УДК 517.519.948

Мадорский В.М.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-КРАСНОСЕЛЬСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения нелинейного операторного уравнения

$$f(x)+g(x)=0 \tag{1}$$

f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D банахова пространства X в X в монографии [1] предложен алгоритм

$$x_{n+1}=x_n-\left[f'\left(x_n\right)\right]^{-1}\left(f(x_n)+g(x_n)\right)=x_n-\Delta x_n,$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots \tag{2}$$

Он подробно рассмотрен в [2], где доказана его локальная сходимость. Для решения уравнения (1) предлагается нелокальный алгоритм с регулировкой шага:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=-\beta_n\left(f(x_n)+g(x_n)\right),$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots \tag{3}$$

Шаг 2. Находится очередное приближение

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x_n. \tag{4}$$

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\| f(x_{n+1})\| \le \varepsilon$, ε-малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1}=min\left(1,\frac{\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|}{\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|}\beta_n\right),$$
$$\beta_0,\beta_{-1}\in\left[10^{-6},10^{-1}\right],\ \beta_{-1}<\beta_0 \tag{5}$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f предполагаем, что $f\in C_D^{(1)}$, производная Фреше $f'(x)$ оператора f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L и $\| [f'(x)]^{-1}\le B\|$, $\forall x\in D$. Относительно оператора g полагаем, что $\forall x\in D$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned}&\|\beta_n g(x_{n+1})-\beta_{n-1}g(x_n)\|\le\\&\le\beta_n K\|\Delta x_n\|\cdot\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|\end{aligned} \tag{6}$$

Условие вида (6) впервые, по-видимому, было рассмотрено в [3] (см. также [4], с. 297).

Теорема 1. Пусть в области $D=\overline{S}\left(x_0,\dfrac{B\| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ существует x^* – решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0,β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0=\beta_0(KB+LB^2)\cdot\| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|<1. \tag{7}$$

Тогда алгоритм (3) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Доказательство.

Из (3) и условий теоремы имеем

$$\begin{aligned}&\| f(x_{n+1})-f(x_n)-f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\|\le\\&\le\| f(x_n+\theta(x_{n+1}-x_n))-f'(x_n)\|\times\\&\times\| x_{n+1}-x_n\|\le L\| x_{n+1}-x_n\|^2.\end{aligned} \tag{8}$$

С учетом (8) справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})-\beta_n g(x_{n+1})-f(x_n)-\\&-\beta_{n-1}g(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)+\beta_n(f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n))\|\le\\&\le\beta_n^2LB^2\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|^2.\end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует соотношение, связывающее нормы квазиневязок на соседних шагах

$$\begin{aligned}&\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|\le(1-\beta_n)\| f(x_n)+\\&+\beta_{n-1}g(x_n)\|+\|\beta_n g(x_{n+1})-\beta_{n-1}g(x_n)\|+\\&+\beta_n^2LB^2\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|^2\le\\&\le(1-\beta_n(1-\varepsilon_n))\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|=\\&=q_n\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\varepsilon_n=\beta_n(KB+LB^2)\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|$, $q_n=1-\beta_n(1-\varepsilon_n)$.

Соотношение (10) является базовым при доказательстве сходимости процесса (3) – (5). При $n=0$ из (10) и условий теоремы имеем

$$\begin{aligned}&\| f(x_1)+\beta_0 g(x)_1\|\le(1-\beta_0(1-\varepsilon_0))\| f(x_0)+\\&+\beta_{-1}g(x_0)\|=q_0\| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|,\ q_0<1,\\&\| f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|<\| f(x_0)+\beta_1 g(x_0)\|.\end{aligned} \tag{11}$$

Из (5) и (11) следует, что $\beta_1>\beta_0$.

При $n=1$ из (5), (10) и условий теоремы получим оценку

$$\begin{aligned}&\| f(x_2)+\beta_1 g(x_2)\|\le(1-\beta_1(1-\varepsilon_1))\| f(x_1)+\\&+\beta_0 g(x_1)\|=(1-\beta_1(1-\varepsilon_0))\| f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|=\\&q_1\| f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|\le q_1q_0\| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|\end{aligned} \tag{12}$$

и так как $\beta_1>\beta_0$, то $q_1<q_0$. Из (12) следует, что $\| f(x_2)+\beta_1 g(x_2)\|<\| f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|$, тогда из (5) следует, что $\beta_2>\beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (10) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|\le\prod_{i=0}^{n}q_i\| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|<$$

Мадорский Виладий Меерович, *зав. каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.

$$<q_0^{n+1}\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|, \qquad (13)$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемых процессом (3) – (5) к x^*. При этом $\beta_n \nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\beta^*\neq 1$, тогда из (5), (13) имеем

$$0<C=\beta_0\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|=\beta_1\|f(x_1)+ +\beta_0 g(x_1)\|=\ldots=\beta_{n+1}\|f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|, \qquad (14)$$

и переходя к пределу в (14) при $n\longrightarrow\infty$ имеем, что

$$\lim_{n\to\infty}\beta_{n+1}\|f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|= =\beta^*\|f(x^*)+\beta^* g(x^*)\|=C\neq 0,$$

а из (13) следует, что этот предел равен нулю. Противоречие будет снято, если мы откажемся от того, что $\beta^*\neq 1.$ Итак, $\beta^*=1,$

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|= =\|f(x^*)+g(x^*)\|=0$$

Из соотношения (3), (13) и условий теоремы имеем оценку

$$\|x^*-x_n\|\le\sum_{i=n}^{\infty}\|\Delta x_i\|<\frac{Bq_0^n\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|}{1-q_0}, \qquad (15)$$

из которой следует и сильная (по норме) сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

При $n=0$ из (15) находим величину радиуса сферы $D=\bar{S}(x_0,r),\ r=\dfrac{B\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|}{1-q_0}.$ Как следует из (13), существует такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ итерации (3) – (5) попадают в область притяжения метода с $\beta_n\equiv 1,$ рассмотренного в [2].

Нетрудно показать, что, начиная с $n>n_0$, метод (3) – (5) имеет квадратичную скорость сходимости. В самом деле, при $\beta_n\equiv 1$ из (10) следует оценка

$$\|f(x_{n+1})+g(x_{n+1})\|\le(LB+KB^2)\|f(x_n)+g(x_n)\|^2,$$

или $\varepsilon_{n+1}\le\varepsilon_n^2,$ из которой следует локальная квадратичная сходимость процесса (3) – (5) с $\beta_n=1$ к x^*.Теорема доказана.

Замечание. Частный случай алгоритма (3) – (5) при $g(x)=0$ рассмотрен в работе [5].

Рассмотрим сходимость процесса (3) – (5) в условиях Вертгейма, то есть если производная Фреше оператора $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера вида

$$\|f'(x)-f'(y)\|\le L\|x-y\|^p,\ L>0,\ 0<p<1. \qquad (16)$$

Теорема 2. Пусть в интересующей нас области D выполняются условия теоремы 1, оператор $f'(x)$ удовлетворяет условию (16), начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0,β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0=\beta_0^p(KB+LB^{1+p})\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|^p<1. \qquad (17)$$

Тогда алгоритм (3) – (5) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*

Доказательство.

Из условий теоремы следует оценка

$$\|f(x_{n+1})-f(x_n)-f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\|\le \le\|f'(x_n+\theta(x_{n+1}-x_n))-f'(x_n)\|\times \times\|x_{n+1}-x_n\|\le L\|x_{n+1}-x_n\|^{1+p} \qquad (18)$$

С учетом (18) имеем

$$\|f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})-\beta_n g(x_{n+1})- -f(x_n)-\beta_{n-1}g(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)+ +\beta_n(f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n))\|\le \le\beta_n^{1+p}LB^{1+p}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|^{1+p},$$

откуда следует соотношение, связывающие нормы квазиневязок на соседних шагах.

$$\|f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|\le(1-\beta_n)\|f(x_n+ +\beta_{n-1}g(x_n))\|+\|\beta_n g(x_{n+1})-\beta_{n-1}g(x_n)\|+ +\beta_n^{1+p}LB^{1+p}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|^{1+p}\le \le(1-\beta_n(1-\varepsilon_n))\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|= =q_n\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|, \qquad (19)$$

здесь $\varepsilon_n=\beta_n^p(KB+B^{1+P})\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|^p,$ $q_n=1-\beta_n(1-\varepsilon_n).$

При $n=0$ из (19) и условий теоремы имеем

$$\|f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|\le(1-\beta_0(1-\varepsilon_0))\|f(x_0)+ +\beta_{-1}g(x_0)\|=q_0\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|, \qquad (20)$$

$$q_0<1,\ \|f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|<\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|.$$

Из (5) и (20) следует, что $\beta_1>\beta_0$.

При $n=1$ из (5), (20) и условий теоремы следует оценка

$$\|f(x_2)+\beta_1 g(x_2)\|\le(1-\beta_1(1-\varepsilon_1))\|f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|= =(1-\beta_1(1-\varepsilon_0))\times\|f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|= =q_1\|f(x_1)+\beta_0 g(x_1)\|\le q_1q_0\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|, \qquad (21)$$

и так как $\beta_1>\beta_0$, то $q_1<q_0$.

Из (5) и (21) имеем, что $\beta_2>\beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (19) справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|\le\prod_{i=1}^{n}q_i\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|< <q_0^{n+1}\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|, \qquad (22)$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемых процессом (3) – (5) к x^*. При этом $\beta_n\nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Доказательство того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\beta^*=1$, проводим вполне аналогично тому, как это делалось в теореме 1.

Из соотношений (3), (19) и условий теоремы имеем оценку

$$\| x^* - x_n \| \le \sum_{i=n}^{\infty} \| \Delta x_i \| < \frac{Bq_0^n \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}, \quad (23)$$

из которой следует и сильная сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

При $n = 0$ из (23) находим величину радиуса интересующей нас области $D = \bar{S}(x_0, r)$

$$r = \frac{B \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}.$$

Как следует из (19), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ итерации (3) – (5) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$, так что из (19) при $n > n_0$ следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| \le (LB + KB^{1+p}) \| f(x_n) + g(x_n) \|^{1+p},$$

или $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n^{1+p}$, из которой следует сверхлинейная сходимость процесса (3) – (5) с $\beta_n = 1$ к x^*. Теорема доказана.

Теорема 3. Если операторы f и g недифференцируемы, но оператор первой разделенной разности $[f(x_n, y_n)]^{-1}$ по норме равномерно ограничен в интересующей нас области D, константой $B > 0$, оператор $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой K в смысле [6], имеет место соотношение

$$\| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_{n+1}) \| \le$$
$$\le \beta_n L \| \Delta x_n \| \cdot \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|,$$

шаговая длина β_n и начальное приближение x_0 таковы, что выполняется условие

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (LB + KBM) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < 1,$$

то итерационный процесс (24), (4), (5) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* – решению уравнения (1), если решение в D существует. Здесь решение системы (3) заменено решением системы (24)

$$f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n (f(x_n) + g(x_n)), \quad (24)$$

$$\| E - [f(x_n, y_n)]^{-1} \| \le M, \quad y_n = x_n - \beta_n (f(x_n) + g(x_n)).$$

Доказательство сформулированной выше теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Как показывает вычислительная практика решения существенно нелинейных задач, алгоритм, описанный выше, является более эффективным (часто на порядок) по количеству итераций, если вместо формулы (5) для определения шаговой длины использовать следующие формулы

$$\beta_{n+1} = min\left(1, \frac{\| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|}{\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \beta_n}\right), \quad (25)$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in \left[10^{-6}, 10^{-1}\right], \ \beta_1 < \beta_0.$$

$$\beta_{n+1} = min\left(1, \frac{W_n}{2 \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \beta_n}\right), \quad (26)$$

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1}) W_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \|,$$

$$W_0 = \gamma \| f(x_0) + g(x_0) \|, \ \gamma << 1$$

Относительно процессов, описываемых формулами (3), (4), (25) или (3), (4), (26) могут быть сформулированы и доказаны теоремы, аналогичные теоремам 1, 2, 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Приближение решения операторных уравнений / Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. – М.: Наука, 1969.
2. Zabrejko P.P., Nguen D.F. The Majorant method in the Theory of Newton-Kantorovich Approximations and the Ptak Error Estimates // Numer. Funct. Anal and Optimiz, 1987, 9, № 5-6, P. 671-684.
3. Perron O. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen // J.Reine und Angew. Math, 1929, 161, S. 41-64.
4. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.
5. Жанлав Т., Пузынин И. В. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона // ЖВМ. – 1992. – Т.32, № 6. – С 146-156.
6. Ульм С. Об обобщенных разделенных разностях // Известия АН ЭССР, физика, математика. – 1967. – Т.16, № 1. – С. 13-26.

УДК 517.519.63

Мадорский В.М., Стрилец Н.Н.

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДАХ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассматриваются уравнения:

1. Дуффинга

$$\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) + x^3(t) = F(t).$$

2. Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}(t) - (1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = F(t).$$

Для каждого из уравнений были исследованы два типа тестовых задач:

1. Периодическая краевая задача с граничными условиями

$$x(0) - x(2\pi) = 0, \quad \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi) = 0$$

и точным решением

$$x(t) = 10 \sin 3t.$$

2. Непериодическая краевая задача с граничными условиями

$$x(0) = 0, \quad x(6) = 3{,}961900249464$$

и точным решением

$$x(t) = t \cos 3t.$$

Стрилец Николай Николаевич, *ассистент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.