

Полученные результаты показывают очень высокий уровень остаточных напряжений, и это требует особо тщательной подготовки поверхности основы для обеспечения достаточно сильной адгезии покрытия во избежание его отслаивания от основы.

#### **СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Н.М. Чекан, С.Р. Онысько, В.В. Акулич, И.П. Акула, Е.В. Ладутько, Н.В. Логуновская. Упрочняющие градиентные покрытия на основе карбонитридов циркония для штамповой оснастки. / Современные методы и технологии создания и обработки материалов. Материалы IV Международной научно-технической конференции. 19-21 октября 2009г., Минск, Беларусь // Минск: ФТИ НАН Беларуси, 2009, книга 3, С. 185-190.
2. Н.М. Чекан, И.П. Акула, И.Б. Василевич, В.М. Хвисевич, С.Р. Онысько. Износостойкие нанокристаллические покрытия для штамповой оснастки. / Современные методы и технологии создания и обработки материалов. Материалы IX Международной научно-технической конференции. 16-18 сентября 2014г., Минск, Беларусь // Минск: ФТИ НАН Беларуси, 2014, т. 2, С. 6-16.
3. P.S. Prevey. X-ray Diffraction Residual Stress Techniques, Metals Handbook. 10. Metals Park: American Society for Metals, 1986, 380-392.
4. V.V. Kosukhin, V.F. Funke, V.I. Minashkin, V.S. Smirnov, Y.P. Efremov. Zirconium nitride and carbonitrides coatings obtained by the chemical vapor deposition (CVD) method / INOMAF 1987, Vol. 23, P. 52-56.

УДК 539.3

### **К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА**

*Хвисевич В.М., Гарбачевский В.В., Веремейчик А.И.*

Брестский государственный технический университет,  
Брест, Республика Беларусь

Как известно, при создании элементов механизмов, машин первостепенным требованием является снижение их материалоемкости при одновременном обеспечении прочностных и жесткостных характеристик. Для решения такой проблемы важным обстоятельством является создание эффективных методов исследования НДС (напряженно-деформированного состояния) элементов, которые в реальных условиях подвергаются воздействию механических усилий и температурных полей. Часто рассматриваемые элементы представляют собой тела вращения.

При действии на тела высоких температур изменение температуры  $T$  приводит к существенному изменению модуля Юнга  $E = E(T)$ , коэффициента линейного расширения  $\alpha = \alpha(T)$  при постоянном коэффициенте Пуассона  $\nu$  [1].

В работе [2] показано, что максимальные напряжения в нагретой толсто-стенной трубе с учетом изменения модуля Юнга от температуры на 40% меньше, чем при постоянном модуле. Поэтому постановка и реализация такого рода задач актуальна и имеет практическую ценность.

Для исследования НДС в осесимметричных телах с непрерывной неоднородностью необходимо поставить краевую задачу теории упругости (термоуп-

ругости) и разработать эффективный метод ее реализации. Аналитическое решение такого рода задач практически невозможно в связи со сложной геометрией области тел и граничных условий поэтому в настоящее время применение нашли различные численные методы. Наиболее распространенным численным методом решения краевых задач является метод конечных элементов (МКЭ). Однако он не свободен от недостатков. Для решения поставленной задачи используем метод потенциала, с помощью которого дифференциальное уравнение сводится к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода и который имеет некоторые преимущества по сравнению с МКЭ [3].

Согласно [2] краевая осесимметричная задача неоднородной термоупругости сводится к решению дифференциальных уравнений равновесия в частных производных:

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \int_0^T \alpha(T) dT \right) &= -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z} \right), \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_0^T \alpha(T) dT \right) &= -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u, w$  – перемещения,  $\rho, z, \vartheta$  – цилиндрические координаты  $e = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ,

и граничных условий

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{3\nu}{1-2\nu} e \right) n_\rho + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_z &= \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_\rho + \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{3\nu}{1-2\nu} e \right) n_z &= \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n_\rho, n_z$  – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела, а также уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial T^*}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 T^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T^*}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $T^* = \int_0^T \lambda(T) dT$ ,  $\lambda(T) = \lambda_0(1-kT)$  – коэффициент теплопроводности,  $k$  – эмпирический коэффициент.

Используя метод возмущений [2], краевая задача (1), (2) сводится к решению осесимметричной задачи стационарной термоупругости однородного тела (нулевое приближение) и последовательности краевых задач теории упругости (последующие приближения).

Представляя температуру  $T^*$  в виде функции Грина, вместо (3) получаем интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности

$$2\pi T^*(x) = \int_L \frac{dT^*}{dn_y} \rho_z dl_y \frac{4}{\sqrt{R^2}} K + \int_L T^*(y) \rho_y dl_y \frac{2}{\sqrt{R^2}} \times$$

$$\times \left\langle \left\{ \frac{2\rho_y}{r^2} [(\rho_y - \rho_x)n_{\rho_y} + Zn_{zy}] - n_{\rho_y} \right\} E + n_{\rho_y} K \right\rangle. \quad (4)$$

Здесь  $x, y$  – параметрическая и текущая точки при интегрировании,  $r^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 - 2\rho_x\rho_y \cos Q + Z^2$ ,  $Z = Z_y - Z_x$ ;  $Q = \vartheta_y - \vartheta_x$ ,  $dl_y$  – элемент дуги меридионального контура  $Z$ ;  $E, K$  – эллиптические интегралы.

Решение системы (1) разыскиваем в виде

$$u_\rho^0 = u_\rho^u + u_\rho^T, \quad u_z^0 = u_z^u + u_z^T, \quad (5)$$

где  $u_\rho^u, u_z^u$  – общие решения однородных дифференциальных уравнений (1), которые приведены в [4],  $u_\rho^T, u_z^T$  – частные решения Гудьера, интегральное представление которых приведено в [4].

С помощью соотношений Дюгамеля-Неймана были построены интегральные уравнения напряжений  $\sigma_{\rho\rho}^0, \sigma_{zz}^0, \sigma_{\rho z}^0, \sigma_{\vartheta\vartheta}^0$ , (соответствуют (5), а выражения  $\sigma_{\rho\rho}^u, \dots, \sigma_{\vartheta\vartheta}^u$ , приведены в [4]) и сингулярные интегральные уравнения (СИУ) краевой задачи термоупругости на нулевом приближении

$$v_\rho(x) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_L [v_\rho(y)(A_{\rho\rho}n_{\rho_x} + A_{\rho_z}n_{z_x}) + v_z(y)(B_{\rho z}n_{z_y})] dl_y = p_\rho(x) + p_\rho^T(x),$$

$$v_z(x) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_L [v_\rho(y)(A_{\rho z}n_{\rho_x} + A_{zz}n_{z_x}) + v_z(y)(B_{\rho z}n_{\rho_x} + B_{zz}n_{z_x})] dl_y =$$

$$= p_z(x) + p_z^T(x) \quad (6)$$

где  $v_\rho, v_z$  – плотности потенциала простого слоя,  $A_{\rho\rho}, \dots, B_{zz}$  – коэффициенты, полученные в [4],  $p_\rho(x), -p_z(x)$  – компоненты механических усилий,  $p_\rho^T(x), p_z^T(x)$  – компоненты фиктивной температурной поверхностной нагрузки.

Здесь решение задачи теории упругости разыскиваем в виде

$$p_\rho^T(x) = -(\sigma_{\rho\rho}^T \cdot n_{\rho_x} + \sigma_{\rho z}^T \cdot n_{z_x}), \quad p_z^T(x) = -(\sigma_{\rho z}^T \cdot n_{\rho_x} + \sigma_{zz}^T \cdot n_{z_x}). \quad (7)$$

В результате решения (6) определялись плотности  $v_\rho, v_z$ , а затем напряжения  $\sigma_{\rho\rho}^0, \dots, \sigma_{\vartheta\vartheta}^0$ . Значения напряжений использовались для решения краевой задачи теории упругости на первом приближении.

Здесь

$$u_\rho^{(1)} = u_\rho^u + u_\rho^N, \quad u_z^{(1)} = u_z^u + u_z^N \quad (8)$$

Интегральные представления  $u_\rho^u$  и  $u_z^u$  известны [4], а

$$u_\rho^N = -\frac{(1+\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \int_S f(T) \left[ \frac{\chi_\rho}{E(T)} C_{\rho\rho}^N + \frac{\chi_z}{E(T)} C_{\rho z}^N \right] dS_y,$$

$$u_z^N = -\frac{(1+\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \int_S f(T) \left[ \frac{\chi_\rho}{E(T)} C_{z\rho}^N + \frac{\chi_z}{E(T)} C_{zz}^N \right] dS_y, \quad (9)$$

где

$$f(T) = \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT}, \quad \chi_\rho = \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z}^0 \right), \quad \chi_z = \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho z}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz}^0 \right)$$

$C_{\rho\rho}^N, \dots, C_{\rho z}^N$  – аналогичны соотношениям в работе [4].

Система СИУ такая же как и (6), но вместо  $p_\rho^T$  и  $p_z^T$  берется фиктивная нагрузка

$$p_\rho^N = -(\sigma_{\rho\rho}^N \cdot n_{\rho x} + \sigma_{\rho z}^T \cdot n_{z x}), \quad p_z^N = -(\sigma_{\rho z}^N \cdot n_{\rho x} + \sigma_{zz}^N \cdot n_{z x}) \quad (10)$$

На основе метода механических квадратур разработан алгоритм численного решения интегральных уравнений и составлена программа для ПЭВМ. Интегралы вычислялись с помощью квадратурных формул Гаусса и Лащенко. Реализован тестовый пример. В качестве примера решена задача о нагреве полой сферы. Результаты численного решения сравнивались с решением в [2]. Ниже на рисунке показаны соответствующие графики напряжений.

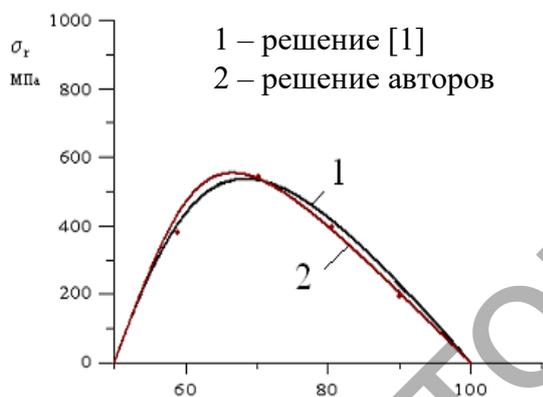


Рисунок 1 – Распределение радиальных напряжений.

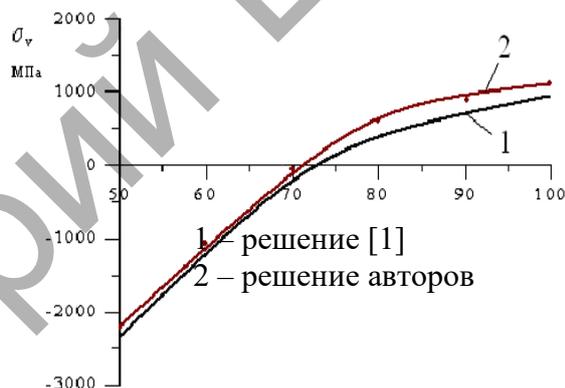


Рисунок 2 – Распределение тангенциальных напряжений.

Здесь  $T_a = 500^\circ \text{C}$ ,  $T_b = 400^\circ \text{C}$ ,  $\nu = 0,33$ ,  $a = 0,5 \text{ м}$ ,  $b = 1 \text{ м}$ .

### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Писаренко, Г.С. и др. Прочность материалов при высоких температурах / Г.С. Писаренко, В.Н. Руденко, Г.Н Третьяченко, В.Т. Трощенко. – Киев. «Наукова думка», 1966. – 795 с.
2. Ломакин, В.А. Теория упругости неоднородных тел / В.А. Ломакин. – М. Изд-во МГУ, 1976. – 368 с
3. Копейкин, Ю.Д. и др. Интегральные уравнения осесимметричной краевой задачи термоупругости. / Ю.Д. Копейкин, В.М. Хвисевич // Известия АН СССР. МТТ, 1991, – №6. – М., – с. 52-57.
4. Копейкин, Ю.Д. Прямое решение осесимметричной второй задачи теории упругости методом бигармонических потенциалов / Ю.Д. Копейкин, А.А. Калинин // Изд. АН БССР. Сер. физ. мат. наук, 1977, – №3. – с. 85-90.