УДК 004.4
Меньших Т.Ю.
Научный руководитель: Дереченник С.С., к.т.н., доцент

ПОЛУЧЕНИЕ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MATLAB НА ОСНОВЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

Нормальный закон распределения встречается в природе довольно часто, поэтому для него разработаны различные методы моделирования. Актуальность темы исследования заключается в том, что в настоящее время с помощью нормального закона распределения возможно изучение широкого круга явлений и проведение анализа характеристик различных сложных систем. Новизна работы состоит в разработке методов получения нормально распределенных псевдослучайных чисел в программной среде MatLab. Вопрос о получении чисел с нормальным законом распределения изучался с конца XIX века, когда в теории вероятностей возникло направление исследований, получившее название «предельные теоремы теории вероятностей». В этом направлении, начало которого было положено нашими соотечественниками П.Л. Чебышевым, А.А. Марковым и А.М. Ляпуновым, по сей день ведутся интенсивные исследования.

Предельные теоремы теории вероятностей можно разбить на две большие группы. Первая группа основана на «законе больших чисел», формулирующем условия, при которых совокупное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая. Вторая группа теорем связана с выяснением вопроса о распределении сумм большого числа случайных величин. В них выясняется, какие законы распределения может иметь сумма случайных величин, если число слагаемых неограниченно увеличивается, и какие условия при этом нужно наложить на сами величины. В частности, центральная предельная теорема (ЦПТ) посвящена установлению сумм, при которых возникает нормальный закон распределения.

В данной работе для получения нормально распределенных чисел из равномерного распределения используется ЦПТ, согласно которой требуется сложить случайные числа с любым, но одним и тем же законом распределения (в нашем случае – равномерным), нормализовать их и перевести в необходимый диапазон нормального распределения [1]. Алгоритм формирования равновероятно распределенных псевдослучайных чисел с повышенной разрядностью и периодом генерации до 2^{53}, используемый в данной работе, разработан профессором Омского государственного технического университета В.Л. Хазаном [2], реализация алгоритма подробно описана ранее [3]. Для их формирования необходимо задать два параметра: начальное случайное число и разрядность двоичного числа. Для примера исследуем k = 70 000 псевдослучайных чисел из диапазона [0,1], полученных с помощью данного алгоритма при начальном случайном числе X0=33 и разрядности двоичного числа N=53. Для построения гистограммы плотности распределения псевдослучайных чисел воспользуемся следующим алгоритмом, реализованным с помощью программной среды Matlab:

```
% X     - псевдослучайные числа
% M     - частота появления чисел на заданном
          интервале (задает высоту каждого столбца)
% M1    - значения плотности вероятности
% k     - количество псевдослучайных чисел

M=hist(X,20);
M1=M/k*20;
bar(M1,1);
```

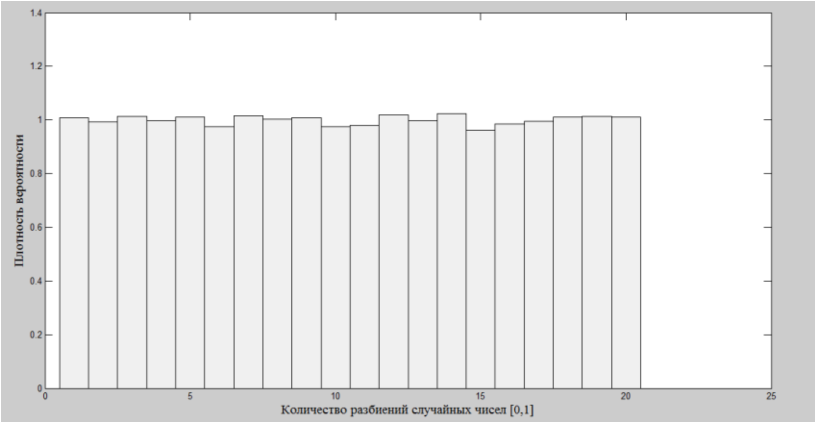

Рисунок 1 – Гистограмма относительных частот для 70 000 равномерно распределенных пседвослучайных чисел (по оси абсцисс – номер интервала)

Далее воспользуемся формулой ЦПТ и будем складывать полученные случайные числа группами по *n* чисел: $V = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Согласно ЦПТ, числа *V* образуют массив значений, распределенный по нормальному закону. Эти числа тем лучше описывают нормальный закон, чем больше параметр *n*. На практике *n* принимают равным 6 или 12. Поскольку математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для исходных псевдослучайных чисел составляют, соответственно $m_X = 0{,}5$ и $\sigma_X = \sqrt{1/12}$, закон распределения чисел *V* имеет математическое ожидание $m_V = n/2$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_V = \sqrt{n/12}$. Такое распределение, очевидно, является смещенным относительно стандартного нормального распределения. Нормализация распределения к стандартному закону со значениями $m = 0$ и $\sigma = 1$ выполняется по формуле $V' = (V - m_V)/\sigma_V$.

Для целочисленного деления массива на группы чисел примем *k* = 70 002 и *n*=6. После преобразования равномерного закона распределения путем сложения случайных чисел получили смещенный и усеченный нормальный закон распределения с минимальным и максимальным значениями случайной величины $V_{MIN} \cong 3 \cdot 10^{-10}$ и $V_{MAX} = 5{,}7364$ (гистограмма представлена на рисунке 2).

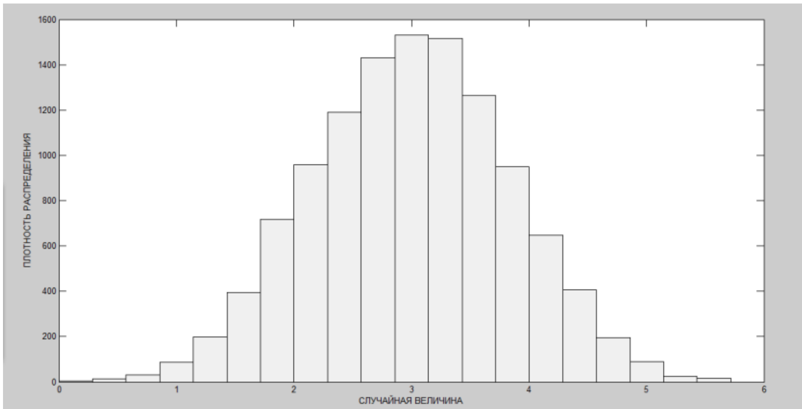

Рисунок 2 – Смещенная гистограмма 11 667 псевдослучайных чисел с нормальным распределением плотности вероятности

После нормализации полученного распределения значения левой и правой границ усечения приняли значения: $V'_{MIN} = -4{,}2426$ и $V'_{MAX} = 3{,}8699$ (рисунок 3).

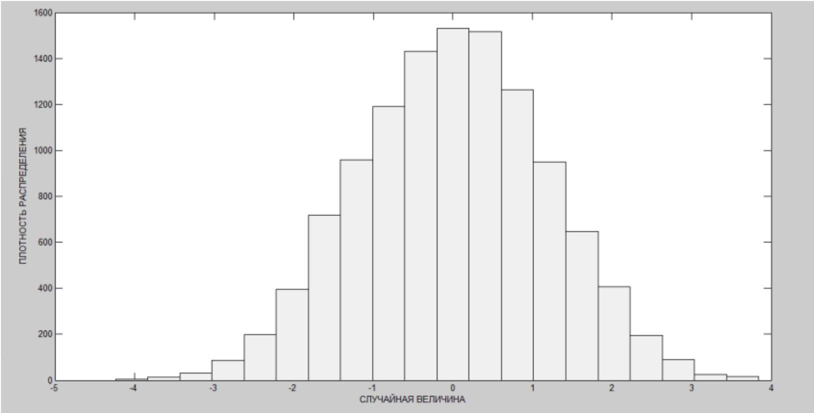

Рисунок 3 – Нормализованная гистограмма 11 667 псевдослучайных чисел с нормальным распределением плотности вероятности

При сложении *k* = 70 008 равномерно распределенных чисел группами по *n*=12 чисел получили смещенный нормальный закон распределения с параметрами усечения случайной величины: $V_{MIN} \cong 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ и $V_{MAX} = 10{,}4363$ (рисунок 4)

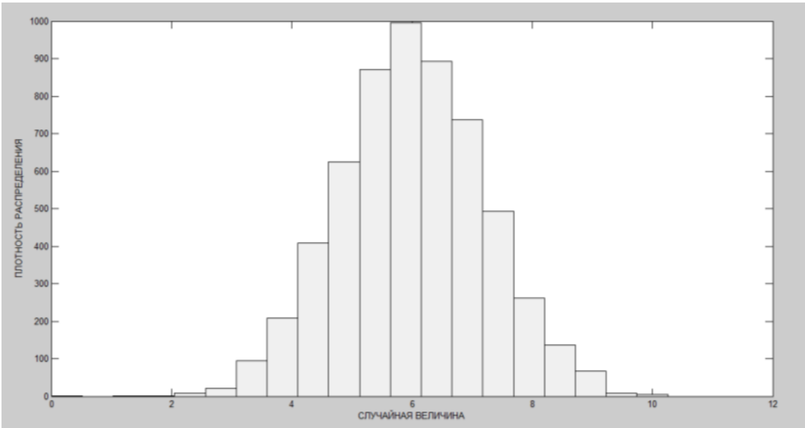

Рисунок 4 – Смещенная гистограмма 5 834 псевдослучайных чисел с нормальным распределением плотности вероятности

Нормализованное распределение имеет следующие границы усечения: $V'_{MIN} = -6{,}0$ и $V'_{MAX} = 4{,}4367$ (рисунок 5).

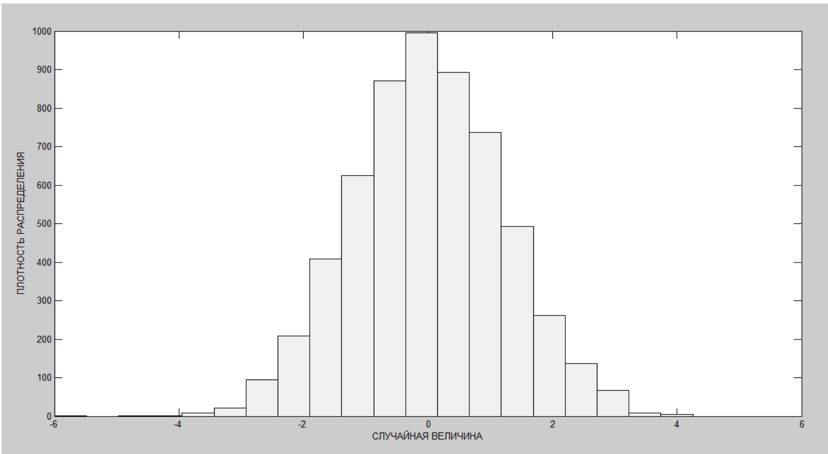

Рисунок 5 – Нормализованная гистограмма 5 834 псевдослучайных чисел с нормальным распределением плотности вероятности

Результаты, полученные для различного размера *n* групп складываемых чисел, взятых из начального массива одинакового размера *k* , сведены в таблицу.

Таблица – Параметры усечения нормализованного распределения псевдослучайных чисел

Параметр усечения	Значение границы усечения при размере *n* группы складываемых чисел			
	n=6	*n*=12	*n*=18	*n*=24
V'_{MIN}	– 4,2426	– 6,0	– 7,2910	– 7,6720
V'_{MAX}	3,8699	4,4367	4,4033	4,5971

Анализ приведенных данных показывает, что с увеличением числа *n* размах нормализованного распределения возрастает, что дает основания утверждать об улучшении получаемого нормального распределения при увеличении количества суммируемых равномерно распределенных чисел. При этом, однако, пропорционально уменьшается количество k/n нормально распределенных чисел, что может считаться недостатком данного метода с точки зрения снижения периода генерации такой псевдослучайной последовательности. Поэтому, в качестве продолжения исследований, необходимо провести сравнительную оценку других методов получения нормально распределенных чисел, например, метода Бокса-Мюллера, который, в отличие от метода суммирования, не дает усечения распределения получаемой случайной величины.

Список цитированных источников

1. Васильев, К.К. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К.К. Васильев, М.Н. Служивый. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 170 с.

2. Хазан, В.Л. Математические модели дискретных каналов связи декаметрового диапазона радиоволн: учебное пособие / В.Л. Хазан. – Омск: ОмГТУ, 1998. – 106 с.

3. Меньших, Т.Ю. Генераторы псевдослучайных чисел для криптографической защиты канала связи / Т.Ю. Меньших / Соврем. пробл. математики и выч. техники: матер. IX Республ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест,19-21 ноября 2015 г. – Брест: БрГТУ , 2015. – С.31-34.

УДК 004.4

Меньших Т.Ю.

Научный руководитель: Дереченник С.С., к.т.н., доцент

РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATLAB МЕТОДА БОКСА-МЮЛЛЕРА ПОЛУЧЕНИЯ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

В настоящее время существует несколько способов получения нормального закона распределения с помощью математического моделирования. Начиная с конца XIX века, в теории вероятностей ввели понятие центральной предельной теоремы (ЦПТ), которая посвящена установлению сумм равномерно распределенных случайных величин для реализации нормального закона распределения. Чтобы получить нормальный закон распределения чисел с помощью ЦПТ, требуется сложить случайные числа с любым законом распре-