УДК 519.62

Силушик А.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ВОСЬМИ ТЕЛ С НЕПОЛНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Аналитические и качественные исследования ньютоновой проблемы *n* тел, выполненные выдающимися математиками, хотя и дали ответ на многие вопросы, связанные с этой проблемой, она по-прежнему весьма актуальна. В последнее время объединение достижений КАМ-теории и методов компьютерной алгебры дали возможность продвинуть исследования этой проблемы, в принципе, для произвольного n. Некоторые результаты по устойчивости стационарных решений, изложенные в монографии [1], будут использованы в данной работе для нахождения тех зависимостей между динамическими и геометрическими параметрами модели, которые гарантируют устойчивость по Ляпунову или неустойчивость стационарных решений дифференциальных уравнений, описывающих динамику в ограниченной модели восьми тел.

Рассмотрим ограниченную задачу 8-и тел с неполной симметрией [2]. Пусть во вращающейся системе координат P_0xy в одной плоскости расположены шесть тел таким образом, что точки $P_i\ (i=1,2,3),$ каждая массой m_1, находятся на орбите радиусом r_1 и образуют равносторонний треугольник, а точки $P_j\ (j=4,5,6),$ каждая массой $m_2,$ находятся на орбите радиусом r_2 и также образуют равносторонний треугольник, причем $r_1 \neq r_2$. В центре этой конфигурации находится седьмое тело P_0 с массой $m_0 = 1$. Как показали Д. Банг и Б. Эльмабсут [3], соответствующая ньютонова проблема семи тел имеет точное частное решение, изображаемое вращающимися равносторонними треугольниками.

Вращение системы координат P_0xy относительно некоторой неподвижной системы координат происходит с угловой скоростью одинаковой для всех тел (аналитическое выражение для нее приведено ниже), поэтому в ней конфигурация модели неподвижна. В поле тяготения тел P_0, P_1, $P_2,\ldots, P_6$ движется точка P с пассивно гравитирующей массой и, следовательно, мы имеем „ограниченную задачу 8-и тел с неполной симметрией”. В работе [2] доказано, что в рассматриваемой ограниченной задаче 8-и тел существуют стационарные решения, а в работе [4,5] вычислены интервалы изменения параметров m_1, m_2 и r_2, описывающих задачу 8-и тел, для которых стационарные решения $S_1,\ldots, S_6$ линейно устойчивы.

В данной статье мы рассматриваем проблему устойчивости для частотного резонанса четвертого порядка $\sigma_1 = 3\sigma_2.$ Гамильтонова система 4-го порядка в четырехмерном фазовом пространстве канонически сопряженных координат (X,Y) и импульсов (P_X,P_Y) с началом в любой, но линейно устойчивой точке равновесия с координатами $x^*, y^*, p_{x^*}, p_{y^*}$,

$(X = x - x^*, Y = y - y^*,$

$P_X = p_x - p_{x^*}, P_Y = p_y - p_{y^*})$, имеет вид [1,6]:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{\partial H^*}{\partial P_X}, & \dfrac{dP_X}{dt} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial X}, \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{\partial H^*}{\partial P_Y}, & \dfrac{dP_Y}{dt} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial Y}, \end{cases} \tag{1}$$

где гамильтониан H^* выражается формулой приведенной в [1,4].

Выражение для угловой скорости ω_6, является частным случаем общего выражения, полученного в статье [3], и для нашей модели имеет вид:

$$\omega_6^2 = m_2\left(\frac{1+r_2}{\left(r_2^{\ 2}+2r_2+1\right)^{3/2}} + \frac{2-r_2}{\left(r_2^{\ 2}-r_2+1\right)^{3/2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}m_1 + m_0. \tag{2}$$

Используя CCB „Mathematica”, в работе [6] определены для ограниченной задачи 8-и тел два частотных резонанса $\sigma_1 = 2\sigma_2$ и $\sigma_1 = 3\sigma_2,$ описанные в общем случае А.П.Маркеевым [7]. Для удобства дальнейших вычислений мы рассматриваем конкретный случай,

$$r_2 = 0{,}9995, \quad m_2^* = 0{,}002330702114\ldots \tag{3}$$

и, используя связь между m_1^* и m_2^* [10], находим $m_1^* = 0{,}000100171449\ldots$ Тогда для значений m_1^*, m_2^*, r_2 и фазовых координат точки равновесия S_1 [4]

$$x^* = -0{,}677661093593\ldots, \quad y^* = 0{,}735527248473\ldots, \quad p_{x^*} = p_{y^*} = 0, \tag{4}$$

находим собственные значения матрицы линейного приближения

$$\lambda_{1,2} = \pm 0{,}94425i, \lambda_{3,4} = \pm 0{,}31475i,$$

или собственные частоты

$$\sigma_1 = |\lambda_{1,2}| = 0{,}94425\ldots, \text{ и } \sigma_2 = |\lambda_{3,4}| = 0{,}31475\ldots. \tag{5}$$

Легко видеть, что эти конкретные значения удовлетворяют резонансному соотношению 4-го порядка $\sigma_1 = 3\sigma_2$.

Для решения нашей задачи сначала построим для гамильтониана H^* в окрестности точки $(0,0,0,0)$, которая является решением системы (1), необходимое степенное разложение:

$$H^*(X,Y,P_X,P_Y) = H_2^*(X,Y,P_X,P_Y) + H_3^*(X,Y) + H_4^*(X,Y) + \ldots, \tag{6}$$

где

$$H_2^* = \frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2) + \omega_6(Y P_X - X P_Y) - 0{,}193273X^2 + 1{,}476119XY - 0{,}314355Y^2, \tag{7}$$

Силушик Агнешка*, ассистент каф. математического анализа Академии Подлясской, Республика Польша.*

$$H_3^* = 0,230742X^3 + 1,341804X^2Y - \\ -1,757973XY^2 - 0,089694Y^3, \tag{8}$$

$$H_4^* = 0,465501X^4 - 0,077875X^3Y - 4,090558X^2Y^2 + \\ +1,086856XY^3 + 0,448033Y^4. \tag{9}$$

Далее при помощи преобразования $\left[X, Y, P_X, P_Y\right]^T = B_4 \cdot [q_1, q_2, p_1, p_2]^T$, подробно описанного в [1,7], можно привести квадратичную форму H_2^* к каноническому виду по Биркгофу [7]:

$$H_2^* \equiv K_2^* = \frac{1}{2}(p_1^2 + \sigma_1^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + \sigma_2^2 q_2^2). \tag{10}$$

Для m_1^*, m_2^*, r_2 и координат (4) точки S_1 с собственными значениями (5) матрица B_4 имеет вид

$$B_4 = \begin{pmatrix} -0,837727 & -1,414382 & 1,668437 & -1,360223 \\ -1,670916 & -1,362244 & 0,311046 & 0,476738 \\ 0,185785 & 1,229511 & -1,149236 & 0,936935 \\ -1,116308 & -1,369253 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Реализуя далее преобразование Биркгофа, мы получили новые формы K_2^*, K_3^*, K_4^* [7] гамильтониана, которые, после преобразований над функциями (7)-(9), принимают следующий вид:

$$K_2^* = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + 0,445811q_1^2 - 0,049535q_2^2, \tag{12}$$

$$K_3^* = 1,947p_1^3 + 1,13661p_2^3 + 2,82107q_1^3 - \\ -3,38569p_1^2\,p_2 - 5,78728q_1\,p_1^2 - \\ -7,0218q_2\,p_1^2 - 7,1361q_1\,p_2^2 - \\ -5,18953q_2\,p_2^2 + 7,38688q_1^2\,q_2 + 4,90976q_1\,q_2^2 + \\ +0,531387q_2^3 - 1,34967q_1^2\,p_2 - 9,08028q_1\,q_2\,p_2 - \\ -6,66729q_2^2\,p_2 + 0,0291424p_1\,p_2^2 - 2,58271q_1^2\,p_1 + \\ +1,85101q_1\,q_2\,p_1 + 4,06682q_2^2\,p_1 + 14,7289q_1\,p_1\,p_2 + \\ +13,9566q_2\,p_1\,p_2, \tag{13}$$

$$K_4^* = 2,45171p_1^4 - 0,170206p_2^4 - 0,122127q_1^4 - \\ -8,19379q_2^4 - 13,0089p_1^3\,p_2 + 5,47479q_1\,p_1^3 - \\ -0,7717998q_2\,p_1^3 - 10,0849q_1^3\,q_2 - \\ -29,4146q_1^2\,q_2^2 - 27,5578q_1\,q_2^3 + 14,971q_1\,p_2^3 + \\ +13,8476q_2\,p_2^3 - 6,96321q_1^2\,p_2^2 + \\ +7,36993q_1\,q_2\,p_2^2 + 12,9848q_2^2\,p_2^2 - 21,0406q_1^3\,p_2 - \\ -66,0671q_1^2\,q_2\,p_2 - 59,1128q_1\,q_2^2\,p_2 - 14,6764q_2^3\,p_2 + \\ +17,0078p_1^2\,p_2^2 - 33,6024q_1^2\,p_1^2 - 56,6827q_1\,q_2\,p_1^2 - \\ -19,9947q_2^2\,p_1^2 + 15,0361q_1\,p_1^2\,p_2 + 29,7775q_2\,p_1^2\,p_2 - \\ -6,18278p_1\,p_2^3 + 20,1221q_1^3\,p_1 - 36,1265q_1\,p_1\,p_2^2 - \\ -42,6499q_2\,p_1\,p_2^2 + 76,2793q_1^2\,q_2\,p_1 + 82,732q_1\,q_2^2\,p_1 + \\ +26,4464q_2^3\,p_1 + 41,9541q_1^2\,p_1\,p_2 + 46,3119q_1\,q_2\,p_1\,p_2 + \\ +2,39401q_2^2\,p_1\,p_2, \tag{14}$$

Далее, для выполнения следующего преобразования Биркгофа необходимо сделать каноническую замену переменных $(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (u_1, u_2, v_1, v_2)$, согласно которой мы получим новый гамильтониан в виде [7]

$$F^* = F_2^* + F_3^* + F_4^* + \ldots \tag{15}$$

где, после необходимых вычислений, получаем выражения:

$$F^* = 0,94425\,i\,u_1\,v_1 + 0,31475\,i\,u_2\,v_2 + \\ +(0,997642 - 0,509745\,i)u_1^3 + \\ +(0,15281 - 2,25315\,i)u_1^2\,u_2 - \\ -(1,2206 + 0,836932\,i)u_1\,u_2^2 - (0,26675 - 0,13069\,i)u_2^3 - \\ -(0,656312 - 0,874539\,i)u_1^2\,v_1 + \\ +(0,596285 + 0,728075\,i)u_1\,u_2\,v_1 - \\ -(0,259289 + 0,388852\,i)u_2^2\,v_1 - \\ +(1,85233 - 1,39011\,i)u_1\,v_1^2 + \\ +(1,27475 + 5,19845\,i)u_2\,v_1^2 + (4,84364 - 9,47969\,i)v_1^3 + \\ +(7,36296 + 1.80552\,i)u_1^2\,v_2 + \\ +(6,10452 - 6,67629\,i)u_1\,u_2\,v_2 - \\ -(0,857837 + 1,58237\,i)u_2^2\,v_2 + \\ +(7,41244 + 4,94265\,i)u_1\,v_2^2 - \\ -(10,0546 + 5,45084\,i)u_2\,v_2^2 + \\ +(71,5725 + 104,383\,i)v_1\,v_2^2 + \\ +(33,5286 - 68,4352\,i)v_2^3 + (1,98672 + 0,899441\,i)u_1^4 + \\ +(5,21997 - 3,52319\,i)u_1^3\,u_2 - \\ -(0,273095 + 6,91572\,i)u_1^2\,u_2^2 - \\ -(3,00218 + 1,71215\,i)u_1\,u_2^3 - \\ -(0,592617 - 0,315704\,i)u_2^4 - \\ -(6,25087 + 1,09674\,i)u_1^3\,v_1 - \\ -(10,4139 - 11,3483\,i)u_1^2\,u_2\,v_1 + \\ +(3,2931 + 12,7229\,i)u_1\,u_2^2\,v_1 + \\ +(3,86302 + 1,30912\,i)u_2^3\,v_1 + \\ +13,7277u_1^2\,v_1^2 + (15,2615 - 23,2501\,i)u_1\,u_2\,v_1^2 - \\ -(6,49354 + 14,6778\,i)u_2^2\,v_1^2 - \\ -(28,0427 - 4,9202\,i)u_1\,v_1^3 - (14,5727 - 36,7224\,i)u_2\,v_1^3 + \\ +(39,985 - 18,1022\,i)v_1^4 + (9,74493 + 24,5567\,i)u_1^3\,v_2 + \\ +(59,3643 + 10,9444\,i)u_1^2\,u_2\,v_2 + \\ +(32,4768 - 35,0004\,i)u_1\,u_2^2\,v_2 -$$

$$-(3,32612+13,0135\,i)u_2^3 v_2-$$
$$-(45,7841+69,75\,i)u_1^2 v_1 v_2-156,219\,u_1 u_2 v_1 v_2-$$
$$-(45,1881-69,0663\,i)u_2^2 v_1 v_2+$$
$$+(140,156+152,732\,i)u_1 v_1^2 v_2+$$
$$+(266,321-49,0989\,i)u_2 v_1^2 v_2-$$
$$-(315,17+212,723\,i)v_1^3 v_2-$$
$$-(58,4411-132,098\,i)u_1^2 v_2^2+$$
$$+(135,564+207,198\,i)u_1 u_2 v_2^2+$$
$$+117,593u_2^2 v_2^2+(132,96-513,692\,i)u_1 v_1 v_2^2-$$
$$-(437,091+471,055\,i)u_2 v_1 v_2^2-$$
$$-(49,4663-1252,66\,i)v_1^2 v_2^2-$$
$$-(467,91-158,567\,i)u_1 v_2^3-$$
$$-(134,293-525,425\,i)u_2 v_2^3+$$
$$+(1631,36-930,369\,i)v_1 v_2^3-$$
$$-(966,066+514,65\,i)v_2^4, \tag{16}$$

На следующем шаге, при помощи преобразования Биркгофа $(u_1,u_2,v_1,v_2)\to(Q_1,Q_2,P_1,P_2)$, подробно описанного в монографии А.П. Маркеева [7], мы „уничтожим" в гамильтониане F^* все члены третьей степени, а среди членов четвертой степени останутся только произведения $Q_j P_j$, а также так называемые „резонансные" члены $Q_1 P_2^3$ и $Q_2^3 P_1$, которые невозможно ликвидировать никакими преобразованиями. В результате этого преобразования мы получим гамильтониан G^* в виде [7]

$$G^*=i\sigma_1 Q_1 P_1+i\sigma_2 Q_2 P_2-c_{20}(Q_1 P_1)^2+$$
$$+c_{11} Q_1 Q_2 P_1 P_2-c_{02}(Q_2 P_2)^2+ \tag{17}$$
$$+(x_{1003}+i\,y_{1003})Q_1 P_2^3-\frac{\sigma_2^2}{12}(x_{1003}+i\,y_{1003})Q_2^3 P_1+\dots$$

Коэффициенты c_{20},c_{11},c_{02} и x_{1003},y_{1003} из выражения (17) вычисляются по формулам, приведенным Маркеевым [7].

Для проверки условий теоремы Маркеева [7] об устойчивости в резонансном случае $\sigma_1=3\sigma_2$, которая гласит, что *„если гамильтониан возмущенного движения таков, что* $|a|<b$, *то положение равновесия неустойчиво, если же* $|a|>b$, *то имеет место устойчивость по Ляпунову"*; величины a и b вычисляются по формулам [7]

$$a=c_{20}+3c_{11}+9c_{02},\qquad b=3\sigma_2\sqrt{x_{1003}^2+y_{1003}^2}\,. \tag{18}$$

После вычислений при помощи ССВ „Mathematica" коэффициентов c_{20},c_{11},c_{02} и x_{1003},y_{1003}, для конкретного случая (3), (4) имеем:

$$c_{20}=-1,58412...,\ c_{11}=258,31...,\ c_{02}=-21,4453...,$$
$$x_{1003}=-304,794...,\ y_{1003}=139,288... \tag{21}$$

откуда $|a|=751,902...$ и $b=316,434...$ что дает устойчивость точки S_1. В результате можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. Если массы m_1^* и m_2^*, для которых получается резонансное соотношение $\sigma_1=3\sigma_2$, принадлежат интервалу линейной устойчивости [4,9], то стационарное решение S_1, полученное для этих резонансных масс, является устойчивым в смысле Ляпунова.

В заключение можно сформулировать также следующий результат: *все остальные стационарные решения, существование которых доказано в [4], при наличии резонанса четвертого порядка являются устойчивыми в смысле Ляпунова, так как выполнено условие теоремы Мозера [7] и имеет место неравенство* $|a|>b$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гребеников Е.А, Козак-Сковородкина Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 209 с.
2. Гребеников Е.А, Силушик А., Метод определения стационарных решений дифференциальных уравнений колцеобразных задач многих тел // Тез. докл. междунар. матем. конф. "Еругинские чтения –IX" (Витебск, Беларусь, 2003 г.). – Витебск, Изд-во ВГУ, 2003. – С. 176-177.
3. Bang D., Elmabsout B., Configurations polygonales en equilibre relatif, // Systemes dynamiques / Dynamical systems –Paris: C. R. Acad. Sci., –T.329. –Serie II b, 2001. – P. 243-248.
4. Силушик А. Проблема линейной устойчивости стационарных решений ограниченной задачи 8-и тел с неполной симметрией // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя прыродазнаучых навук. – 2004. – № 2(40). – С.20-26.
5. Siluszyk A., On equilibrium points' stability in Lapunov's sense in the restricted 8-body asymmetric problem // Тез. докл. IX Белорусск. матем. конференции (Гродно, Беларусь, 2004 г.). – Гродно, Изд-во ГГУ, 2004. – С. 97-98.
6. Миронов С.В., Силушик А. Проблема существования частотных резонансов 3-го и 4-го порядка в ограниченной задаче восьми тел с неполной симметрией // Сб. „Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа". – М.: Изд-во ВЦ РАН им. А.А.Дородницына, 2005. – С. 176-184.
7. Маркеев А. П., Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
8. Siłuszyk A. Konieczne i wystarczające warunki istnienia homograficznych rozwiązań w specjalnym zagadnieniu 7-u i 10-u ciał // Applications of the Mathematica system to Social Processes and Mathematical Physics – Proceedings of the international workshop (Brest, Belarus, June 3-6, 2003), Brest State University, 2003.– P. 206-210.
9. Гребеников Е.А., Силушик А., Об устойчивости стационарных точек ограниченной задачи 8-и тел в резонансном случае $\sigma_1=2\sigma_2$ // Матер. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры DE&CAS'2005" (Брест, Беларусь, 2005 г.). – Мн.: Изд-во БГПИ, 2005. – С. 276–281.