

Следовательно, каждому волновому вектору соответствуют два решения для частоты. Построим график дисперсионных кривых, приведенных к максимальной циклической частоте при массе первого атома в два раза больше второго (рис.4):

```
Plot[{{ω+[k]/ω0 ->1., a ->1}, {ω-[k]/ω0 ->1., a ->1}, 1., √2, √3}, {k, 0., π},
PlotPoints ->120, AspectRatio ->0.6, PlotRange ->{0,2}
PlotStyle ->{{Thickness[0.01]}, {Thickness[0.01]}, ds, ds, ds},
Ticks->{UnitScale[0,π, π/4], UnitScale[0, 1.8, .5]},
Prolog->{Text["ω-[k]", {1,0.6}], Text["ω+[k]", {1,1.55}],
Text["√2", {3.4,1.4}],
Text["√3", {3.4,1.72}], PlotLabel->"", AxesLabel
->{"ka", "ω±/ω0"};
```

На рис.4 хорошо видны акустическая и оптическая ветви спектра колебаний цепочки атомов, что позволяет увидеть

УДК 531

Чопчиц Н.И.

ГРАВИТАЦИОННОЕ СЖАТИЕ В НЬЮТОНОВСКОЙ ТЕОРИИ И ИНВЕРСИЯ ВРЕМЕНИ

Широко распространено мнение, что гравитационное сжатие однородного пылевого облака можно рассматривать как обращенный во времени процесс расширения Вселенной с постоянной Хаббла не зависящей от координат [1]. Для последнего случая в ньютоновской теории имеем для скорости $\bar{v} = H\bar{r}$, где H – постоянная Хаббла, \bar{r} – радиус-вектор точки наблюдения относительно произвольной частицы. Закон изменения расстояния между частицами имеет вид

$$r_{AB}(t) = r_{AB}(t_0) \exp \int_{t_0}^t H(t) dt,$$

а закон изменения плотности, который вытекает из уравнения неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}(\rho \bar{v}) = 0$ в предположении $\rho = \rho(t)$

даст $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -3H\rho$, т.е. $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ не зависит от координат. Следовательно, если плотность ρ в какой-то момент не зависела от координат, то она не будет зависеть от координат и в последующие моменты времени, хотя и является функцией времени. При гравитационном сжатии на каждую частичку, находящуюся на расстоянии r от центра облака, действует, по мнению сторонников вышеупомянутой точки зрения, сила

$$F = G \frac{mM'}{r^2} = G \frac{m}{r^2} M \frac{r^3}{R^3} = \frac{GM}{R^3} mr,$$

где $M' = M \frac{r^3}{R^3}$ – масса части пылевого облака радиусом R и массой M , находящаяся внутри сферы радиуса r , m – масса рассматриваемой частицы. Следовательно, для ускорения имеем

$$a_r = -\frac{GM}{R^3} r.$$

Вводя безразмерную переменную $\xi(t) = \frac{r(t)}{r_0}$ равную от-

качественную разницу между колебательными модами кристаллической решетки.

Таким образом, в данной работе продемонстрированы примеры использования компьютерной алгебры «Mathematica» для решения задач по основам кристаллографии, которые подтверждают ее большие возможности, как в повышении наглядности решений, так и проведении символических вычислений по различным разделам физики твердого тела.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Краглер Р., Русаков К.И., Тарасюк Н.П. Визуализация кристаллических решеток в пакете «МАТЕМАТИКА»// Вестник Брестского государственного университета. - 2002. - № 5. - С. 151-160.
2. W. Ludwig *Festkorperphysik I*, Akadem. Verlagsgesellschaft (1970), Chapt. 4.1.3, p. 138
3. J.M. Ziman *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge Univ. Press (1969), Chapt. 2.2, p.33.

ношению расстояния от частицы до центра в произвольный момент времени к ее начальному расстоянию, будем иметь для скорости и ускорения $\bar{v} = \dot{r} = r_0 \dot{\xi}$, $a_r = r_0 \ddot{\xi}$, так что имеем

$$a_r = -\frac{GM}{R^3} \xi.$$

Поскольку в последнем выражении отсутствует начальное расстояние, утверждается, что в силу $\xi_0=1$ значение ξ для всех частиц облака сохраняется одинаковым и, следовательно, однородность облака, имеющая место при $t=0$, сохраняется и в последующие моменты времени. Покажем, что это не так. Предположим вначале, что частицы пылевого облака в процессе сжатия не обгоняют друг друга (это будет доказано в дальнейшем). Для частички, начальное расстояние от которой до центра равно r_0 , масса притягивающего ее шара равна

$$M' = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho_0$$

и с течением времени не изменяется, поэтому

$$\ddot{r} = -\frac{GM'}{r^2}.$$

Поскольку $\ddot{r} = v_r \frac{dv_r}{dr}$, то, интегрируя с учетом начального условия: при $r=r_0$, $v_{r0}=0$, получим

$$v_r = -\sqrt{2GM' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}.$$

Интегрируя еще раз, имеем

$$t = \sqrt{\frac{3}{8G\rho_0}} \left(\frac{\sqrt{r(r_0-r)}}{r_0} + \arctg \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1} \right). \quad (1)$$

В силу монотонности функции $t(r)$ для того, чтобы показать, что частицы при сжатии действительно не обгоняют

Чопчиц Николай Игнатъевич, профессор каф. физики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

друг друга, достаточно показать, что разность $t_{r_0} - t_{r_0+\Delta r}$ для всех r имеет знак Δr . Полагая Δr малым и ограничиваясь линейным по Δr разложением, получим, что указанное условие перестает выполняться если

$$\frac{3\sqrt{r}}{2r_0\sqrt{r_0-r}} - \frac{\sqrt{(r_0-r)r}}{r_0^2} > 0,$$

что дает в силу положительности r соотношение $r > 2,5r_0$. Поскольку при сжатии $r \leq r_0$, то действительно частицы при сжатии друг друга не обгоняют. Закон эволюции для плотности в эйлеровых координатах находится из очевидного соотношения

$$\rho_0 4\pi r_0^2 dr_0 = \rho 4\pi r^2 dr,$$

откуда для любого фиксированного момента времени зависимость плотности от радиальной координаты r имеет вид

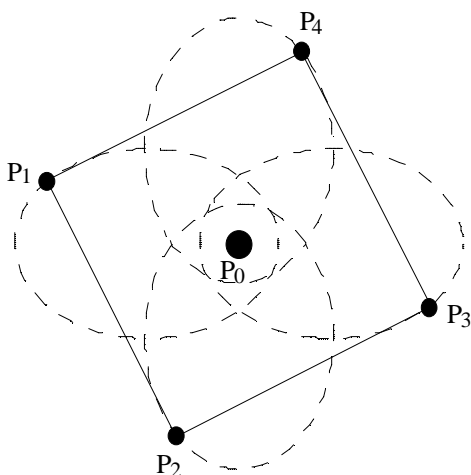
УДК 531

Прокопеня А.Н.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НОВЫХ ГОМОГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

ВЕДЕНИЕ

Задача N тел впервые была сформулирована И. Ньютоном и до сих пор привлекает внимание исследователей. Как известно, только в случае двух взаимодействующих тел ($N=2$) интегрирование дифференциальных уравнений движения сводится к квадратурам. При $N>2$ общее решение уравнений движения пока не найдено и, по-видимому, задача не может быть решена в конечном виде. Поэтому поиск точных частных решений уравнений движения остается весьма актуальным.



Особое место среди них занимают гомографические решения, качественная теория которых достаточно полно изложена в монографии А. Уинтнера [1]. Напомним, что решение $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$ ($j = 1, N$) задачи N тел называется гомографическим, если конфигурация, образованная этими телами в барицентрической системе координат, изменяется так, что она остается подобной себе при любом t . Очевидно, многие известные частные решения задачи многих тел являются го-

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial t}{\partial r_0}\right) / \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right),$$

где функция $t(r_0, r)$ дается выражением (1). Окончательный результат в силу громоздкости выражения выписывать не будем, однако достаточно очевидно, что $\rho(r)$ – убывающая функция от r при любом фиксированном t , что соответствует интуитивному представлению о максимальной плотности в центре в любой момент времени. Тем самым доказана ошибочность аргументации, приведенной выше и, следовательно, операция инверсии времени в моделях осциллирующей Вселенной не приводит автоматически к обратимости процесса расширения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Я.Б. Зельдович, Н.Д. Новиков. Стрoение – эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975. – 736 с.

мографическими. Так, общее решение задачи двух тел является гомографическим. В случае трех тел гомографические решения существуют либо в виде равностороннего треугольника, найденного Лагранжем, либо в виде коллинеарных решений Эйлера. В работах [2, 3] найдены гомографические решения задачи $(N+1)$ тел, определяющие равномерное вращение N тел P_1, P_2, \dots, P_N одинаковой массы m , находящихся в вершинах правильного N -угольника, вокруг $(N+1)$ -ого тела P_0 массой m_0 , помещенного в его центр. Затем было показано [4, 5], что тела P_1, P_2, \dots, P_N могут двигаться вокруг центрального тела P_0 не только по окружности, но и по одинаковым эллиптическим орбитам, каждая из которых повернута по отношению к соседней орбите на угол $2\pi/n$. Параметр p и эксцентриситет e орбит определяется начальными условиями. При движении частиц симметрия системы сохраняется, а многоугольник пульсирует и вращается с переменной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через точку P_0 перпендикулярно его плоскости. На рисунке 1 показана соответствующая конфигурация в случае $N = 4$. Следует отметить еще одно гомографическое решение, полученное в задаче пяти тел, которое изображается геометрически в виде ромба [6]. В противоположных вершинах ромба располагаются частицы одинаковой массы $m_1 = m_3, m_2 = m_4$, а в его центре находится частица массой m_0 , причем ромб вращается равномерно вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости ромба. Такое решение существует лишь в том случае, когда массы частиц удовлетворяют соотношению

$$m_1 = \frac{m_2(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2}) + 4m_0(\alpha^3 - 1)(1 + \alpha^2)^{3/2}}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}, \quad (1)$$

где α равняется отношению длин диагоналей ромба. В данной работе доказывается, что гомографические решения, найденные в работах [2-6], являются частными случаями

Прокопеня Александр Николаевич, к.ф.-м.н., доцент каф. физики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.