

The 2D disordered dispersed structures synthesis algorithm was developed and tested on model samples, based on the filling method. Density coefficient is about 0.80 for received models of random packs of mono- and polysized particles in a disc approach. Synthesized structures models are compactly presented for further topological study in terms of stochastic connectivity matrixes. Results are applicable for disperse systems and composite materials simulation modeling, purposed to structural and topological properties study, including distinctive features in the non-homogeneous porous mediums.

УДК 539.3

Босяков С.М.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ФРОНТОВ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕУПРУГИХ СРЕДАХ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

Введение. Анализ закономерностей распространения одномерных и двумерных волновых движений в неупругих материалах, работающих при динамических нагрузках за пределами упругих состояний, рассматривались в работах [1, 2]. В настоящей работе представлены результаты исследования трехмерных волновых движений, распространяющихся от сосредоточенного источника возмущений для сред, описываемых определяющими соотношениями в форме произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций. В качестве конкретных примеров таких зависимостей рассматриваются неупругие материалы с малыми упругопластическими деформациями и среды, обладающими внутренним трением.

Координаты точек волновых фронтов. Определяющие соотношения для неупругих сред имеют форму произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций:

$$T = T(\Gamma, \theta), \sigma = \sigma(\Gamma, \theta),$$

где T - интенсивность касательных напряжений (второй инвариант девиатора напряжений), σ - среднее напряжение (первый инвариант тензора напряжений), Γ - интенсивность деформаций сдвига (второй инвариант девиатора деформаций), θ - объемная деформация (первый инвариант тензора деформаций).

Динамические уравнения равновесия в отсутствие массовых сил представим в виде [2]:

$$\sum_{j=1}^3 \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{T}{3\Gamma} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{2e_{ij}}{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{2}{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial \Gamma} - \frac{T}{\Gamma} \right) \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 e_{km} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial x_j} \right) + \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \sum_{m=1}^3 e_{jm} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_m \partial x_j} + \frac{T}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, i = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

Начальные данные к системе (1) зададим на поверхности $z(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ и перейдем к новым переменным $g = z(x_1, x_2, x_3, t)$, $g_i = z_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = \overline{1, 3}$. После преобразования системы (1), приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при частных производных второго порядка по g , получим следующее характеристическое уравнение:

Босяков Сергей Михайлович, доцент каф. теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. Беларусь, БГУ, 220050 Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4.

$$\frac{q_0 p_0^6}{c_2^6} + \frac{q_1 p_0^4}{c_2^4} + \frac{q_2 p_0^2}{c_2^2} + q_3 = 0. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты q_k имеют вид:

$$q_0 = -1, q_1 = \frac{1}{\Gamma} \sum_{k=1}^3 p_k^2 (2T + c_{kk}\Gamma),$$

$$q_2 = -\frac{1}{\Gamma^2} \left(\sum_{k \neq l \neq m=1}^3 (T p_k^4 (T + 2\Gamma c_{kk}) + p_l^2 p_m^2 (3T^2 + \Gamma T (c_{ll} + c_{mm}) - \Gamma^2 (c_{lm} c_{ml} - c_{ll} c_{mm}))) \right),$$

$$q_3 = \left(\frac{T}{\Gamma} \right)^3 (p_1^2 + p_2^2)(p_1^2 + p_3^2)(p_2^2 + p_3^2) + p_1^2 p_2^2 p_3^2 (c_{12} c_{23} c_{31} + c_{13} c_{32} c_{21} + c_{11} c_{22} c_{33}) + \frac{T}{\Gamma} \sum_{k \neq l \neq m=1}^3 \left(\frac{T}{\Gamma} c_{kk} p_k^2 (p_k^2 + p_l^2)(p_k^2 + p_m^2) + (c_{kk} p_k^4 (c_{ll} p_l^2 + c_{mm} p_m^2) - c_{lm} c_{ml} p_l^2 p_m^2 (p_l^2 + p_m^2)) - p_1^2 p_2^2 p_3^2 c_{kk} c_{lm} c_{ml} \right),$$

где $p_k = \partial z / \partial x_k$, $p_0 = \partial z / \partial t$, $c_2 = \sqrt{G_0 / \rho}$, G_0 - начальный модуль сдвига. Отметим, что характеристическое уравнение (2) получено в предположении, что система координат (x_1, x_2, x_3) совпадает с направлениями главных осей деформаций (напряжений) и в этом случае $e_{ij} = 0$, $i \neq j = \overline{1, 3}$.

Рассмотрим уравнение характеристик (2) как алгебраическое уравнение третьего порядка относительно p_0^2 и представим его решение в виде:

$$p_0^{(n)} = c_2 \sqrt{2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{\Lambda + 2\pi(4-n)}{3} \right) - \frac{q_1}{3q_0}}, \quad (3)$$

$$\Lambda = \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p} \right)^3} \right),$$

где $p = -\frac{q_1^2}{3q_0^2} + \frac{q_2}{q_0}$; $q = \frac{2q_3^3}{27q_0^3} - \frac{q_1q_2}{3q_0^2} + \frac{q_3}{q_0}$, $n = \overline{1, 3}$.

Верхний индекс n указывает на тип волн деформации: $n = 1$ - квазипродольная волна, $n = 2, 3$ - квазипоперечные волны.

Для построения поверхности разрыва (фронта) волны на основании решения одного из дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (3) построим систему бихарактеристик, определяемую как решения следующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{dx_s^{(n)}}{dt} = \frac{\partial p_0^{(n)}}{\partial p_s}, \quad n, s = \overline{1, 3}. \quad (4)$$

После решения дифференциальных уравнений (4), в предположении, что волновое возмущение возникло в момент времени $t = 0$ в начале координат, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{x_s^{(n)}}{c_2 t} = & \frac{1}{v_n} \left(\frac{1}{2\sqrt{-3\bar{p}}} \left(\frac{2\bar{q}_1 q_{1s}}{3q_0^2} - \frac{q_{2s}}{q_0} \right) \cos \left(\frac{\bar{\Lambda} + 2\pi(4-n)}{3} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\bar{p}}{-3}} \sin \left(\frac{\bar{\Lambda} + 2\pi(4-n)}{3} \right) \sqrt{\frac{\bar{p}^3}{4\bar{p}^3 + 27\bar{q}^2}} \times \right. \\ & \times \left(\left(\frac{2\bar{q}_1^2 q_{1s}}{9q_0^3} - \frac{\bar{q}_2 q_{1s} + \bar{q}_1 q_{2s}}{3q_0^2} + \frac{q_{3s}}{q_0} \right) \sqrt{\left(\frac{-3}{\bar{p}} \right)^3} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{9\bar{q}\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(\frac{-1}{\bar{p}} \right)^5 \left(\frac{2\bar{q}_1 q_{1s}}{3q_0^2} - \frac{q_{2s}}{q_0} \right)} \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь коэффициенты q_{1i} , q_{2i} и q_{3i} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} q_{1i} = & \frac{2}{\Gamma} (2T + c_{ij}\Gamma) n_i, \\ q_{2i} = & 2n_i \left(n_i^2 (c_{ij}c_{ji} - c_{ij}c_{jj}) + \right. \\ & \left. + n_m^2 (c_{im}c_{mi} - c_{ij}c_{mm}) - \right. \\ & \left. - \frac{T}{\Gamma} (4c_{ij}n_i^2 + n_i^2 (c_{ij} + c_{jj})) + \right. \\ & \left. + n_m^2 (c_{ij} + c_{mm}) - \left(\frac{T}{\Gamma} \right)^2 (3 - n_i^2) \right), \\ q_{3i} = & 2n_i \left(\frac{T}{\Gamma} \left(\left(\frac{T}{\Gamma} \right)^2 (1 - n_i^2) (1 + n_i^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{T}{\Gamma} \left(2n_i^2 c_{ij} + \sum_{k=1}^3 c_{kk} n_k^4 + n_i^2 n_m^2 \sum_{k=1}^3 c_{kk} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + n_i^2 (2n_i^2 + n_i^2) (c_{ij}c_{jj} - c_{ij}c_{ji}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + n_m^2 (2n_i^2 + n_m^2) (c_{ij}c_{mm} - c_{im}c_{mi}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + n_i^2 n_m^2 (c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + \right. \right. \\ & \left. \left. + c_{13}c_{21}c_{32} - \sum_{k \neq l \neq m=1}^3 c_{kk} c_{lm} c_{ml} \right) \right), \end{aligned}$$

$$i \neq l \neq m = \overline{1, 3}.$$

Выражения v_n для фазовых скоростей волн получаем из соотношений для $p_0^{(n)}$ заменой Λ , p и q_1 на $\bar{\Lambda}$, \bar{p} и \bar{q}_1 ; выражения для \bar{p} и \bar{q} - из соотношений для p , q заменой q_i на \bar{q}_i ; выражение для $\bar{\Lambda}$ - из формулы для Λ заменой p , q на \bar{p} и \bar{q} ; выражения для \bar{q}_i - из соотношений для q_i заменой параметров p_k на направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности $n_k = \cos \alpha_k$ (α_k - угол между нормалью к фронту волны и координатной осью x_k). Далее выполним построение волновых поверхностей для неупругих материалов, описываемых теорией малых упругопластических деформаций (пластичные металлы) и для сред, обладающих внутренним трением (грунты).

Пластичные металлы. Интенсивность касательных напряжений и среднее напряжение в соответствии с теорией малых упругопластических деформаций имеют вид [2]:

$$T = \Gamma G(\Gamma), \quad \sigma = K\theta, \quad (6)$$

где $G(\Gamma)$ - секущий модуль диаграммы зависимости T от Γ , K - модуль объемной деформации. С учетом соотношений (6) для коэффициентов c_{ij} в формулах (5) получаем следующие выражения [2]:

$$c_{ij} = K + \frac{G}{3} (1 + \delta_{ij}) + \frac{4}{\Gamma} \frac{dG}{d\Gamma} e_{ii} e_{jj}.$$

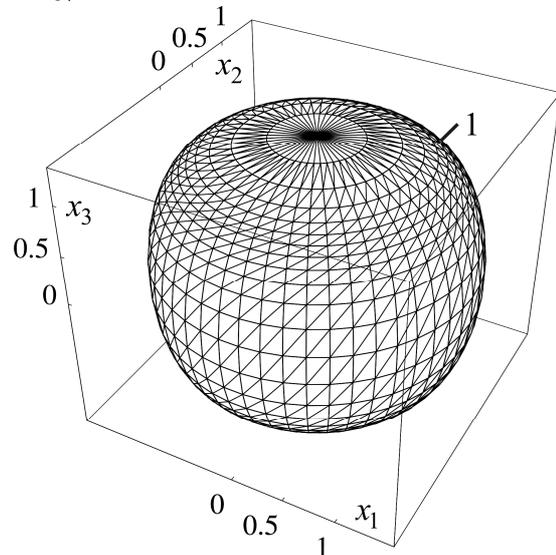
Следуя [2], зависимость между T и Γ примем в форме

$$T = G_0 \Gamma (1 - r), \quad G = G_0 (1 - r). \quad (7)$$

Здесь $r = \Gamma / (2\Gamma_s)$, Γ_s - предельное значение интенсивности деформаций сдвига, соответствующее точке диаграммы, в которой $dT/d\Gamma = 0$. Здесь и далее $\varepsilon_i = \theta/3 + e_{ii}$ и

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \left((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right)} \quad [4].$$

Учтем выражения (7) в формулах для коэффициентов q_{ik} , и выполним построение безразмерных трехмерных фронтов квазипродольной и квазипоперечной волн деформаций. Волновые поверхности для случая равномерной двухосной деформации ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = 0$) представлены на рис. 1. При построении принимаем $r = 2$ и $K = 5G_0/3$.



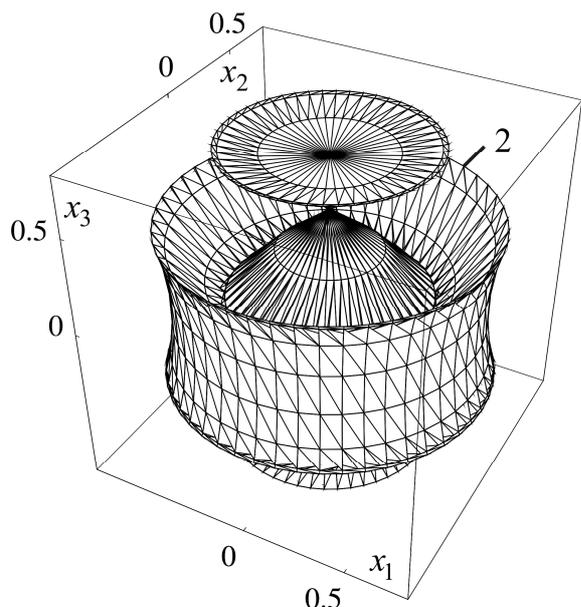


Рис. 1. Фронты волн деформаций, распространяющихся в условиях равномерной двухосной деформации, в материале, описываемом теорией малых упругопластических деформаций, со скоростями v_1 (1) и v_3 (2)

Из рис. 1 видно, что распространение квазипоперечной волны деформации со скоростью v_3 сопровождается образованием двух лагун в виде конусов, осью которых является координатная ось Ox_3 , а также лагуны в виде кольца, центр которого также находится на оси Ox_3 . Волновые поверхности при одноосной деформации ($\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) и при том же значении r можно получить, повернув фигуры, представленных на рис. 1, на угол 90° относительно координатной оси Ox_2 . Для чистого сдвига ($\epsilon_1 = -\epsilon_2, \epsilon_3 = 0$) трехмерные фронты квазипродольной и квазипоперечной волн соответственно, представлены на рис. 2. При построении принимаем $r = 3/2$.

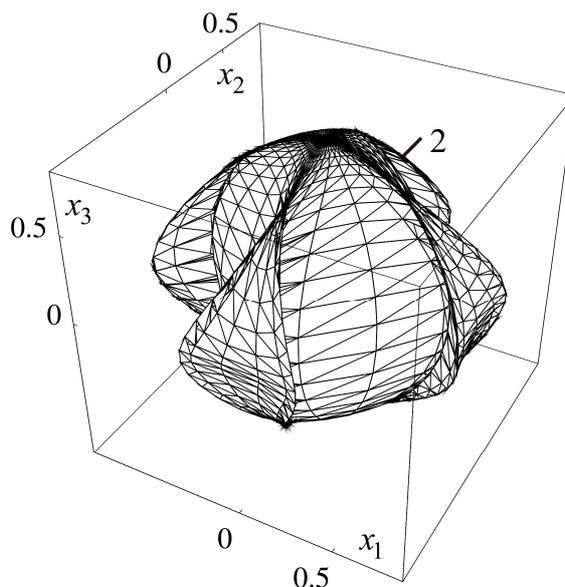
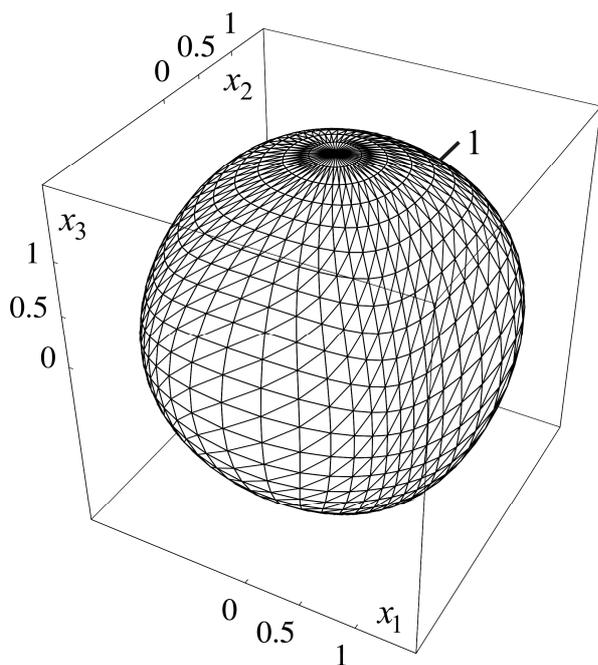


Рис. 2. Фронты волн деформаций, распространяющихся в условиях чистого сдвига, в материале, описываемом теорией малых упругопластических деформаций, со скоростями v_1 (1) и v_3 (2)

Из рис. 2 видно, что при распространении квазипоперечной волны со скоростью v_3 возникают четыре лагуны в виде полос, вытянутых вдоль оси координат Ox_3 . При уменьшении значения r трехмерные фронты волн деформаций, распространяющиеся от точечного источника в материале с малыми упругопластическими деформациями, в рассмотренных случаях двухосной, одноосной деформации и чистого сдвига принимают вид сфер. Трехмерный фронт квазипоперечной волны, распространяющейся со скоростью v_3 , является сферой независимо от значения r .

Среды с внутренним трением. Для сред, обладающих внутренним трением, используем модель сжимаемой жесткоупругопластической среды, определяющие соотношения которой имеют следующий вид [2]:

$$T = G_0 \Gamma - fK\theta, \quad \sigma = K\theta, \quad (8)$$

где G_0 - модуль сдвига при чистом сдвиге ($\sigma = 0$), K - модуль объемной деформации, $f < 1$ - коэффициент внутреннего трения. Выражения для коэффициентов c_{ij} из формул (5) с учетом соотношений (8) принимают следующий вид [2]:

$$c_{ij} = K + \frac{1}{3}(1 + \delta_{ij}) \left(G_0 - fK \frac{\theta}{\Gamma} \right) - \frac{2}{\Gamma} fK \left(1 - \frac{2\theta}{\Gamma^2} e_{jj} \right) e_{ij}.$$

Подставим соотношения (8) в коэффициенты q_{jk} и выполним построение волновых поверхностей для сред, обладающих внутренним трением. На рис. 3 и 4 представлены безразмерные трехмерные фронты волн деформаций, распространяющиеся в условиях равномерного двухосного укорочения ($\epsilon_1 = \epsilon_2 < 0, \epsilon_3 = 0$) и в условиях одноосного укорочения ($\epsilon_1 < 0, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) соответственно. При построении принимаем модуль объемной деформации $K = (2G_0)/\sqrt{3}$. Коэффициент внутреннего трения в первом случае $f = 1/2$, во втором случае - $f = 3/4$.

Из рис. 3 видно, что при распространении квазипоперечной волны, имеющей скорость v_3 , возникает две конические лагуны, а также кольцевая лагуны, осью которых является координатная ось

x_3 . При увеличении коэффициента внутреннего трения основание конических лакун уменьшается, а ширина кольцевой лакуны возрастает. Также следует отметить, что представленные на рис. 3 фигуры, являются поверхностями вращения, что позволяет предполагать о существовании аналогии между средами, обладающими внутренним трением и трансверсально-изотропными (гексагонально анизотропными) средами.

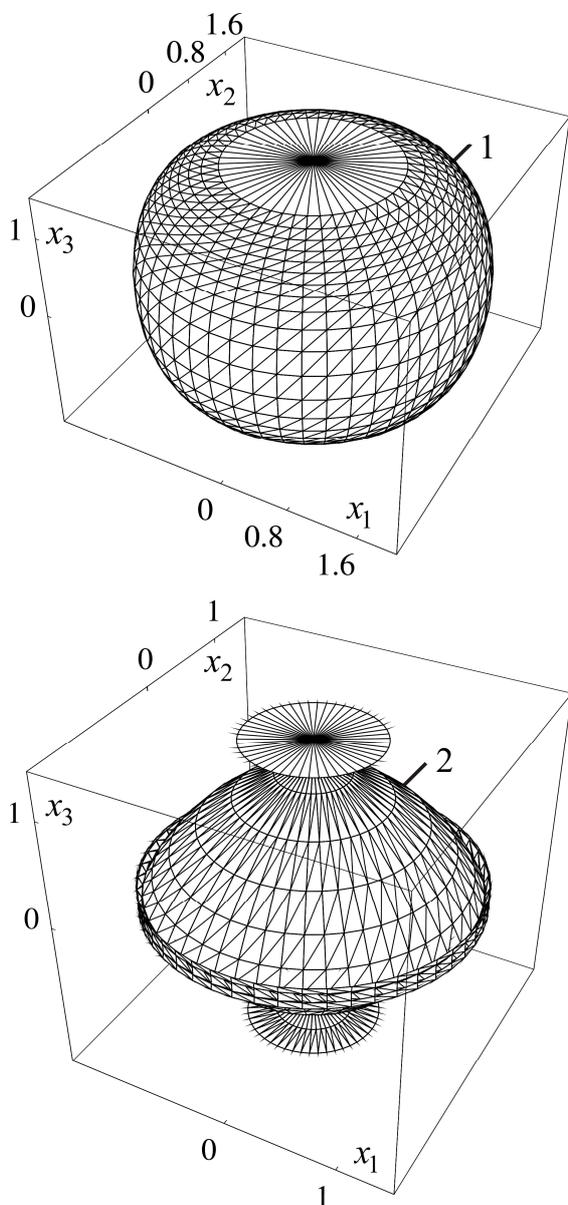


Рис. 3. Фронты волн деформаций, распространяющихся в условиях равномерной двухосной деформации, в материале, обладающем внутренним трением, со скоростями v_1 (1) и v_3 (2)

Как следует из рис. 4, в условиях одноосной деформации распространение квазипоперечной волны, имеющей скорость v_3 , происходит с возникновением кольцевой лакуны. При возрастании коэффициента внутреннего трения f ширина лакун возрастает. Отметим, что в случае одноосной и двухосной деформации, фронт квазипоперечной волны, имеющей скорость v_2 , является сферой. При уменьшении f фронты двух других волн также принимают вид сфер.

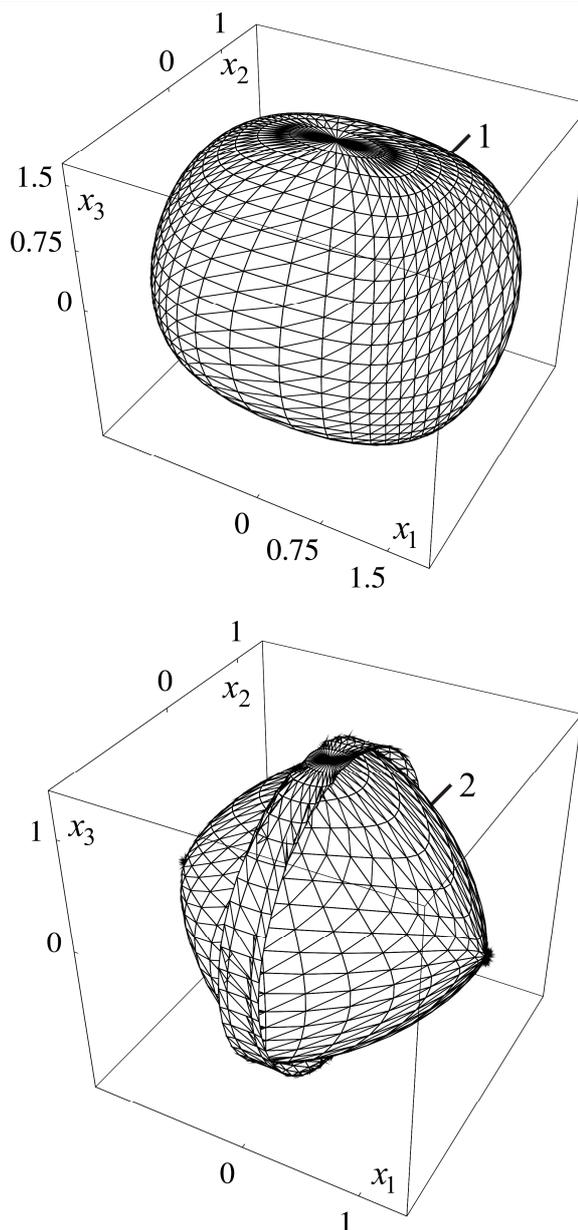


Рис. 4. Фронты волн деформаций, распространяющихся в условиях одноосной деформации, в материале, обладающем внутренним трением, со скоростями v_1 (1) и v_3 (2)

В условиях чистого сдвига ($\epsilon_1 = -\epsilon_2$, $\epsilon_1 < 0$, $\epsilon_3 = 0$) фронты квазипродольной и квазипоперечной волн деформаций являются эллипсоидом и сферой соответственно и описываются следующими уравнениями (t - время, в течение которого распространяется волновое возмущение):

$$\frac{x_1^2}{K(1+f) + 4G_0} + \frac{x_2^2}{K(1-f) + 4G_0} + \frac{x_3^2}{3K + 4G_0} = \frac{(c_2 t)^2}{3G_0},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (c_2 t)^2.$$

Заключение. Результаты, полученные для моделей материалов с малыми упругопластическими деформациями и сжимаемых жесткоупругопластических сред, обладающих внутренним трением, могут быть использованы при решении пространственных и плоских динамических задач, описанных в [2]. Также добавим, что аналогичным

образом может быть выполнен анализ поверхностей обратных скоростей и волновых поверхностей для сред, описываемых деформационной теорией пластичности бетона, для идеальных жесткопластических сжимаемых и несжимаемых материалов и других сред, описываемых физическими соотношениями в форме произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Рахматуллин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. - М.: Физматгиз, 1961. - 398 с.
2. Гениев Г.А., Лейтес В.А. Вопросы механики неупругих тел. - М.: Стройиздат, 1981. - 160 с.
3. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. - Ленинград: Наука, 1980. - 284 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. - М.: Наука, 1969. - 420 с.

Материал поступил в редакцию 24.10.2008

BOSIAKOV S.M. The modeling of three-dimension wave fronts of deformations, propagating in nonelastic environments from dot source of disturbances

Expressions for point's coordinates of nonelastic environment, which defined geometric forms of deformation's wave fronts, propagating from dot non-stationary source of disturbances, are obtained. Examples of construction of three-dimensional wave fronts for the environments described by the theory small elastoplastic of deformations (plastic metals) and for the environments possessing internal friction (soils) are given.

УДК 551.492

Волчек А.А., Гладкий И.И., Махнист Л.П., Парфомук С.И.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть \bar{V} – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t . Тогда, полагая $X_t = (V_t - \bar{V})/\bar{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна-Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

где $X_t = (V_t - \bar{V})/\bar{V}$, $\sigma = C_V \sqrt{2k}$, σ – интенсивность «белого шума», C_V – коэффициент изменчивости речного стока, W_t – стандартный винеровский процесс, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Заметим, что уравнению (1) соответствует уравнение Фоккера-Планка, т.е. прямого уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} (x p) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид e^{-kt} , а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен y , а x^* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x^*, \infty)$ при условии, что $y \in [x^*, \infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ (1), однородны по времени, то для двумерной плотности вероятности справедливо соотношение $p(x, t/y, 0) = p(x, 0/y, t)$.

Обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t/y, 0) = -ky \frac{\partial}{\partial y} p(x, t/y, 0) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 p(x, t/y, 0)}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x^*, \infty)$. Тогда

$$prob(T \geq t) = G(y, t), \quad G(y, t) = \int_{x^*}^{\infty} p(x, t/y, 0) dx.$$

Интегрируя (2) по x на интервале от x^* до ∞ , получаем

$$\frac{\partial G(y, t)}{\partial t} = -ky \frac{\partial G(y, t)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 G(y, t)}{\partial y^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $y = x^*$, получим следующие начальные условия:

$$G(y, t)|_{y=x^*} = 0, \quad \frac{\partial G(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\infty} = 0.$$

Так как функция $1 - G(y, t)$ является распределением случайной величины T , то среднее время достижения границы x^* и его дисперсия определяются соотношениями

$$T_1 = - \int_0^{\infty} t \frac{\partial G(y, t)}{\partial t} dt = \int_0^{\infty} G(y, t) dt,$$

$$T_2 = - \int_0^{\infty} t^2 \frac{\partial G(y, t)}{\partial t} dt = 2 \int_0^{\infty} t G(y, t) dt.$$

Волчек Александр Александрович, д.г.н., профессор кафедры сельскохозяйственных и гидротехнических мелиораций Брестского государственного технического университета.

Гладкий Иван Иванович, старший преподаватель кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.

Махнист Леонид Петрович, к.т.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.

Парфомук Сергей Иванович, к.т.н., доцент кафедры информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.