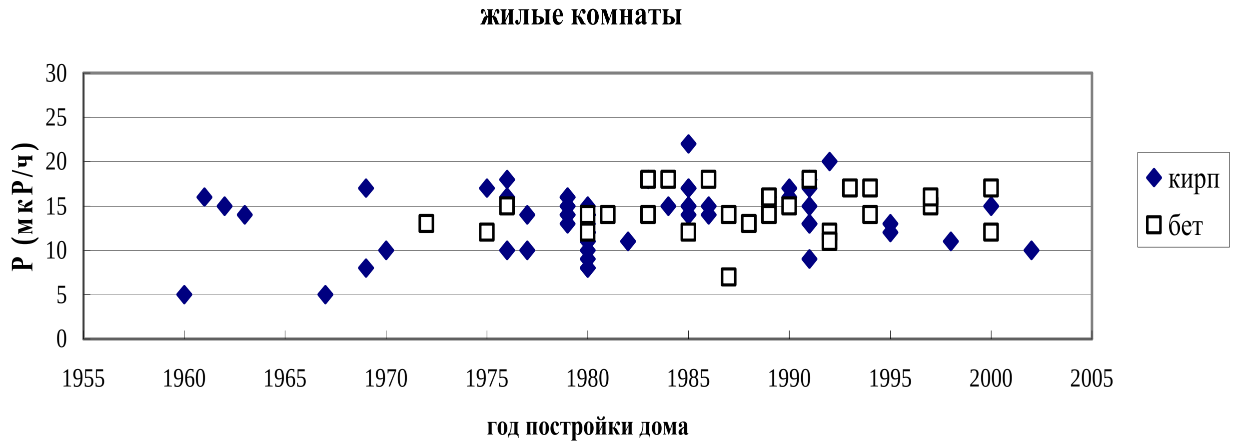
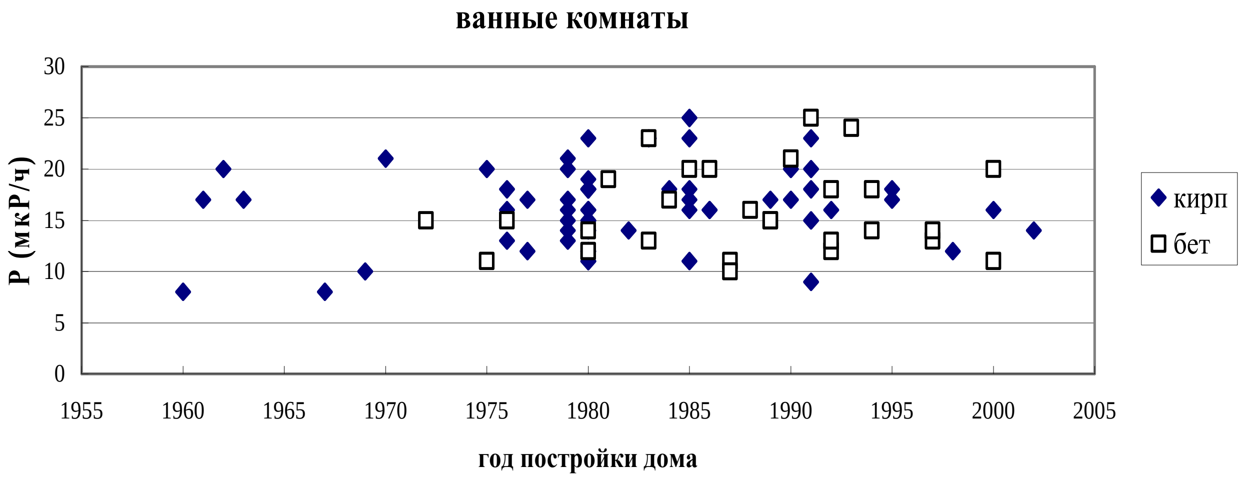




УДК 531

Прокопеня А.Н.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ СИТНИКОВА

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что разработка КАМ-теории позволила решить целый ряд задач об устойчивости движения в классической и небесной механике [1]. Характерным примером является знаменитая проблема устойчивости треугольных лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел [2]. Она была поставлена более двухсот лет назад, но только с появлением КАМ-теории в ее исследовании был достигнут существенный прогресс, а в некоторых случаях получены исчерпывающие результаты [3]. При этом были разработаны достаточно общие методы, позволяющие проанализировать устойчивость систем, для которых уравнения движения могут быть записаны в гамильтоновой форме [4]. Тем не менее, в каждом конкретном случае реализация этих методов требует как адаптации имеющихся, так и разработки новых алгоритмов вычислений, которые, как правило, очень громоздки и могут быть выполнены только с помощью компьютера и современного программного обеспечения.

В данной работе исследуется устойчивость положения равновесия частицы P_0 пренебрежимо малой массы в случае эллиптической ограниченной задачи многих тел типа "задачи Ситникова" [5]. Гравитационное поле генерируется системой n частиц одинаковой массы m, движущихся в плоскости xOy инерциальной барицентрической системы координат по эллиптическим орбитам, определяемым соответствующим решением задачи n тел [6], и находящихся в любой момент времени в вершинах правильного n-угольника. При подходящих начальных условиях частица P_0 будет двигаться только вдоль оси Oz, которая является осью симметрии системы. Соответствующая конфигурация в случае $n = 3$ показана на рис. 1. В цилиндрических координатах (r, φ, z) движение частиц $P_1, P_2, ..., P_n$ определяется уравнениями:

$$r_j = \frac{p}{1 + e\cos\nu}, \quad \varphi_j = \nu + \frac{2\pi}{n} j, \quad z_j = 0,$$

$$r_j^2 \frac{d\nu}{dt} = c = const \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{1}$$

где p, e – параметр и эксцентриситет эллиптических орбит частиц соответственно, ν – истинная аномалия, а постоянный

Прокопеня Александр Николаевич*, доцент, к.физ.-мат.н., кафедра физики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

параметр *c* равен:

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{GpmS_1}, \quad S_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right)^{-1}.$$

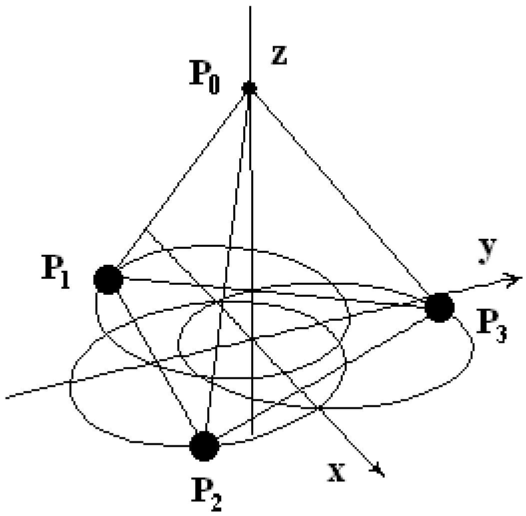
Здесь G – гравитационная постоянная. Используя истинную аномалию ν в качестве независимой переменной и выполняя переход к конфигурационному пространству Нехвила [7], функцию Гамильтона системы можно записать в виде:

$$H = \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}z^2 - \frac{4n}{S_1(1+e\cos\nu)}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad (2)$$

где $p_z = p_z(\nu),\ z = z(\nu)$ – канонически сопряженные импульс и координата частицы P_0. Тогда уравнения движения примут вид:

$$\frac{dz}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z,$$

$$\frac{dp_z}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{z}{1+e\cos\nu}\left(e\cos\nu + \frac{4n}{S_1(1+z^2)^{3/2}}\right). \quad (3)$$



Очевидно, система (3) имеет решение $z = p_z = 0$, которое соответствует положению равновесия частицы P_0. В случае $n = 2$ Ситников доказал [5], что если выбраны подходящие начальные условия, то частица P_0 будет совершать осциллирующее движение вдоль оси *Oz* в окрестности положения равновесия, причем амплитуда таких осцилляций может неограниченно возрастать. В данной работе мы покажем, что положение равновесия $z = p_z = 0$ частицы P_0 является устойчивым по Ляпунову при $n \geq 2$, если эксцентриситет орбит частиц $P_1, P_2, ..., P_n$ достаточно мал. Это означает, что при малых возмущениях начальных условий частица P_0 будет оставаться в малой окрестности положения равновесия в течение бесконечно большого промежутка времени. Все вычисления в работе выполняются с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica [8].

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Функция Гамильтона (2) является аналитической в окрестности положения равновесия $z = p_z = 0$ и может быть представлена в виде ряда

$$H = H_2 + H_4 + \ldots, \quad (4)$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{a + e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}z^2,$$

$$H_4 = -\frac{3a}{8(1+e\cos\nu)}z^4,\ a = \frac{4n}{S_1}. \quad (5)$$

Линеаризованная система уравнений возмущенного движения частицы P_0 получается из (3), если мы учтем в функции Гамильтона (4) только квадратичную часть H_2. Легко видеть, что она сводится к дифференциальному уравнению второго порядка вида:

$$\frac{d^2z}{d\nu^2} + \frac{a + e\cos\nu}{1+e\cos\nu}z = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) является уравнением Хилла и подробно исследовано в [9]. В этой работе показано, что области неустойчивости его тривиального решения $z = 0$ на плоскости $e - a$ ограничены кривыми, пересекающими ось $e = 0$ в точках $a_k = k^2/4\ (k = 1,3,5,...)$, и найдены уравнения границ этих областей в виде рядов по степеням параметра e, которые приведены ниже:

$$a = 0,25 \mp 0,375e + 0,117186e^2 \mp 0,021973e^3 + \\ +0,027008e^4 \mp 0,011644e^5 + 0,013131e^6 \mp \\ \mp 0,007544e^7 + 0,008147e^8, \quad (7)$$

$$a = 2,25 - 0,527344e^2 \mp 0,021973e^3 - \\ -0,132351e^4 \mp 0,011394e^5 - 0,06687e^6 \mp \\ \mp 0,007245e^7 - 0,042285e^8, \quad (8)$$

$$a = 6,25 - 2,05078e^2 - 0,538731e^4 \mp 0,00025e^5 - \\ -0,27914e^6 \mp 0,000296e^7 - 0,17946e^8, \quad (9)$$

$$a = 12,25 - 4,30664e^2 - 1,13869e^4 - 0,592608e^6 \mp \\ \mp 0,000004e^7 - 0,382265e^8. \quad (10)$$

Следует подчеркнуть, что самая большая область неустойчивости находится между кривыми (7) и примыкает к точке $a = a_1 = 0,25$. Далее с ростом k ширина областей неустойчивости быстро убывает и ее величина имеет порядок e^k, причем численный коэффициент при e^k также убывает.

Вычисления параметра a, определенного в (5), при различных значениях числа частиц n показывают, что максимальное значение $a = 8$ достигается при $n = 2$ и далее a убывает с ростом n. В случае $n = 70$, например, параметр a принимает значение $a \approx 1,43645$. Заметим, что для некоторых *n* существуют такие значения параметра e, при которых соответствующие точки (e, a) попадают в области неустойчивости уравнения (6). В случае задачи Ситникова ($n = 2$), например, при достаточно большом значении эксцентриситета $e \approx 0,876551$ прямая $a = 8$ пересекает область неустойчивости, ограниченную кривыми (10) и примыкающую к точке $a = a_7 = 49/4$. При этом область пересечения очень узкая, ее ширина не превышает значения $3 \cdot 10^{-7}$.

Прямые $a = 3\sqrt{3}$, $a = \frac{16}{7}(-1 + 2\sqrt{2})$, $a = 5\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, соответствующие случаям $n = 3,4,5$, пересекают область неустойчивости, ограниченную кривыми (9) и примыкающую к точке $a = a_5 = 25/4$. В этих случаях области значений параметра *e*, при которых тривиальное решение уравнения (6) является неустойчивым, существуют при $e > 0{,}66$, причем они также достаточно малы и не превышают 10^{-4}.

При $15 \le n < 70$ соответствующие прямые $a = const$ пересекают область неустойчивости, ограниченную кривыми (8) и примыкающую к точке $a = a_3 = 9/4$. Для $n = 15$ значения параметра *e*, при которых уравнение (6) является неустойчивым, находятся в пределах отрезка $(0{,}243975,\ 0{,}246483)$. Далее с ростом *n* значения эксцентриситета *e*, при которых наблюдается неустойчивость, увеличиваются, причем длина соответствующего отрезка возрастает до 0,035. Отметим также, что пересечение прямых $a = const$ с областью неустойчивости, ограниченной кривыми (7) и примыкающей к точке $a = a_1 = 1/4$, возможно только при достаточно большом числе частиц $n \sim 2000$.

Таким образом, для числа частиц $2 \le n < 15$ и значений эксцентриситета $e < 0{,}66$ положение равновесия частицы P_0 в рассматриваемой системе является устойчивым в линейном приближении. Линейная устойчивость положения равновесия сохраняется и при $n \ge 15$, если эксцентриситет орбит частиц *e* достаточно мал.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Задача об устойчивости гамильтоновых систем относится к критическому в смысле Ляпунова случаю [10] и ее решение требует учета нелинейных членов в разложениях в ряды правых частей уравнений движения (3). Одним из основных методов исследования таких систем является метод нормальных форм Пуанкаре, который широко используется при решении ряда задач нелинейной механики [11]. Суть этого метода сводится к построению канонического преобразования, приводящего функцию Гамильтона (4) к некоторой простейшей форме, при которой уравнения движения интегрируются. Поскольку функция Гамильтона представима в виде степенного ряда, такое преобразование сводится к последовательной нормализации членов ряда (4). На первом этапе производится нормализация его квадратичной части H_2, которая является аналитической функцией параметра *e* в области $|e| < 1$ и может быть представлена в виде степенного ряда:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_z^2 + az^2) + \frac{z^2}{2}(a-1)\sum_{k=1}^{\infty}(-e\cos\nu)^k. \quad (11)$$

Для такой функции в работе [12] предложен алгоритм аналитического построения канонического преобразования

$$z \to Z_{11}q + Z_{12}p, \quad p_z \to Z_{21}q + Z_{22}p, \quad (12)$$

приводящего ее к виду:

$$\tilde{H}_2 = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2), \quad (13)$$

где величина ω представляет собой степенной ряд по e и с точностью до второго порядка может быть записана в виде:

$$\omega = \sqrt{a}\left(1 + \frac{3(a-1)}{4(4a-1)}e^2\right). \quad (14)$$

Коэффициенты $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ преобразования (12) также находятся в виде степенных рядов по параметру e и с точностью до второго порядка имеют вид:

$$Z_{11} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{a-1}{\sqrt{a}(4a-1)}e\cos\nu + \frac{\sqrt{a}e^2(10 - 2a - 8a^2 + (5 - 22a + 8a^2)\cos 2\nu)}{8(4a-1)^2},$$

$$Z_{12} = -\frac{2(a-1)}{4a-1}e\sin\nu + \frac{(a+2)e^2\sin 2\nu}{8(4a-1)},$$

$$Z_{21} = \frac{(a-1)(2a-1)}{\sqrt{a}(4a-1)}e\sin\nu - \frac{\sqrt{a}(5a-8)e^2\sin 2\nu}{8(4a-1)},$$

$$Z_{22} = 1 - \frac{a-1}{4a-1}e\cos\nu + \frac{e^2(-2(a-1)^2(4a-3) + (-4 + 19a - 14a^2 + 8a^3)\cos 2\nu)}{8(4a-1)^2}.$$

Заметим, что преобразование (12) возможно лишь при условии $4a \ne N^2$ $(N = 1,3,5,...)$. Вычисления параметра *a* показали, что для рассматриваемой системы это условие всегда выполняется.

Преобразование (12) приводит член четвертого порядка H_4 в разложении (4) к виду (15).

Для его нормализации построим каноническое преобразование Биркгофа [13] $p,q \to \tilde{p},\tilde{q}$ с помощью производящей функции вида:

$$S(\tilde{p},q,\nu) = \tilde{p}q + \sum_{j=0}^{4} s_j(\nu)\tilde{p}^j q^{4-j}, \quad (16)$$

где коэффициенты $s_j(\nu)$ – 2π-периодические функции. Связь переменных p,q и $\tilde{p},\tilde{q}$ находим из соотношений:

$$\tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}} = q + \sum_{j=1}^{4} j \cdot s_j(\nu)\tilde{p}^{j-1}q^{4-j},$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \tilde{p} + \sum_{j=0}^{3}(4-j)\cdot s_j(\nu)\tilde{p}^j q^{3-j}. \quad (17)$$

Соотношения (17) можно рассматривать как уравнения относительно p и q. При достаточно малых $\tilde{p},\tilde{q}$ величины p и q будут аналитическими функциями в окрестности точки $\tilde{p} = \tilde{q} = 0$. Тогда с точностью до членов третьего порядка

$$H_4 = -\frac{3q^4}{8\sqrt{a}}\left(1 - \frac{3e\cos\nu}{4a-1} - \frac{e^2(-9 + a(-5 - 20a + 16a^2) - 2(a-1)(-3 - 8a + 8a^2)\cos 2\nu)}{4(4a-1)^2}\right) - \frac{9\sqrt{a}e^2(a-1)^2\sin^2\nu}{(4a-1)^2}p^2q^2 + +3pq^3\left(\frac{(a-1)e\sin\nu}{4a-1} - \frac{3(a+2)(4a-3)e^2\sin 2\nu}{16(4a-1)^2}\right) \quad (15)$$

по $\tilde{p},\tilde{q}$ соотношения (17) можно переписать в виде:

$$q=\tilde{q}-\sum_{j=1}^{4} j\cdot s_j(\nu)\tilde{p}^{j-1}\tilde{q}^{4-j},$$

$$p=\tilde{p}+\sum_{j=0}^{3}(4-j)\cdot s_j(\nu)\tilde{p}^{j}\tilde{q}^{3-j}. \qquad (18)$$

Новая функция Гамильтона $\tilde{H}(\tilde{p},\tilde{q},\nu)$ будет равна:

$$\tilde{H}=H(p,q,\nu)+\frac{\partial S(\tilde{p},q,\nu)}{\partial\nu}, \qquad (19)$$

где в правую часть (19) вместо p и q следует подставить выражения (18). В результате получаем:

$$\tilde{H}=\frac{\omega}{2}(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2)+\left(\frac{ds_0}{d\nu}-\omega s_1+h_{40}(\nu)\right)\tilde{q}^4+$$
$$+\left(\frac{ds_1}{d\nu}+4\omega s_0-2\omega s_2+h_{41}(\nu)\right)\tilde{q}^3\tilde{p}+$$
$$+\left(\frac{ds_2}{d\nu}+3\omega s_1-3\omega s_3+h_{42}(\nu)\right)\tilde{q}^2\tilde{p}^2+$$
$$+\left(\frac{ds_3}{d\nu}+2\omega s_2-4\omega s_4\right)\tilde{q}\tilde{p}^3+$$
$$+\left(\frac{ds_4}{d\nu}+\omega s_3\right)\tilde{p}^4+O((\tilde{p}^2+\tilde{q}^2)^{5/2}), \qquad (20)$$

где

$$h_{40}(\nu)=-\frac{3}{8\sqrt{a}}+\frac{9e\cos\nu}{8\sqrt{a}(4a-1)}+$$
$$+\frac{3e^2}{32\sqrt{a}(4a-1)^2}(-9+a(-5-20a+16a^2)-$$
$$-2(a-1)(-3-8a+8a^2)\cos 2\nu),$$
$$h_{41}(\nu)=\frac{3(a-1)e\sin\nu}{4a-1}-\frac{9(a+2)(4a-3)e^2\sin 2\nu}{16(4a-1)^2},$$
$$h_{42}(\nu)=-\frac{9(a-1)^2\sqrt{a}e^2\sin^2\nu}{(4a-1)^2}. \qquad (21)$$

Напомним, что коэффициенты $s_j(\nu)$ являются периодическими функциями ν с периодом 2π и их следует выбрать таким образом, чтобы функция Гамильтона (20) приобрела наиболее простой вид. Вычисления показывают, что при отсутствии резонансов второго и четвертого порядков, т.е. при выполнении условий $2\omega\neq N$ и $4\omega\neq N$ $(N=1,2,...)$, функции $s_j(\nu)$ можно выбрать так, что коэффициенты $\tilde{q}^3\tilde{p}$ и $\tilde{q}\tilde{p}^3$ в (20) обратятся в нуль, а коэффициенты $\tilde{q}^4$, $\tilde{p}^4$ и $\tilde{q}^2\tilde{p}^2$ будут равны соответственно c, c и $2c$, где

$$c=-\frac{9}{64\sqrt{a}}+\frac{27(-3-7a+4a^2)e^2}{256\sqrt{a}(4a-1)^2}. \qquad (22)$$

При этом функция Гамильтона (20) примет вид:

$$\tilde{H}=\frac{\omega}{2}(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2)+c(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2)^2+O((\tilde{p}^2+\tilde{q}^2)^{5/2}). \qquad (23)$$

Переходя к канонически сопряженным переменным действие-угол r,φ, которые определяются соотношениями

$$q=\sqrt{2r}\sin\varphi,\ p=\sqrt{2r}\cos\varphi,$$

функцию Гамильтона (23) можно переписать в виде:

$$H^*=\omega r+4cr^2+O(r^{5/2}). \qquad (24)$$

Заметим, что привести функцию Гамильтона (4) к виду (24) можно только при отсутствии резонансов до четвертого порядка включительно. Вычисления показывают, что при достаточно малых значениях эксцентриситета e это требование выполняется даже при увеличении числа частиц n до 10^5. При этом параметр c, определяемый соотношением (22), отличен от нуля, а положение равновесия частицы P_0 устойчиво в линейном приближении. На основании полученных результатов и теоремы Арнольда-Мозера об устойчивости гамильтоновой системы с одной степенью свободы в общем эллиптическом случае [14,15] можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Равновесное решение эллиптической ограниченной задачи многих тел типа "задачи Ситникова" устойчиво по Ляпунову, если эксцентриситет орбит частиц e достаточно мал.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. В.И.Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт. Математические аспекты классической и небесной механики. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 416 с.
2. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Абалкин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. – М.: Наука, 1976. – 854 с.
3. А.П.Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
4. А.П.Маркеев. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика. – М.: Физматлит, 2001. – С. 114-130.
5. К.Ситников. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133, № 2. – С. 303-306.
6. Е.А.Гребеников. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10, № 8. – С. 74-80.
7. Г.Н.Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1975.– 800 с.
8. S.Wolfram. The Mathematica book. 4th ed. Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
9. E.A.Grebenikov, A.N.Prokopenya. Determination of the boundaries between the domains of stability and instability for the Hill's equation // Nonlinear oscillations. – 2003. – Vol. 6, No. 1. – C. 42-51.
10. А.М.Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения / Под ред. Мюнтц Г. – Череповец, Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.
11. А.Д.Брюно. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1979. – 252 с.
12. А.Н.Прокопеня. Нормализация неавтономной линейной гамильтоновой системы с малым параметром // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 6. – С. 33-42.
13. Дж.Д.Биркгоф. Динамические системы. – Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999. – 408 с.
14. В.И.Арнольд. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 2. – С. 255-257.
15. Ю.Мозер. КАМ-теория и проблемы устойчивости. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 448 с.