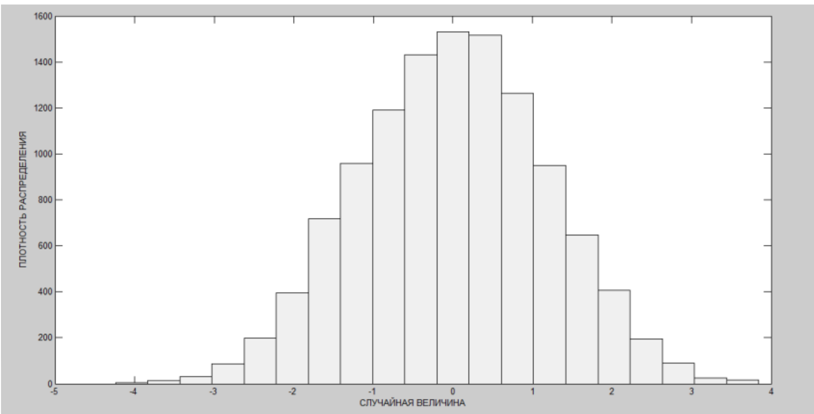

Рисунок 5 – Нормализованная гистограмма 11 667 псевдослучайных чисел с нормальным распределением плотности вероятности

Из графиков нормализованного нормального распределения для одинакового количества равномерно распределенных чисел видно, что для метода Бокса-Мюллера усечения не происходит. Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица – Значения разности минимального и максимального нормально распределенных случайных чисел методом Бокса-Мюллера и с использованием ЦПТ

	Значения разности максимального и минимального случайных чисел, метод Бокса-Мюллера	Значения разности максимального и минимального случайных чисел, ЦПТ, n=6
Значение разности	10.8538	8.1125

На практике возможен вариант, когда одно максимальное или минимальное значение для метода Бокса-Мюллера дают худшие результаты по сравнению с ЦПТ. Чтобы избежать данного явления, необходимо увеличивать выборку чисел, но в любом случае разностные значения максимального и минимального числа для метода Бокса-Мюллера больше. По данным проведенного эксперимента можно сделать выводы, что для получения методом Бокса-Мюллера удовлетворительных результатов при формировании значений величин, распределенных по нормальному закону, требуется достаточное количество равномерно распределенных случайных чисел. Метод суммирования дает усечения максимального и минимального значений случайных величин для 70 002 равномерно распределенных чисел.

Список цитированных источников

1. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К.К. Васильев, М.Н. Служивый. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 170 с.
2. Меньших, Т.Ю. Генераторы псевдослучайных чисел для криптографической защиты канала связи // Соврем.пробл. математики и выч. техники: матер. IX Республ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест,19-21 ноября 2015 г. – Брест: БрГТУ , 2015. – С.31-34.

УДК 519.2

Мисиюк М.А., Онищук К.В.
Научные руководители: к.т.н., доцент Махнист Л.П., к.ф.-м.н., доцент Каримова Т.И.

О НЕКОТОРЫХ МОМЕНТАХ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Показательное (экспоненциальное) распределение [1] – непрерывное распределение вероятностей случайной величины X, задаваемое плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

где λ ($\lambda > 0$) параметр распределения. Статистический смысл параметра λ состоит в следующем: λ есть среднее число событий на единицу времени, то есть $1/\lambda$ есть средний промежуток времени между двумя последовательными событиями. Показательное распределение часто встречается в теории массового обслуживания и теории надежности. Например, экспоненциальное распределение имеют случайные величины: время ожидания при техническом обслуживании; продолжительность телефонных разговоров, ежедневно регистрируемых на телефонной станции; срок службы радиоэлектронной аппарату-