

АНАЛИЗ КЛАССИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕЗУ ПРИ ПРОДАВЛИВАНИЯ ПЛОСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ БЕЗ ПОПЕРЕЧНОЙ АРМАТУРЫ

Молош В. В., Томашев И. Г.

1 Введение

Прежде всего хотелось бы отметить, что все существующие в настоящее время модели сопротивления являются эмпирическими. Из них можно выделить модели, построенные на базе математических функций, назовем их математическими моделями, и модели, базирующиеся на известных уравнениях и гипотезах механики твердого деформируемого тела, назовем их механическими моделями.

Большинство математических моделей не отвечает на вопрос о том, как происходит перераспределение внутренних сил в плите. Это понимание может быть получено только при использовании механической модели, учитывающей напряжения и деформации в арматуре и бетоне, а также описывающей механизм разрушения под нагрузкой узла сопряжения плиты и колонны. Все механические модели условно можно разделить на три основные группы: модели, базирующиеся на уравнениях механики твердого деформируемого тела; модели аналогий – ферменной аналогии, подкосов и затяжек; модели, построенные на теории пластичности. Такое деление условно по причине того, что многие модели могут быть отнесены одновременно к двум или ко всем трем группам.

Поскольку проблема среза при продавливании является достаточно сложной, общепринятая модель для проектирования до сих пор не разработана. В нормативных документах по-прежнему предложены математические формулы для определения перерезывающей силы, распределенной по контрольной площади, полученные на основании эмпирически данных. Создание общей механической модели является проблемой актуальной и интенсивно обсуждаемой среди исследователей.

Ниже рассмотрены лишь некоторые механические модели сопротивления срезу при продавливании, которые уже принято называть классическими. Рассмотренная модель S. Kinnunen и H. Nylander [3] явилась основой для модели так называемой «критической наклонной трещины», получившей интенсивное развитие в течение последних двадцати лет благодаря работам A. Muttoni [6] и вошедшей в *fib* Model Code 2010 [7]. Кроме этого выполнен статистический анализ значений предельных перерезывающих сил при продавливании, полученных при расчетах по приведенным моделям, а также выполнена оценка того, как учтено в моделях влияние базовых параметров на величину перерезывающих сил.

2 Механические модели.

1) Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3]

Предельная перерезывающая сила для плит без поперечного армирования вычисляется по выражениям (1) и (2) при достижении равенства $V_{u,c}$ и $V_{u,s}$, которое осуществляется изменением высоты сжатой зоны бетона k_x .

$$V_{u,c} = k\pi\eta d^2 k_x \frac{1 + \frac{2k_x}{\eta}}{1 + \frac{k_x}{\eta}} f_c \cdot f(\alpha), \quad (1)$$

где $\eta = \frac{c_2}{d}$ и $f(\alpha) = \frac{\tan \alpha (1 - \tan \alpha)}{1 + \tan^2 \alpha}$,

$$V_{u,s} = k4\pi\rho_l f_y d r_f \left[1 + \ln \left(\frac{\delta d}{2r_u} \right) \right] \frac{1 - \frac{k_x}{3}}{\delta - \eta}, \text{ [МН]}. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) и далее: $V_{u,c}$ – составляющая перерезывающей силы, воспринимаемая бетоном; $k = 1,1$ поправочный коэффициент для плит с армированием в двух направлениях и колонной квадратного сечения (для круглых плит с круглой колонной $k = 1,0$); π – математическая константа; α – угол наклона трещины среза; d – рабочая высота плиты; k_x – высоты сжатой зоны бетона; f_c – прочность бетона при осевом сжатии, в уравнение (1) подставляют в МПа; c_2 – длина стороны (диаметра) колонны; $V_{u,s}$ – составляющая перерезывающей силы, воспринимаемая продольной арматурой; ρ_l – коэффициент продольного армирования; f_y – сопротивление продольной арматуры, соответствующее пределу текучести, в МПа; r_f – радиус колонны или длина половины стороны колонны; $\delta = l_{\text{плиты}} / d$; $l_{\text{плиты}}$ – диаметр окружности, очерченной сечением с нулевым моментом; r_u – радиус, отсчитываемый от оси колонны до центра тяжести растянутой арматуры в наклонной трещине.

2) Модель J. Мое [5]

В 1961 г. J. Мое [5] предложил рассматривать одновременно две формы разрушения в предельном состоянии. Первоначально рассчитывают поперечную силу V_{flex} , соответствующую предельному сопротивлению при изгибе по нормальному сечению у колонны. Выражение для определения предельной перерезывающей силы при продавливании V_u J. Мое получил в следующем виде:

$$V_u = \frac{1,246 \cdot (1 - 0,059\eta) \cdot u_{col} d \sqrt{f_c}}{1 + \frac{0,436}{V_{flex}} u_{col} d \sqrt{f_c}}, \quad (3)$$

$$V_{flex} = C\omega(1 + 0,29\omega)d^2 f_c, \quad (4)$$

где $\omega = \rho \frac{f_y}{f_c}$, $\eta = \frac{c_2}{d}$, (5)

u_{col} – периметр колонны; C – коэффициент, который для соответствующих условий нагружения выражен отношением предельного изгибающего момента в плите к реакции в колонне V_{flex} .

3) Аналитическая модель Ph. Menetrey [4]

В общем случае считают, что разрушение происходит после достижения в наклонной трещине предельных напряжений растяжения. Предельную перерезывающую силу при этом предложено определять согласно выражению:

$$F_{pun} = F_{ct} + F_{dow} + F_{sw} + F_p, \quad (6)$$

где F_{ct} , F_{dow} , F_{sw} , F_p – вертикальные проекции равнодействующих соответственно растягивающих сил в бетоне, силы, вызванной нагельным сопротивлением продольной арматуры, силы в поперечной арматуре, силы в предварительно напряженных канатах.

$$F_{ct} = \pi(r_1 + r_2)s \cdot \sigma_v = \pi(r_1 + r_2)s \cdot f_{ct}^{2/3} \xi \eta \mu, \quad (7)$$

$$r_1 = r_f + \frac{1}{10} \frac{d}{\tan \alpha}, \quad r_2 = r_f + \frac{d}{\tan \alpha}, \quad s = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (0,9d)^2},$$

$$\xi = \begin{cases} -0,1\rho_l^2 + 0,46\rho_l + 0,35 & 0 < \rho_l < 2\% \\ 0,87 & \rho_l \geq 2\% \end{cases}, \quad [\text{МПа}^{1/3}], \quad \mu = 1,6 \cdot (1 + d / d_a)^{-1/2},$$

$$\eta = \begin{cases} 0,1(r_s / h)^2 - 0,5(r_s / h) + 1,25 & 0 < r_s / h < 2,5 \\ 0,625 & r_s / h \geq 2,5 \end{cases},$$

где f_{ct} – предел прочности бетона на осевое растяжение; s – длина наклонной трещины; r_f – радиус колонны; ξ , η , μ – безразмерные коэффициенты; ρ_l следует применять в процентах; d_a – максимальный размер заполнителя; h – толщина плиты.

$$F_{dow} = \frac{1}{2} \sum^{bars} \phi_s^2 \sqrt{f_c f_{ct} (1 - \zeta^2)} \sin \alpha, \quad (8)$$

где суммирование выполнено для всех стержней продольной арматуры, пересекающих наклонную трещину; ϕ_s – диаметр стержней продольной арматуры; $\zeta = \sigma_s / f_t$; σ_s – продольные напряжения в растянутом арматурном стержне:

$$\sigma_s = \frac{F_{pun} / \tan \alpha}{\sum^{bars} A_s}.$$

4) Модель сопротивления Т. Georgopoulos [2]

В модели, разработанной Т. Georgopoulos [2] в 1988-1989 гг., главными параметрами являются прочность бетона при растяжении f_{ctk} и механический индекс армирования ω .

Т. Georgopoulos получает уравнение (12) для вычисления предельной продавливающей силы:

$$P_u = 4,13 \cdot f_{ct} \cdot d^2 \cdot \cot \alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + 0,2 + 0,35 \cdot \cot \alpha \right) [\text{МН}], \quad (9)$$

$$\tan \alpha = \frac{0,056}{\omega} + 0,3, \quad \omega = \rho_l \cdot \frac{f_y}{f_c},$$

где $f_{ct} \approx 0,17(f_{ck,cube})^{2/3}$; $\lambda = d_{st} / d$; d_{st} – диаметр колонны; ω – механический индекс армирования.

5) Модель Z. P. Vařant и Z. Cao [1]

В 1987 г. Z. P. Vařant и Z. Cao [1] выдвинули предположение, что предельная продавливающая сила должна определяться из рассмотрения уравнений равновесия с учетом энергии разрушения, а не построением критериев прочности только для предельного состояния. В экспериментальных исследованиях Z. P. Vařant и Z. Cao установили, что наибольшее влияние на сопротивление продавливанию оказывает высота плиты.

Предельную продавливающую силу Z. P. Vařant и Z. Cao предложили определять по уравнению

$$V_u = \pi v_u b d, \quad (10)$$

где

$$v_u = C \left(1 + \frac{d}{\lambda_0 \cdot d_a} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

при

$$C = 0,155 \cdot f_c \left(1 + 0,35 \frac{d}{u_{col}} \right),$$

где $\lambda_0 = 28,5$ – эмпирический параметр, характеризующий энергию нормального отрыва материала и форму конструкции.

3 Анализ рассмотренных механических моделей

Сравнение приведенных расчетных моделей показывает, что в самых ранних моделях не учитывалось влияние на срез при продавливании предельного сопротивления бетона растяжению. Это частично учитывается только в более новых моделях. В модели S. Kinnunen и H. Nylander [3], получившей дальнейшее развитие и модификацию другими исследователями, величина предельного сопротивления на срез при продавливании в основном связана с достижением высоких напряжений в сжатой зоне бетона, а нагрузка на колонну передается наклонным сжатым подкосом. В последние двадцать лет все чаще предлагались модели, основанные на механике разрушения, что говорит о том, что исследователи понимают значение влияния на сопротивление срезу при продавливании растягивающих напряжений в бетоне и напряжений, вызванных зацеплением бетона в наклонной трещине. К таким моделям можно отнести модели Ph. Menetrey [4], T. Georgopoulos [2] и модель «критической наклонной трещины», разработанную A. Muttoni [6]. До сих пор нет единого мнения о роли прочности бетона на растяжение.

Величина перерезывающей силы, вызывающей продавливание, сильно зависит от структуры трещин и поверхности разрушения. Во многих моделях исходят из того, что наклонная трещина среза имеет достаточно гладкую поверхность, образующую пирамиду продавливания. Считают, что такая плоская гладкая трещина раскрывается почти перпендикулярно к ее поверхности и трение не играет существенной роли на сопротивление, так как скольжение по поверхности трещины отсутствует. Поэтому во многих моделях, как например S. Kinnunen и H. Nylander [3], никак не учитывается влияние зацепления поверхностей бетона в наклонной трещине. Но в этой модели авторы не учитывают факт наличия в ряде случаев более крутых наклонных трещин, которые образуются из изгибных трещин. Такие изгибные тангенциальные трещины часто игнорируются, что противоречит ряду результатов экспериментальных исследований. Тем не менее является подтвержденным факт, что крутые наклонные трещины развиваются из трещин при изгибе, образовавшихся на ранних стадиях нагружения, и, безусловно, влияют на величину напряжений вблизи вершин трещин, а также на появление более пологих наклонных трещин перед разрушением.

Проверка достоверности приведенных моделей сопротивления срезу при продавливании выполнена путем сравнения экспериментальных и расчетных значений перерезывающих сил. На основании экспериментальных данных зарубежных авторов и собственных исследований была сформирована выборка объемом 250 образцов.

В целом можно отметить, что все расчетные модели, кроме модели Z. P. Bazant и Z. Сао [1], которая дает в среднем 8 % превышения, относительно достоверно оценивают величину перерезывающих сил при продавливании (рисунок 1).

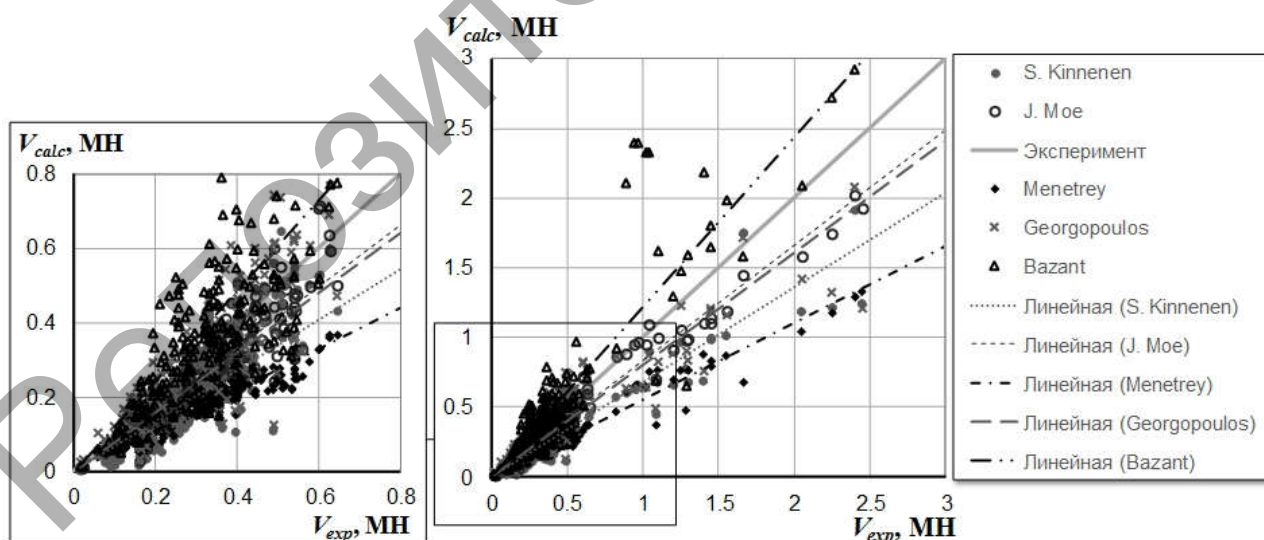


Рисунок 1 – Соотношения расчетных и экспериментальных предельных перерезывающих сил

Примерно горизонтальные линии тренда, приведенные на рисунке 4, демонстрируют, что модель Ph. Menetrey [4] наиболее точно оценивает влияние параметров ρ_l и d . Точность влияние f_{cm} с ее увеличением снижается. Из таблицы 1

видно, что эта модель приводит к одному из наименьших коэффициентов вариации $V_x = 0,196$ для значения V_{calc} / V_{exp} , наименьшему коэффициенту вариации для вектора ошибок $V_\delta = 0,198$ и одному из наибольших коэффициентов корреляции $r_{ik} = 0,973$. Указанные параметры сопоставимы со значениями, полученными для эмпирических моделей современных нормативных документов. Что может быть обосновано использованием в модели Ph. Menetrey [4] для учёта параметров ρ_l и d эмпирических зависимостей, полученных на основании аппроксимации данных базы, аналогичной той, которая была применена в данной работе. Следует также отметить, что модель Ph. Menetrey [4] является единственной моделью из рассматриваемых, которая в своей полной форме учитывает влияние поперечной арматуры и предварительного напряжения в арматуре (в рамках данной работы указанные зависимости не приведены).

Таблица 1 – Результаты статистического анализа при сравнении расчетных и экспериментальных величин продавливающих сил

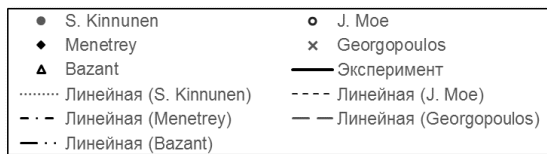
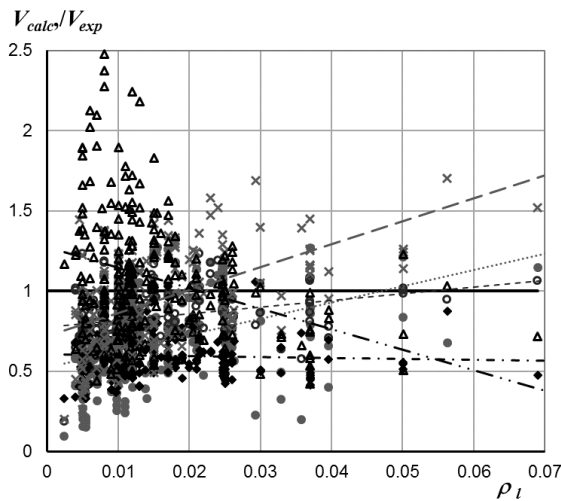
Модель	$\min\left(\frac{V_{calc}}{V_{exp}}\right)$	$\max\left(\frac{V_{calc}}{V_{exp}}\right)$	$m\left(\frac{V_{calc}}{V_{exp}}\right)$	r_{ik}	V_x	b	V_δ
2	3	4	5	6	7		8
S. Kinnunen и Н. Nylander [3]	0.096	1.329	0.678	0.922	0.343	1.368	0.429
J. Moe [5]	0.184	1.259	0.838	0.978	0.195	1.183	0.221
Ph. Menetrey [4]	0.327	1.059	0.598	0.973	0.196	1.768	0.198
T. Georgopoulos [2]	0.199	1.701	0.936	0.907	0.292	1.144	0.337
Z. P. Bažant и Z. Cao [1]	0.423	2.534	1.079	0.907	0.364	0.736	0.363

В таблице приняты следующие обозначения:

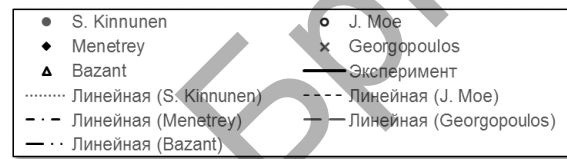
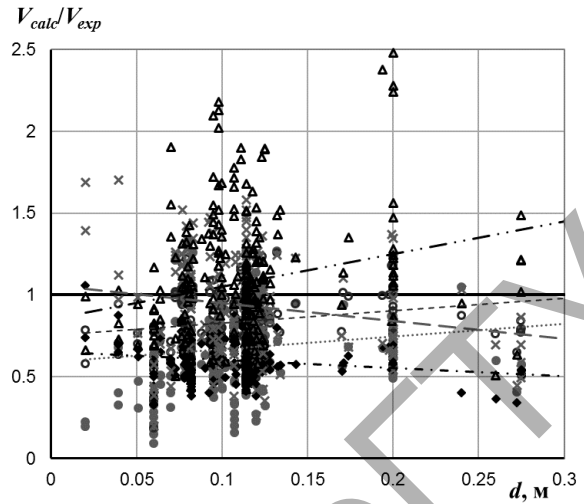
\min , \max , m – соответственно минимальное, максимальное и среднее значения;
 r_{ik} – коэффициент корреляции расчетных и экспериментальных сопротивлений продавливанию; b – поправочный коэффициент для среднего значения;
 V_δ – коэффициент вариации для вектора ошибок δ .

Модель J. Мое [5] (1961) приводит к удивительно хорошим результатам с точки зрения большинства статистических характеристик: близкое к единице значение среднего отношений V_{calc} / V_{exp} , составившее 0,838, наименьший коэффициент вариации отношений V_{calc} / V_{exp} $V_x = 0,195$ из рассматриваемых моделей и один из наименьших коэффициентов вариации для вектора ошибок $V_\delta = 0,221$, но при этом наибольший коэффициент корреляции $r_{ik} = 0,978$. Модель J. Мое [5] достаточно точно оценивает влияние f_{cm} (рисунок 2) вплоть до больших значений, свойственных высокопрочным бетонам. Влияние ρ_l и d оцениваются менее точно. Но только при $\rho_l > 0,06$ применение модели становится не безопасным. Высокая точность предсказания величины перерезывающих сил достаточно оригинальна, учитывая, что модель J. Мое [5] была получена на основании аппроксимации эмпирических данных. Ключом к этому может служить предложенная им связь между сопротивлением изгибу и срезу, а также использованный J. Мое механический индекс $\omega = \rho_l f_y / f_c$, вместо строго геометрического коэффициента ρ_l , что улучшило предсказание для высокопрочных бетонов и больших ρ_l .

a)



б)



в)

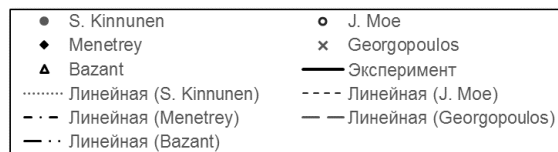
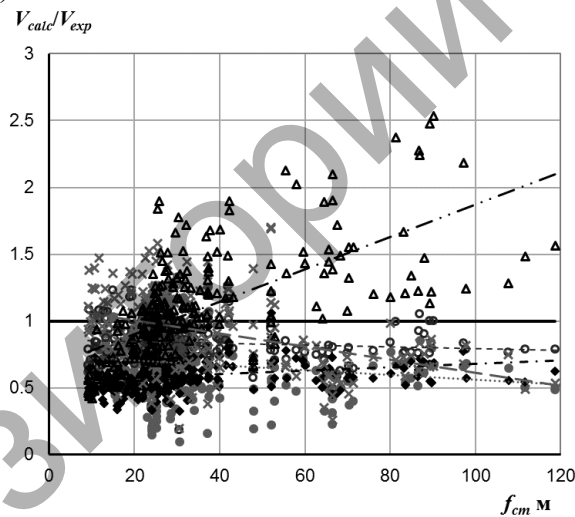


Рисунок 2 – Сравнение расчетных и экспериментальных значений перерезывающих сил в зависимости от изменения ρ_l (a), d (б) и f_{cm} (в)

Результаты, полученные по модели Т. Georgopoulos [2] (1987), показывают относительно небольшой коэффициент вариации $V_x = 0,292$, но сильно зависят от ρ_l и при $\rho_l > 0,023$ расчетные значения перерезывающих сил значительно превышают экспериментальные значения. Несмотря на относительно большой коэффициент корреляции $r_{ik} = 0,907$, коэффициент вариации вектора ошибок составляет $V_\delta = 0,337$. Влияние рабочей высоты плиты d и прочности бетона на осевое сжатие f_{cm} учтено достаточно безопасно (рисунок 2).

Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3] (1960, 1961) и модель Z. P. Vařant и Z. Cao [1] наименее адекватно оценивают величину расчетных перерезывающих сил. Коэффициенты вариации отношений V_{calc} / V_{exp} составили соответственно $V_x = 0,343$ [3] и $V_x = 0,364$ [1], а коэффициент вариации вектора ошибок – $V_\delta = 0,429$ [3] и $V_\delta = 0,363$ [1]. Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3] при увеличении коэффициента продольного армирования $\rho_l > 0,023$ приводит к небезопасному состоянию. А модель Z. P. Vařant и Z. Cao [1] в целом не безопасна и дает завышенные расчетные значения перерезывающих сил и особенно при повышении средней прочности бетона на осевое сжатие f_{cm} и рабочей высоты плиты d .

Заключение

1. К настоящему времени разработано достаточно большое количество механических моделей сопротивления срезу при продавливании, которые опираются в своей основе на принципы и правила механики твердого тела, а именно: на уравнения равновесия, уравнения физических свойств материалов, уравнения совместности деформаций, критерии разрушения. Тем не менее единой общепринятой механической модели сопротивления, адекватно отвечающей экспериментальным данным, до сих пор не разработано. В большинство нормативных документов введены сугубо математические зависимости, не имеющие в своей основе физического и механического смысла, но отвечающие большей достоверностью в предсказании расчетных величин перерезывающих сил в границах применимости в настоящее время. Все механические модели условно можно разделить на три основные группы: модели, базирующиеся на уравнениях механики твердого деформируемого тела; модели аналогий – ферменной аналогии, подкосов и затяжек; модели, построенные на теории пластичности. Такое деление условно по причине того, что многие модели могут быть отнесены одновременно к двум или ко всем трем группам.

2. По причине того, что в узле сопряжения плиты и колонны под нагрузкой создается сложное напряженно-деформированное состояние, полностью методами механики описать явление среза при продавливании до сих пор не удалось. В связи с этим практически во всех механических моделях некоторые уравнения построены на математических зависимостях, полученных аппроксимацией экспериментальных данных.

3. Из анализа рассматриваемых моделей установлено, что наиболее адекватными моделями можно считать модель J. Moe [5], разработанную еще в 1961 году и модель Ph. Menetrey, разработанную в 1996 г. Несмотря на то, что модель J. Moe [5] является в меньшей степени «механической», чем «математической», она позволяет с большой точностью определять величину перерезывающих сил в широких пределах варьирования базовых параметров ρ_l , d и f_{cm} . В модели, разработанной Ph. Menetrey, влияние базовых параметров также описано «математическими» функциями. Несколько менее точной является модель, разработанная T. Georgopoulos [2]. Расчетная модель, предложенная Z. P. Vařant и Z. Cao [1], значительно завышает величину перерезывающих сил, что приводит к большому коэффициенту вариации отношений V_{calc} / V_{exp} и коэффициенту вариации вектора ошибок V_δ . Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3] является наименее точной.

Список цитированных источников

1. Bažant, Z.P. Size effect in punching shear failure of slabs / Z.P. Bazant, Z. Cao // ACI-Struct. Journ. – 1987. – Vol. 84, Jan.-Febr. – P. 44–53.
2. Georgopoulos, T. Durchstanzlast und Durchstanzwinkel punktförmig gestützter Stahlbetonplatten ohne Schubbewehrung / T. Georgopoulos // Bauingenieur. – 1989. – № 64. – S. 187–191.
3. Kinnunen, S. Punching of concrete slabs without shear reinforcement / S. Kinnunen, H. Nylander // Transactions of the Royal Inst. of Technology. – Stockholm, 1960. – Nr. 158.
4. Menetrey, Ph. Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures / Ph. Menetrey // Dep. de Genie Civil, EPFL Lausanne, 1994. – These № 1279. – P. 179.
5. Moe, J. Shearing strength of reinforced concrete slabs and footings under concentrated loads / J. Moe // Portland Cement Association Research and Development Laboratories. 5420 Old Orchard Road. – Skokie, Illinois, 1961. – April – P. 144.
6. Muttoni, A. Behavior of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement / A. Muttoni, J. Schwartz // IABSE Colloquium. – Zurich, Switzerland, 1991. – v. 62. – P. 703–708.
7. fib Model Code for Concrete Structures 2010. – Lausanne: International Federation for Structural Concrete (fib), Switzerland, 2013. – 432 p.
8. Молош, В.В. Сопротивление срезу при продавливании самонапряженных плоских железобетонных элементов без поперечного армирования: дис. к-та тех. наук : 05.23.01 / В.В. Молош. – Брест, 2000. – 225 л.
9. Основы проектирования строительных конструкций = Основы проектирования будаўнічых канструкцый: ТКП EN 1990-2011. – Введ. 15.11.2012. – Минск : СЕН/ТС 250 «Конструкционные Еврокоды»: Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2011. – 70 с.

УДК 624.014

АНАЛИЗ ФЛАНЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Надольский В. В.

1 Введение. Расчетные модели сопротивления, регламентированные в нормативных документах, подтверждаются большим количеством экспериментов и опытом проектирования. Однако ввиду высокой стоимости испытаний все большее распространение получает наиболее универсальный метод расчета посредством КЭ-моделей. Данное направление является очень актуальным и довольно интенсивно развивается, здесь следует отметить исследования [1, 2]. Однако при всей мощности данного метода существует ряд основных вопросов, нерешенных по настоящее время и сдерживающих применение КЭ-метода. Основные проблемы связаны с созданием КЭ-модели и интерпретацией результатов, что, как правило, требует больших теоретических знаний и практического опыта построения КЭ-модели. Существенно упрощает практическую реализацию расчетов соединений посредством МКЭ программный продукт IDEA StatiCa, разработанный в Чехии при существенной поддержке научного сообщества. Данный продукт позволяет очень хорошо выполнить качественный анализ соединений.

2 Обзор расчетных моделей сопротивления фланцевых соединений. В Республике Беларусь расчеты стальных конструкций ведутся согласно требованиям СНиП II-23-81* [3] или Еврокод 3 [4], но в данных стандартах нет методик по расчету фланцевого соединения элементов из замкнутого профиля.