

друг друга, достаточно показать, что разность $t_{r_0} - t_{r_0+\Delta r}$ для всех r имеет знак Δr . Полагая Δr малым и ограничиваясь линейным по Δr разложением, получим, что указанное условие перестает выполняться если

$$\frac{3\sqrt{r}}{2r_0\sqrt{r_0-r}} - \frac{\sqrt{(r_0-r)r}}{r_0^2} > 0,$$

что дает в силу положительности r соотношение $r > 2,5r_0$. Поскольку при сжатии $r \leq r_0$, то действительно частицы при сжатии друг друга не обгоняют. Закон эволюции для плотности в эйлеровых координатах находится из очевидного соотношения

$$\rho_0 4\pi r_0^2 dr_0 = \rho 4\pi r^2 dr,$$

откуда для любого фиксированного момента времени зависимость плотности от радиальной координаты r имеет вид

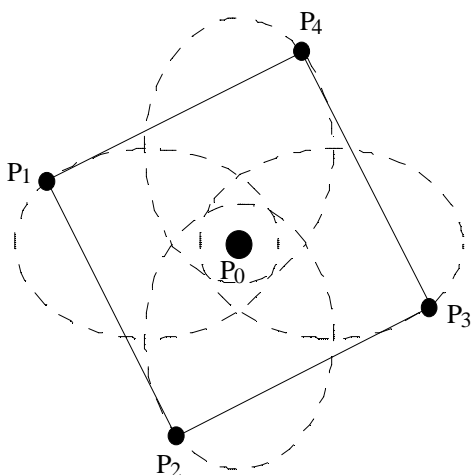
УДК 531

Прокопеня А.Н.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НОВЫХ ГОМОГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

ВЕДЕНИЕ

Задача N тел впервые была сформулирована И. Ньютоном и до сих пор привлекает внимание исследователей. Как известно, только в случае двух взаимодействующих тел ($N=2$) интегрирование дифференциальных уравнений движения сводится к квадратурам. При $N>2$ общее решение уравнений движения пока не найдено и, по-видимому, задача не может быть решена в конечном виде. Поэтому поиск точных частных решений уравнений движения остается весьма актуальным.



Особое место среди них занимают гомографические решения, качественная теория которых достаточно полно изложена в монографии А. Уинтнера [1]. Напомним, что решение $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$ ($j = 1, N$) задачи N тел называется гомографическим, если конфигурация, образованная этими телами в барицентрической системе координат, изменяется так, что она остается подобной себе при любом t . Очевидно, многие известные частные решения задачи многих тел являются го-

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial t}{\partial r_0}\right) / \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right),$$

где функция $t(r_0, r)$ дается выражением (1). Окончательный результат в силу громоздкости выражения выписывать не будем, однако достаточно очевидно, что $\rho(r)$ – убывающая функция от r при любом фиксированном t , что соответствует интуитивному представлению о максимальной плотности в центре в любой момент времени. Тем самым доказана ошибочность аргументации, приведенной выше и, следовательно, операция инверсии времени в моделях осциллирующей Вселенной не приводит автоматически к обратимости процесса расширения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Я.Б. Зельдович, Н.Д. Новиков. Стрoение – эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975. – 736 с.

мографическими. Так, общее решение задачи двух тел является гомографическим. В случае трех тел гомографические решения существуют либо в виде равностороннего треугольника, найденного Лагранжем, либо в виде коллинеарных решений Эйлера. В работах [2, 3] найдены гомографические решения задачи $(N+1)$ тел, определяющие равномерное вращение N тел P_1, P_2, \dots, P_N одинаковой массы m , находящихся в вершинах правильного N -угольника, вокруг $(N+1)$ -ого тела P_0 массой m_0 , помещенного в его центр. Затем было показано [4, 5], что тела P_1, P_2, \dots, P_N могут двигаться вокруг центрального тела P_0 не только по окружности, но и по одинаковым эллиптическим орбитам, каждая из которых повернута по отношению к соседней орбите на угол $2\pi/n$. Параметр p и эксцентриситет e орбит определяется начальными условиями. При движении частиц симметрия системы сохраняется, а многоугольник пульсирует и вращается с переменной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через точку P_0 перпендикулярно его плоскости. На рисунке 1 показана соответствующая конфигурация в случае $N = 4$. Следует отметить еще одно гомографическое решение, полученное в задаче пяти тел, которое изображается геометрически в виде ромба [6]. В противоположных вершинах ромба располагаются частицы одинаковой массы $m_1 = m_3, m_2 = m_4$, а в его центре находится частица массой m_0 , причем ромб вращается равномерно вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости ромба. Такое решение существует лишь в том случае, когда массы частиц удовлетворяют соотношению

$$m_1 = \frac{m_2(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2}) + 4m_0(\alpha^3 - 1)(1 + \alpha^2)^{3/2}}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}, \quad (1)$$

где α равняется отношению длин диагоналей ромба. В данной работе доказывается, что гомографические решения, найденные в работах [2-6], являются частными случаями

Прокопеня Александр Николаевич, к.ф.-м.н., доцент каф. физики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

более общего класса решений задачи $N = 2n + 1$ тел, геометрически изображаемых двумя правильными n -угольниками, лежащими в одной плоскости и имеющими общий центр, в который помещается тело произвольной массы. В вершинах каждого многоугольника находятся тела одинаковой массы, а сами они либо являются коллинеарными, либо повернуты друг относительно друга на угол π/n . Получены соотношения, связывающие размеры многоугольников и массы частиц, выражающие необходимые условия существования решений.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕХВИЛА

Рассмотрим систему, состоящую из $N = 2n + 1$ частиц P_0, P_1, \dots, P_{2n} массами $m_0, m_1 = m_2 = \dots = m_n \equiv m_1$ и $m_{n+1} = m_{n+2} = \dots = m_{2n} \equiv m_2$, движущихся под действием сил взаимного гравитационного притяжения вида:

$$F_{j,k} = G \frac{m_j m_k}{R_{j,k}^2}, \text{ где } R_{j,k} = |\vec{r}_j - \vec{r}_k| - \text{расстояние между } j\text{-ой и } k\text{-ой частицами, а } G - \text{гравитационная постоянная. В относительной цилиндрической системе координат, начало которой совпадает с частицей } P_0, \text{ уравнения движения частиц } P_1, \dots, P_{2n} \text{ имеют вид [7]:}$$

В относительной цилиндрической системе координат, начало которой совпадает с частицей P_0 , уравнения движения частиц P_1, \dots, P_{2n} имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \rho_j}{dt^2} - \rho_j \left(\frac{d\varphi_j}{dt} \right)^2 + G(m_0 + m_j) \frac{\rho_j}{r_j^3} = \\ & = G \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{\cos(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k - \rho_j}{R_{j,k}^3} - \frac{\cos(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k}{r_k^3} \right), \\ & \rho_j \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} + 2 \frac{d\rho_j}{dt} \frac{d\varphi_j}{dt} = \\ & = G \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} \left(\frac{1}{R_{j,k}^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \sin(\varphi_j - \varphi_k) m_k \rho_k, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 z_j}{dt^2} + G(m_0 + m_j) \frac{z_j}{r_j^3} = G \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{z_j - z_k}{R_{j,k}^3} - \frac{z_k}{r_k^3} \right) \\ & (j = \overline{1, 2n}), \end{aligned}$$

где $r_k^2 = \rho_k^2 + z_k^2$, $R_{j,k}^2 = \rho_j^2 + \rho_k^2 - 2\rho_j \rho_k \cos(\varphi_j - \varphi_k) + (z_j - z_k)^2$.

Уравнения (2) представляют собой систему $6n$ нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, и найти их общее решение не представляется возможным. Поиск гомографических решений этой системы значительно упрощается, если исследовать движение частиц во вращающейся вокруг оси $P_0 z$ системе координат и перейти в конфигурационное пространство Нехвила [8], используя подстановку:

$$\begin{aligned} \rho_j(t) & \rightarrow \frac{P}{1 + e \cos v} \rho_j(v), \quad \varphi_j(t) \rightarrow v + \varphi_j(v), \\ z_j(t) & \rightarrow \frac{P}{1 + e \cos v} z_j(v), \end{aligned} \quad (3)$$

где P и e - некоторые постоянные, а новая независимая переменная v представляет собой угол поворота вращающейся

системы координат. При этом производные по времени в уравнениях движения преобразуются по правилу:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{c}{p^2} (1 + e \cos v)^2 \frac{d}{dv}. \quad (4)$$

Выполняя преобразование (3)-(4), приводим систему (2) к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \rho_j}{dv^2} - \rho_j \left(\frac{d\varphi_j}{dv} + 1 \right)^2 + \frac{e \cos v}{1 + e \cos v} \rho_j + \\ & + \frac{Gp(m_0 + m_j) \rho_j}{c^2 (1 + e \cos v) r_j^3} = \frac{Gp}{c^2 (1 + e \cos v)} \times \\ & \times \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{\cos(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k - \rho_j}{R_{j,k}^3} - \frac{\cos(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k}{r_k^3} \right), \\ & \rho_j \frac{d^2 \varphi_j}{dv^2} + 2 \frac{d\rho_j}{dv} \left(\frac{d\varphi_j}{dv} + 1 \right) = \\ & = \frac{Gp}{c^2 (1 + e \cos v)} \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{1}{r_k^3} - \frac{1}{R_{j,k}^3} \right) \sin(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k, \\ & \frac{d^2 z_j}{dv^2} + \frac{e \cos v}{1 + e \cos v} z_j + \frac{Gp(m_0 + m_j) z_j}{c^2 (1 + e \cos v) r_j^3} = \\ & = - \frac{Gp}{c^2 (1 + e \cos v)} \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{z_j - z_k}{R_{j,k}^3} + \frac{z_k}{r_k^3} \right) \\ & (j = \overline{1, 2n}). \end{aligned} \quad (5)$$

Как видим, полученные уравнения являются еще более сложными по сравнению с уравнениями движения (2). Однако, для определения гомографических решений системы (2) достаточно найти лишь равновесные решения системы (5). Действительно, если в конфигурационном пространстве Нехвила положения равновесия частиц $\rho_j(v) = const$, $\varphi_j(v) = const$, $z_j(v) = const$ ($j = \overline{1, 2n}$) найдены, то, согласно правилам преобразования (3), в исходной относительной системе координат частицы будут двигаться по подобным траекториям. Приравнявая производные в уравнениях (5) к нулю, получаем следующие уравнения для определения равновесных решений:

$$\begin{aligned} & -\rho_j + \frac{Gp(m_0 + m_j) \rho_j}{c^2 r_j^3} = \\ & = \frac{Gp}{c^2} \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{\cos(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k - \rho_j}{R_{j,k}^3} - \frac{\cos(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k}{r_k^3} \right), \\ & \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{1}{r_k^3} - \frac{1}{R_{j,k}^3} \right) \sin(\varphi_j - \varphi_k) \rho_k = 0, \\ & e \cos v \cdot z_j + \frac{Gp(m_0 + m_j) z_j}{c^2 r_j^3} = \\ & = - \frac{Gp}{c^2} \sum_{k=1(k \neq j)}^{2n} m_k \left(\frac{z_j - z_k}{R_{j,k}^3} + \frac{z_k}{r_k^3} \right) \quad (j = \overline{1, 2n}). \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, единственное равновесное решение третьего уравнения системы (6) есть нулевое решение, т.е.

$z_j = 0 \quad (j = \overline{1, 2n})$. Этот результат соответствует выводу, сделанному в работе [1] о том, что всякое гомографическое решение задачи многих тел является плоским. В плоскости $z = 0$ равновесные положения частиц определяются как решения первого и второго уравнений системы (6) при условии

$$r_k = \rho_k, \quad R_{j,k}^2 = \rho_j^2 + \rho_k^2 - 2\rho_j\rho_k \cos(\varphi_j - \varphi_k). \quad (7)$$

ГОМОГРАФИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим второе уравнение системы (6). Плоское решение, удовлетворяющее этому уравнению, можно построить исходя из соображений симметрии. Предположим, что частицы P_1, \dots, P_n , имеющие одинаковую массу m_1 , располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в точке P_0 , так что

$$\rho_j = 1, \quad \varphi_j = \frac{2\pi}{n} j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (8)$$

Очевидно, такая конфигурация частиц обладает осью вращения n -ого порядка, проходящей через центр многоугольника перпендикулярно его плоскости. Кроме того, она обладает зеркальной симметрией относительно оси, проходящей через центр многоугольника и любую из частиц, расположенных в его вершинах. Указанная симметрия системы не нарушится, если поместить частицы P_{n+1}, \dots, P_{2n} , имеющие одинаковую массу m_2 , в вершинах второго n -угольника, вписанного в окружность произвольного радиуса x с центром в точке P_0 . При этом многоугольники могут быть либо коллинеарными, когда

$$\rho_{n+j} = x, \quad \varphi_{n+j} = \frac{2\pi}{n} j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (9)$$

либо многоугольник P_{n+1}, \dots, P_{2n} повернут относительно многоугольника P_1, \dots, P_n на угол π/n , так что

$$\rho_{n+j} = x, \quad \varphi_{n+j} = \frac{\pi}{n}(2j-1) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Сначала рассмотрим случай коллинеарных многоугольников. Подставляя (8), (9) во второе уравнение системы (6) и учитывая соотношения (7), при $1 \leq j \leq n$ получаем его в виде

$$m_1 \sum_{k=1(k \neq j)}^n \left(1 - \frac{1}{8 / \sin(\frac{\pi}{n}(j-k))^\beta} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k)) +$$

$$+ m_2 x \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R_{j,k}^3} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k)) = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

а при $(n+1) \leq j \leq 2n$ – в виде

$$\frac{m_2}{x^2} \sum_{k=1(k \neq j)}^n \left(1 - \frac{1}{8 / \sin(\frac{\pi}{n}(j-k))^\beta} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k)) +$$

$$+ m_1 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{R_{j,k}^3} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k)) = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

где $R_{j,k} = (1 + x^2 - 2x \cos(2\pi(j-k)/n))^{1/2}$.

В уравнениях (11), (12) можно выделить следующие, легко вычисляемые суммы:

$$\sum_{k=1}^n \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k)) = \sum_{k=1}^n \sin(\frac{2\pi}{n}k) = 0,$$

$$\sum_{k=1(k \neq j)}^n \frac{\sin(\frac{2\pi}{n}(j-k))}{\sin(\frac{\pi}{n}(j-k))^\beta} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(\frac{2\pi}{n}k)}{\sin(\frac{\pi}{n}k)^\beta} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi(j-k)/n)}{R_{j,k}^3} = 0.$$

Следует подчеркнуть, что такие суммы возникают вследствие заданной симметрии системы. При этом уравнения (11), (12) удовлетворяются тождественно при любых значениях параметров m_1, m_2 и x . Подставляя (8), (9) в первое уравнение системы (6), получаем следующие два соотношения:

$$c^2 = Gp(m_0 + \frac{m_1}{4} S_1 + m_2 f_1(x, n)), \quad (13)$$

$$c^2 x^3 = Gp(m_0 + \frac{m_2}{4} S_1 + m_1 f_1(\frac{1}{x}, n)), \quad (14)$$

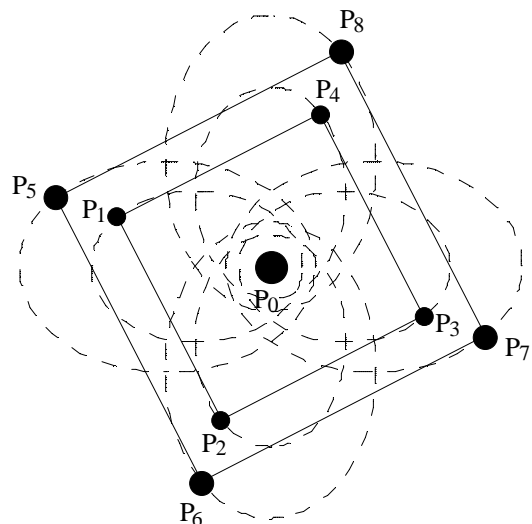
где $f_1(x, n) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos(2\pi k/n)}{(1 + x^2 - 2x \cos(2\pi k/n))^{3/2}}$,

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\pi k/n)}.$$

Исключая из соотношений (13), (14) неизвестную постоянную c , получаем уравнение для равновесного расстояния x в виде

$$m_0(1 - x^3) + m_2 \left(\frac{S_1}{4} - x^3 f_1(x, n) \right) +$$

$$+ m_1 \left(f_1(1/x, n) - x^3 \frac{S_1}{4} \right) = 0, \quad (15)$$



Корни уравнения (15) определяют возможные положения частиц P_{n+1}, \dots, P_{2n} в пространстве Нехвила. Напомним, что в случае коллинеарных многоугольников каждая пара частиц P_j, P_{n+j} находится на одном луче с вершиной в точке P_0 , составляющем с осью P_0x угол $\varphi_j = \frac{2\pi}{n} j$ ($j = \overline{1, n}$). Согласно соотношениям (3), в барицентрической системе координат частицы движутся по подобным траекториям, которые являются коническими сечениями с одинаковыми эксцентриситетами e и параметрами p и $x \cdot p$ соответственно. В случае $e < 1$ такими траекториями являются эллипсы. Соответствующая конфигурация для девяти частиц ($n = 4$) изображена на рисунке 2.

Теперь рассмотрим второй случай, когда многоугольник P_{n+1}, \dots, P_{2n} повернут относительно P_1, \dots, P_n на угол π/n . Подставляя (8), (10) во второе уравнение (6), при $1 \leq j \leq n$ перепишем его в виде

$$m_1 \sum_{k=1(k \neq j)}^n \left(1 - \frac{1}{8/\sin(\frac{\pi}{n}(j-k))^\beta} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k)) +$$

$$+ m_2 x \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R_{j,k}^3} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k) + \frac{\pi}{n}) = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

а при $(n+1) \leq j \leq 2n$ – в виде

$$\frac{m_2}{x^2} \sum_{k=1(k \neq j)}^n \left(1 - \frac{1}{8/\sin(\frac{\pi}{n}(j-k))^\beta} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k)) +$$

$$+ m_1 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{R_{j,k}^3} \right) \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k) - \frac{\pi}{n}) = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$\text{где } R_{j,k} = \left(1 + x^2 - 2x \cos(\frac{2\pi}{n}(j-k) \pm \frac{\pi}{n}) \right)^{1/2}.$$

Хотя уравнения (16), (17) несколько отличаются от соответствующих уравнений (11), (12), вследствие заданной симметрии системы они также содержат суммы, которые могут быть вычислены. Выполняя несложные преобразования, получаем:

$$\sum_{k=1}^n \sin(\frac{2\pi}{n}(j-k) \pm \frac{\pi}{n}) = \sum_{k=1}^n \sin(\frac{\pi}{n}(2k \pm 1)) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(\pi(2(j-k) \pm 1)/n)}{R_{j,k}^3} = 0.$$

Следовательно, уравнения (16), (17) также удовлетворяются при любых значениях параметров m_1, m_2 и x . При этом первое уравнение системы (6) эквивалентно следующим двум соотношениям:

$$c^2 = Gp(m_0 + \frac{m_1}{4} S_1 + m_2 f_2(x, n)), \quad (18)$$

$$c^2 x^3 = Gp(m_0 + \frac{m_2}{4} S_1 + m_1 f_2(\frac{1}{x}, n)), \quad (19)$$

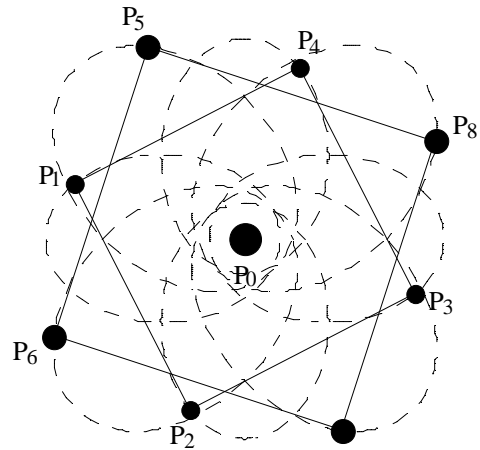
$$\text{где } f_2(x, n) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos(\pi(2k-1)/n)}{(1 + x^2 - 2x \cos(\pi(2k-1)/n))^{3/2}}.$$

Из соотношений (18), (19) получаем для равновесного расстояния x следующее уравнение

$$m_0(1 - x^3) + m_2 \left(\frac{S_1}{4} - x^3 f_2(x, n) \right) +$$

$$+ m_1 \left(f_2(1/x, n) - x^3 \frac{S_1}{4} \right) = 0. \quad (20)$$

Вычисляя корни этого уравнения при заданных значениях масс m_0, m_1, m_2 , мы найдем равновесную конфигурацию частиц в пространстве Нехвила. Задавая значения параметров p и e , будем получать различные гомографические решения задачи $N = 2n + 1$ тел, геометрически представляемые двумя n -угольниками, причем многоугольник P_{n+1}, \dots, P_{2n} повернут относительно P_1, \dots, P_n на угол π/n . В барицентрической системе координат при $e < 1$ траектории частиц массами m_1 и m_2 будут представлять собой эллипсы, параметры которых равны соответственно p и $x \cdot p$. В случае $n = 2$ соответствующие решения изображены на рисунке 3.



Очевидно, уравнение (20) отличается от соответствующего уравнения (15), полученного для коллинеарных многоугольников, только тем, что вместо функции $f_1(x, n)$ содержит функцию $f_2(x, n)$. Однако поведение этих функций при изменении x существенно отличается. Если $f_2(x, n)$ является непрерывной и ограниченной функцией x , то $f_1(x, n)$ имеет в точке $x = 1$ сингулярность, т.е. $f_1(x, n) \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow 1$ слева и справа соответственно. Поэтому уравнения (15) и (20) имеют различное число корней. Ввиду нелинейности этих уравнений их корни могут быть найдены только численно. Вычисления показывают, что уравнение (15) всегда имеет два корня, а уравнение (20) в зависимости от значений параметров может иметь один, два или три корня.

Следует отметить, что при $n = 2$, когда $S_1 = 1$, $f_2(x, 2) = 2/(1 + x^2)^{3/2}$, соотношение (20) с точностью до

замены $x \rightarrow \alpha$ принимает вид (1). Это означает, что ромбовидное решение, найденное в [6], является частным случаем найденного класса решений, определяемых уравнениями (3), (8), (10), (20) при $n = 2, e = 0$. В случае $e > 0$ частицы P_1, P_2, P_3, P_4 также будут располагаться в вершинах ромба, но ромб будет вращаться неравномерно и пульсировать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены новые гомографические решения задачи $N = 2n + 1$ тел, геометрически изображаемые двумя n -угольниками, расположенными в одной плоскости и имеющими общий центр. В вершинах первого многоугольника находятся частицы одинаковой массы m_1 , а в вершинах второго – частицы массой m_2 . Частица массой m_0 покоится в центре многоугольников, в то время как частицы m_1 и m_2 движутся вокруг нее по подобным траекториям, которые являются коническими сечениями с одинаковым эксцентриситетом e и параметрами p и $x \cdot p$ соответственно. Во время движения каждая пара частиц P_j, P_{n+j} ($j = \overline{1, n}$) либо находится на одном луче, либо на разных лучах с вершиной в точке P_0 , угол между которыми составляет π / n . При заданных значениях n и масс частиц m_0, m_1 и m_2 возможные значения параметра x находятся как решения уравнений (15), (20) соответственно.

Следует отметить также, что найденные решения допускают обобщения на случай p правильных n -угольников с общим центром в точке P_0 . Некоторые из них являются коллинеарны-УДК 517.983.53

Тузик А.И.

ПАРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ПОЧТИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИСЯ МНОЖИТЕЛЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В НОРМАЛЬНОМ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЯХ

Продолжается начатое в [1] исследование парного дискретного уравнения, которое с помощью оператора sgn записывается в виде

$$\begin{aligned} & \lambda_0 x_n + \lambda_2 x_{-n} + (-1)^n (\lambda_1 x_n + \lambda_3 x_{-n}) + \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_{n-k} + a_{n+k} + (-1)^k (a_{n-k} + a_{n+k})] x_k - \\ & - sgn(n+0,5) \{ \mu_0 x_n + \mu_2 x_{-n} + (-1)^n (\mu_1 x_n + \mu_3 x_{-n}) + \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} [b_{n-k} + b_{n+k} + (-1)^k (b_{n-k} + b_{n+k})] x_k \} = f_n, \\ & \lambda_k, \mu_k - const, k = \overline{0, 3}; n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что $\{a_n\}, \{b_n\} \in l_1, i = \overline{0, 3}; \{f_n\} \in l_2$. Решение уравнения (1) будем искать в классе $\{x_n\} \in l_2$. Частные случаи уравнения (1) с постоянными коэффициентами, когда все множители при $(-1)^k, k \in \mathbb{Z}$, равны нулю, рассматривались многими авторами [2–4] в различ-

ми, а другие повернуты на угол π / n . В вершинах каждого многоугольника должны располагаться тела одинаковой массы, что обеспечивает сохранение симметрии системы.

Автор выражает глубокую признательность проф. Е.А. Гребеникову за интересное и полезное обсуждение проблемы многих тел и ее приложений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А. Уинтнер. Аналитические основы небесной механики. – М.: Мир, 1967. – 523 С.
2. L.M.Perko, E.L.Walter. Regular Polygon Solutions of the N-Body Problem / Proc. American Math. Soc. – V. 94, No 2. – 1985. – 301-309.
3. В. Elmabsout. Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relatif dans le probleme des N corps / Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – V. 41. – 1988. – 131-151.
4. Е.А. Гребеников. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел / Математическое моделирование. – Т. 10, № 8. – 1998. – 74-80.
5. Е.А. Grebenikov. New exact solutions in the planar symmetrical (n+1)-body problem / Romanian Astronomical Journal. – V. 7, No. 2. – 1997. – 151-156.
6. Е.А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. Якубяк. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 210 С.
7. А.Н. Прокопья. О линейной устойчивости точных симметричных решений ньютоновой гравитационной задачи многих тел / Вестник Брестского государственного технического университета. – № 5. – 2001. – 25-29.
8. Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. – 3-е изд. – М.: Наука, 1975. – 800 С.

ных пространствах последовательностей.

Отметим, что наличие почти стабилизирующихся [4, с.127] множителей $(-1)^k, k \in \mathbb{Z}$, изменяющих знак аргумента у преобразования Лорана [5,6], позволяет рассматривать новые [5–11] дискретные уравнения типа свертки с переменными коэффициентами (ср. [4, 12–16]). В силу многочисленных и разнообразных приложений дискретных уравнений типа свертки [2, 14, 17] исследование не изученных ранее более общих уравнений такого типа является актуальным как для теории, так и для приложений.

Применяя к равенству (1) преобразование Лорана [2, с.222] и учитывая его свойства [2–13] получим равносильное сингулярное интегральное уравнение с конечной коммутативной [18] группой $G_4 = \{\alpha_0^+, \alpha_1^+, \alpha_2^-, \alpha_3^- = \alpha_1^+(\alpha_2^-)\}$ прямых и обратных сдвигов Карлемана, где $\alpha_0^+ = t, \alpha_1^+ = -t, \alpha_2^- = t^{-1}, \alpha_3^- = -t^{-1}, |t| = 1$

$$\begin{aligned} (KX)(t) & \equiv \sum_{k=0}^3 \{[\lambda_k + A_k(t)]X[\alpha_k(t)] - \\ & - [S(\mu_k + B_k)X(\alpha_k)](t)\} = F(t), \quad |t| = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

Тузик Альфред Иванович, к.физ.-мат.н., профессор каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.