УДК 517.977

Хомицкая Т.Г.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

1. Постановка задачи. Пусть $T=\left[t_*,t^*\right]$, $t_*<t^*<+\infty$ - промежуток управления, $h=\left(t_*-t^*\right)/N$, N - натуральное число; $T_u=\left\{t_*,t_*+h,\dots,t^*-h\right\}$. Функцию $u(t)$, $t\in T$, назовем дискретным управлением с периодом квантования h, если $u(t)=u(t_k)$, $t\in\left[t_k,t_{k+1}\right]$, $t_k=t_*+kh$, $k=\overline{0,N-1}$.

Рассмотрим терминальную линейную задачу оптимального управления (ОУ) в классе дискретных управлений

$$c_u'x(t)+c_v'v+c_w'w\to max;$$
$$\dot{x}=A(t)x+b(t)u+D(t)w;$$
$$x(t_*)=Mv;\ g_*\le Hx(t^*)\le g^*;$$
$$\left|u(t)\right|\le 1,\ t\in T;\ v_*\le v\le v^*;\ w_*\le w\le w^*. \tag{1}$$

Здесь $x=x(t)\in R^n$ - состояние системы управления в момент времени t; $u=u(t)\in R$ - значение скалярного управляющего воздействия в момент времени t; $v=\left(v_j,j\in J_v\right)\in R^p$ - вектор управляющих параметров начального состояния системы (1), $J_v=\left\{1,2,\dots,p\right\}$; $w=\left(w_k,k\in J_w\right)\in R^q$ - вектор управляющих параметров входного сигнала,; $c_u=R^n$; $c_v,v_*,v^*\in R^p$; $c_w,w_*,w^*\in R^q$; $M=\left(m_{(j)},j\in J_v\right)\in R^{n\times p}$; $m_{(j)}\in R^n$ - j-й столбец матрицы M; $A(t)\in R^{n\times n}$, $D(t)=\left(d_{(k)}(t),j\in J_w\right)\in R^{n\times q}$, $t\in T$, - кусочно-непрерывные матричные функции, $d_{(j)}(t)\in R^n$ - k-й столбец матрицы $D(t)$; $b(t)\in R^n$, $t\in T$, - кусочно-непрерывная векторная функция; g_*, $g^*\in R^m$, $H\in R^{m\times n}$, $H'=\left(h_{[i]},i\in I\right)$, $h_{[i]}\in R^n$ - i-ая строка матрицы H, $I=\left\{1,2,\dots,m\right\}$

Управляющую совокупность $\left(u(\cdot),v,w\right)$, состоящую из управляющего воздействия $u(\cdot)=\left(u(t),t\in T\right)$ и управляющих параметров v и w, а также соответствующую ей траекторию $x(\cdot)=\left(x(t),t\in T\right)$ системы (1) назовем допустимыми, если они удовлетворяют ограничениям задачи (1).

Допустимые управляющая совокупность $\left(u^0(\cdot),v^0,w^0\right)$ и траектория $x^0(\cdot)$ называются оптимальными (программным решением задачи (1)), если вдоль них критерий качества задачи (1) достигает максимального значения

$$c_u'x^0(t^*)+c_v'v^0+c_w'w^0=max\left(c_u'x(t^*)+c_v'v+c_w'w\right).$$

Субоптимальные (ε-оптимальные) управляющая совокупность $\left(u^\varepsilon(\cdot),v^\varepsilon,w^\varepsilon\right)$ и траектория $x^\varepsilon(\cdot)$ определяются неравенством

$$c_u'x^0(t^*)+c_v'v^0+c_w'w^0-c_u'x^\varepsilon(t^*)+c_v'v^\varepsilon+c_w'w^\varepsilon\le\varepsilon.$$

Пусть v^0, w^ε - оптимальные значения управляющих параметров задачи (1). Чтобы ввести понятие позиционного решения (оптимального управления типа обратной связи), погрузим задачу (1) в семейство задач

$$c_u'x(t^*)\to max;\ \dot{x}=A(t)x+b(t)u+D(t)w^0;$$
$$x(\tau)=z;\ g_*\le Hx\left(t^*\right)\le g^*; \tag{2}$$
$$\left|u(t)\right|\le 1,\ t\in T(\tau)=\left[\tau,t^*\right],$$

зависящее от скаляра $t\in T_n$ и n-вектора z.

Пусть $u^0\left(t\,|\,\tau,z\right)$, $t\in T(\tau)$, - программное решение задачи (2) для позиции $\left(\tau,z\right)$, X_τ - множество состояний z, для которых существуют программные решения задачи (2). Следуя теории оптимальных процессов, функцию

$$u^0\left(\tau,z\right)=u^0\left(\tau\,|\,\tau,z\right),\ z\in X_\tau,\ \tau\in T_u, \tag{3}$$

назовем ОУ типа (дискретной) обратной связи (позиционным решением задачи (1)), построение функции (3) - синтезом оптимальной обратной связи.

Цель работы - описать алгоритм построения позиционных решений задачи (1), использующий реализацию быстрого двойственного метода вычисления оптимальных программ, который представляет собой обобщение метода [1] на задачи ОУ с параметрами.

2. Программное решение задачи. Основное понятие адаптивного метода - опора. Чтобы определить ее динамический аналог для задачи (1), запишем последнюю с помощью формулы Коши [2]

$$x(t^*)=F\left(t^*,t_*\right)Mv+\int_{t_*}^{t^*}F\left(t^*,\tau\right)b(\tau)u(\tau)d\tau+$$
$$+\int_{t_*}^{t^*}F\left(t^*,\tau\right)D(\tau)wd\tau$$
$$\left(\dot{F}=A(t)F,F(t_*)=E,F\left(t,\tau\right)=F(t)F^{-1}(\tau)\right)$$

в эквивалентной функциональной форме

$$\sum_{t\in T_u}c_{(1)}(t)u(t)+\sum_{j\in J_v}c_{(2)j}v_j+\sum_{k\in J_w}c_{(3)k}w_k\to max$$
$$g_*\le\sum_{t\in T_u}f_{(1)}(t)u(t)+\sum_{j\in J_v}f_{(2)j}v_j+\sum_{k\in J_w}f_{(3)k}w_k\le g^*$$
$$\left|u(t)\right|\le 1,\ t\in T;\ v_*\le v\le v^*;\ w_*\le w\le w^* \tag{4}$$

Хомицкая Татьяна Георгиевна, *аспирант каф. методов оптимального управления Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, г. Минск.

Здесь

$$c_{(1)}(t)=\int_t^{t+h}\psi_c'(\tau)b(\tau)d\tau,$$

$$f_{(1)}(t)=\left(\int_t^{t+h}\psi_{hi}'(\tau)b(\tau)d\tau, i\in I\right),\ t\in T_u;$$

$$c_{(2)j}=\psi_c'(t_*)m_{(j)}+c_{vj},$$

$$f_{(2)j}=\left(\psi_{hi}'(t_*)m_{(j)}, i\in I\right),\ j\in J_v;$$

$$c_{(3)k}=\int_{t_*}^{t^*}\psi_c'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau+c_{wk},$$

$$f_{(3)k}=\left(\int_{t_*}^{t^*}\psi_{hi}'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau, i\in I\right),\ k\in J_w$$

$\psi_c(t), \psi_{hi}(t), t\in T$, - решения сопряженного уравнения

$$\dot{\psi}=-A'(t)\psi \qquad (5)$$

с начальными условиями $\psi(t^*)=c_u$, $\psi(t^*)=h_{[i]}$ соответственно.

Следуя [1], выделим из множества I произвольное подмножество I_{on}, из множеств T_u, J_v, J_w - произвольные подмножества T_{on}, J_{von}, J_{won} соответственно так, чтобы $|I_{von}|=|T_{on}|+|J_{von}|+|J_{won}|=r$. Построим $r\times r$ -матрицу

$$P_{on}=\begin{pmatrix} f_{(1)i}(t), t\in T_{on};\ f_{(2)ij}, j\in J_{von};\ f_{(3)ik}, k\in J_{won} \\ i\in I_{on}\end{pmatrix},$$

где $f_{(1)i}(t)$, $f_{(2)ij}$, $f_{(3)ik}$ - i-е элементы векторов $f_{(1)}(t)$, $f_{(2)j}$, $f_{(3)k}$ соответственно.

Определение 1. Совокупность множеств $K_{on}=\{I_{on}, T_{on}, J_{von}, J_{won}\}$ называется опорой задачи (4), если $\det P_{on}\neq 0$.

Для опоры K_{on} построим сопровождающие элементы.

1. Вектор потенциалов $v=(v_i, i\in I)$ определим по правилам: $v=(v_i, i\in I)=0$, $I_н=I/I_{on}$; $v_{on}=(v_i, i\in I_{on})$ найдем, решив уравнение

$$v'P_{on}=c_{on}',$$

где $c_{on}=\left(c_{(1)}(t), t\in T; c_{(2)j}, j\in J_{von}; c_{(3)k}, k\in J_{won}\right)$.

2. Котраектория $\psi(t)$, $t\in T$, - решение сопряженного уравнения (5) с начальным условием $\psi(t^*)=c_u-H'v$.

3. Коуправление - динамический аналог вектора оценок - $\delta_{(1)}(t)$, $t\in T$, и оценки $\delta_{(2)j}$; $j\in J_v$; $\delta_{(3)k}$, $k\in J_w$, вычислим по формулам:

$$\delta_{(1)}(t)=\int_t^{t+h}\psi'(\tau)b(\tau)d\tau,\ t\in T_u;$$

$$\delta_{(2)j}=\psi'(t_*)m_{(j)}+c_{vj},\ j\in J_v;$$

$$\delta_{(3)k}=\int_{t_*}^{t^*}\psi'(\tau)d_{(k)}(\tau)d\tau\psi'(t_*)+c_{wk},\ k\in J_w.$$

4. Псевдоуправление $\omega(t)$, $t\in T$, управляющие псевдопараметры v_ω, w_ω и выходной псевдосигнал $\varsigma(t^*)=\left(\varsigma_i(t^*), i\in I\right)$ в момент t^*. Для их построения сначала зададим опорные элементы выходного псевдосигнала $\varsigma_i(t^*)$, $i\in I_{on}$:

$\varsigma_i(t^*)=g_{*i}$ при $v_i<0$; $\varsigma_i(t^*)=g_i^*$ при $v_i>0$; $\varsigma_i(t^*)\in\left[g_{*i}, g_i^*\right]$ при $v_i=0$, $i\in I_{on}$, значения псевдоуправления $\omega(t)$, $t\in T_н=T_u/T_{on}$, в неопорные моменты:

$\omega(t)=-1$ при; $\omega(t)=1$ при $\delta_{(1)}(t)>0$; $\omega(t)\in[-1;1]$ при $\delta_{(1)}(t)=0$, $t\in T_н$, и неопорные компоненты управляющих псевдопараметров $v_{\omega j}$, $j\in J_{vн}=J_v\setminus J_{von}$; $w_{\omega k}$, $k\in J_{wн}=J_w\setminus J_{won}$

$v_{\omega j}=v_{*j}$ при $\delta_{(2)j}<0$; $v_{\omega j}=v_j^*$ при $\delta_{(2)j}>0$; $v_{\omega j}\in\left[v_{*j}; v_j^*\right]$ при $\delta_{(2)j}=0$, $j\in J_{vн}$;

$w_{\omega k}=w_{*k}$ при $\delta_{(3)k}<0$; $w_{\omega k}=w_k^*$ при $\delta_{(3)k}>0$; $w_{\omega k}\in\left[w_{*k}; w_k^*\right]$ при $\delta_{(3)k}=0$, $k\in J_{wн}$;

Пусть $æ(t^*)$ - значение в момент t^* решения $æ_0(t)$, $t\in T$, прямого уравнения (1) с начальным условием $x(t^*)=\sum_{j\in J_{vн}}m_{(j)}v_{\omega j}$, программой $u(t)=\omega(t)$, $t\in T_н$, $u(t)=0$, $t\in T_{on}$, и управляющим параметром $w=\left(w_k=0, k\in J_{won}; w_k=w_{\omega k}, k\in J_{wн}\right)$. Опорные элементы псевдоуправления $\omega(t)$, $t\in T_{on}$, и опорные компоненты управляющих параметров $j\in J_{von}$; $w_{\omega k}$, $k\in J_{won}$ найдем, решив уравнение

$$P_{on}\overline{\omega}=\varsigma_{on}-H_{on}\ æ(t^*).$$

Здесь $\overline{\omega}=\left(\omega(t), t\in T_{on}; v_{\omega j}, j\in J_{von}; w_{\omega k}, k\in J_{won}\right)$, $P_{on}\overline{\omega}=\varsigma_{on}-H_{on}$, $\varsigma_{on}=\left(\varsigma_i(t^*), i\in I_{on}\right)$, $H_{on}'=\left(h_{[i]}, i\in I_{on}\right)$.

Решение $æ(t)$, $t\in T$, прямого уравнения (1) с начальным условием $x(t^*)=Mv_{\omega j}$, значением параметра $w=w_\omega$ и дискретной программой $u(t)=\omega(t)$, $t\in T$; назовем псевдотраекторией.

Неопорные компоненты вектора $\varsigma(t^*)$ равны $\varsigma_н=\left(\varsigma_i(t^*), i\in I_н\right)=H_н\ æ(t^*)$, $H_н'=\left(h_{[i]}, i\in I_н\right)$.

Определение 2. Пару $\left\{(u(\cdot), v, w), K_{on}\right\}$ из допустимой совокупности $(u(\cdot), v, w)$ и опоры K_{on} назовем опорной совокупностью.

Опора используется прежде всего для идентификации оптимальных управляющих совокупностей.

Принцип максимума. Для оптимальности допустимой управляющей совокупности $(u(\cdot), v, w)$ и соответствующей ей траектории $x(t)$, $t\in T$, необходимо и достаточно существования такой опоры K_{on}, что на сопровождающих ее векторе потенциалов $\boldsymbol{\nu}$ и котраектории $\boldsymbol{\psi}(t)$, $t \in T$, выполняются

1) условие максимума для программы

$$\int_t^{t+h} \psi'(\tau) b(\tau) d\tau\, u(t) = \max_{|u| \le 1} \int_t^{t+h} \psi'(\tau) b(\tau) d\tau\, u,$$

$$t \in T; \tag{6}$$

2) условие максимума для начальных параметров

$$\left(\psi'(t_*) m_{(j)} + c_{\nu j}\right) v_j = \max_{v_{*j} \le \tilde{v} \le v_j^*} \left(\psi'(t_*) m_{(j)} + c_{\nu j}\right) \tilde{v},$$

$$j \in J_\nu; \tag{7}$$

3) условие максимума для входных параметров

$$\left(\int_{t_*}^{t^*} \psi'(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau + c_{wk}\right) w_k =$$

$$= \max_{w_{*j} \le \tilde{w} \le w_j^*} \left(\int_{t_*}^{t^*} \psi'(\tau) d_{(k)}(\tau) d\tau + c_{wk}\right) \tilde{w}, \quad k \in J_w \tag{8}$$

4) условие трансверсальности для траектории

$$v' H x(t^*) = \max_{g_* \le x \le g^*} v' x$$

Определение 3. Опору K_{on}, на которой вместе с оптимальной управляющей совокупностью $(u(\cdot), \nu, w)$ выполняются соотношения (6) - (9), назовем оптимальной.

Критерий оптимальности опоры. Для оптимальности опоры K_{on} необходимо и достаточно, чтобы на некоторых сопровождающих ее псевдоуправлении $\omega(t)$, $t \in T$, управляющих псевдопараметрах v_ω, w_ω и выходном псевдосигнале $\varsigma(t^*) = H\, æ(t^*)$ выполнялись неравенства

$|\omega(t)| \le 1$, $\quad t \in T_{on}$; $\quad v_{*j} \le v_{\omega j} \le v_j^*$; $\quad j \in J_{von}$;

$w_{*k} \le w_{\omega k} \le w_k^*$, $k \in J_{won}$; $g_{*j} \le \varsigma_i(t^*) \le g_i^*$, $i \in I_н$.

Определение 4. Опора K_{on} называется регулярной, если сопровождающие ее вектор потенциалов ν, коуправление $\delta_{(1)}(t)$, $t \in T$, и оценки $\delta_{(2)j}$, $j \in J_\nu$; $\delta_{(3)k}$, $k \in J_w$ удовлетворяют соотношениям

$\nu_i \ne 0$, $i \in I_{on}$; $\delta_{(1)}(t) \ne 0$, $t \in T_н$; $\delta_{(2)j} \ne 0$, $j \in J_{\nu н}$; $\delta_{(3)k} \ne 0$, $k \in J_{wн}$.

Регулярную опору сопровождают единственные псевдоуправление $\omega(t)$, $t \in T$, управляющие псевдопараметры ν_ω, w_ω и выходной псевдосигнал $\varsigma_i(t^*)$.

На основе этих результатов разработан быстрый двойственный метод решения задачи (4), который представляет собой преобразование опор до получения оптимальной опоры. Сопровождающие ее псевдоуправление и управляющие псевдосигналы составляют оптимальную управляющую совокупность.

3. Синтез оптимальных управлений типа обратной связи. Как известно, оптимальные программы позволяют лишь выявлять потенциальные возможности систем управления. В реальных процессах управления используются, как правило, управления типа обратной связи. Использование обратных связей (3) предполагает, что в процессе управления состояния системы (1) измеряются в дискретные моменты $t \in T$ и по этой информации вырабатываются текущие управляющие воздействия.

Замену в (1) управления u на функцию (3) называют замыканием системы управления. Траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x) + D(t)w^0 + y(t),$$

$$x(t_*) = Mv^0, \tag{10}$$

при постоянно действующем кусочно-непрерывном возмущении $y(t)$, $t \in T$, представляет решение уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t) + D(t)w^0 + y(t),\ x(t_*) = Mv^0,$$

$$u(t) = u^0(\tau, x(\tau)), \qquad t \in [\tau, \tau + h[, \qquad \tau = t_* + kh,$$

$$k = \overline{0, N-1}.$$

Будем считать, что уравнение (10) описывает поведение физического прототипа математической модели (1). В этом случае функция $y(t)$, $t \in T$, содержит неточности математического моделирования и неизвестные возмущения, действующие в процессе управления.

Пусть по ходу некоторого конкретного процесса управления реализуется возмущение $y^*(t)$, $t \in T$. Ему будет соответствовать траектория $x^*(t)$, $t \in T$, замкнутой системы (10), удовлетворяющая тождеству

$$\dot{x}^* \equiv A(t)x^*(t) + b(t)u^0(t, x^*(t)) + D(t)w^0 + y^*(t),$$

$$t \in T,\ x(t_*) = Mv^0 \tag{11}$$

Из тождества (11) видно, что в процессе управления обратная связь (3) используется не полностью (не для всех $z \in X_t$, $t \in T_u$). Нужны лишь ее значения $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T_u$, вдоль изолированной траектории $x^*(t)$, $t \in T$. При этом нет необходимости знать функцию $u^*(t)$, $t \in T_u$ заранее, достаточно уметь вычислять текущие значения $u^*(\tau)$ по мере поступления измерений текущих состояний $x^*(\tau)$. Функцию $u^*(t)$, $t \in T$ назовем реализацией оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления.

Будем говорить, что построение $u^*(t)$, $t \in T$, осуществляется в режиме реального времени, если в каждой текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$ время $s(\tau)$ вычисления значения $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ не превосходит $h > 0$. Устройство, способное выполнять такую работу, называется оптимальным регулятором.

Алгоритм работы оптимального регулятора базируется на определении оптимальной обратной связи (3) и на двойственном методе (п. 2).

До начала процесса управления оптимальный регулятор вычисляет оптимальную совокупность $\left(u^0(\cdot), \nu^0, w^0\right)$ задачи (1). Время, затраченное на выполнение этой работы, не имеет никакого значения. Для последующего процесса управления запоминается следующая информация: **1)** начальный участок оптимальной программы $u^0\left(t \,|\, t_*, x(t_*)\right)$, $t \in [t_*, t_* + 2h]$, и оптимальные управляющие параметры v^0, w^0; **2)** оптимальная опора $K_{on}^0 = K_{on}^0(t_*)$; **3)** вектор $f_{(1)}(t_*)$, матрица $P_{|on|} = P_{|on|}(t_*) = \ = \left(f_{(1)}(t), t \in T;\right.$; **4)**

$f_{(2)j},\, j\in J_{von};\; f_{(3)k},\, k\in J_{won})$ множество неопорных нулей $T_{on}=T_{on}(t_*)=T^0_{on}(t_*)\cup T_{н0}(t_*)\cup\{t_*,t^*\}$; $T_s(t_*)$, $s=\overline{0,s^*}$, - промежутки постоянства знака коуправления $\delta^{t_*}_{(1)}(t)$, $t\in T_u=T_u(t_*)$; $s^*=s^*(t_*)=|T_{on}(t_*)|-1$; **5)** значения $\psi_c(t)$, $\psi_{hi}(t)$, $i\in I$; $t\in T_{он}(t_*)\setminus t^*$; **6)** значение

$$\gamma=\gamma(t_*)=\begin{cases} u^0(t_*\,|\,t_*,x(t_*)), & \text{если } t_*\notin T^0_{on}(t_*);\\ sign\,\delta^{t_*}_{(1)}(t_*+h), & \text{если } t_*\in T^0_{on}(t_*);\end{cases}$$

7) векторы $r_u(t_*)=\gamma(t_*)\sum_{s=0}^{s^*(t_*)}(-1)^s\sum_{t\in T_s(t_*)}f_{(1)}(t)$, $\xi^*(t_*)=r_v(t_*)+\sum_{j\in J^0_{von}}f_{(2)j}v^0_j$, $r_v(t_*)=\sum_{j\in J^0_{vn}}f_{(2)j}v^0_j$, $r_w(t_*)=\sum_{k\in J^0_{wn}}f_{(3)j}w^0_k$,

$\mu^*(t_*)=r_w(t_*)+\sum_{k\in J^0_{won}}f_{(3)j}w^0_k$; **8)** вектор потенциалов $v=v(t_*)$; **9)** выходной псевдосигнал $\varsigma^{t_*}(t^*)$.

Процесс управления стартует в момент t_* с начального состояния $x(t_*)=Mv^0$, когда регулятор на вход объекта управления начинает подавать управляющее воздействие $u^*(t)=u^0(t\,|\,t_*,x(t_*))$, $t\ge t_*$, и входной сигнал w^0.

В момент t_*+h регулятор получит информацию о состоянии $x^*(t_*+h)$, в котором оказался объект управления под действием управляющих сигналов $u^*(t_*)$, w^0 и реализовавшегося возмущения $y^*(t)$, $t\in[t_*,t_*+h]$.

Обозначим через $x_0(t_*+h)$ состояние системы, в которое она перешла бы в момент t_*+h из состояния $x(t_*)$ при отсутствии возмущения. Реальное состояние $x^*(t_*+h)$ связано с идеальным состоянием $x^0(t_*+h)$ соотношением

$$x^*(t_*+h)=x^0(t_*+h)+\int_{t_*}^{t_*+h}F(t_*+h,t)y^*(t)dt$$

При ограниченном возмущении $y^*(t)$, $t\in[t_*,t_*+h]$, величина $\left\|\int_{t_*}^{t_*+h}F(t_*+h,t)y^*(t)dt\right\|$ тем меньше, чем меньше h.

Поскольку для выработки управления $u^*(t_*+h)$, согласно определению (3), нужно знать решение $u^0(t\,|\,t_*+h,x^*(t_*+h))$, $t\in T(t_*+h)$, задачи (2) для позиции $(t_*+h,x^*(t_*+h))$, то из вышеизложенного следует, что оптимальный регулятор, взяв $K^0_{on}(t_*)$ в качестве начальной опоры, с помощью двойственного метода быстро корректирует ее до построения оптимальной опоры $K^0_{on}(t_*+h)$.

Функциональную форму задачи (2), которую должен решить оптимальный регулятор в момент t_*+h, запишем следующим образом:

$$\sum_{t\in T_u(t_*)}c_{(1)}(t)u(t)\to max;$$

$$\tilde g_*(t_*+h)\le\sum_{t\in T_u(t_*)}f_{(1)}(t)u(t)\le\tilde g_*(t_*+h);\quad (12)$$

$$u^*(t_*)\le u(t_*)\le u^*(t_*);\ |u(t)|\le1,\ t\in T_u(t_*+h),$$

где $\tilde g^*(t_*+h)=g^*-\Delta\tilde g(t_*+h)$,

$\tilde g_*(t_*+h)=g_*-\Delta\tilde g(t_*+h)$,

$\Delta\tilde g(t_*+h)=\xi^*(t_*)-\mu^*(t_*)+\Delta g(t_*)$,

$\Delta g(t_*)=\left(\int_{t_*}^{t_*+h}\psi'_{hi}(t)y^*(t)dt,\ i\in I\right)$.

Из равенства

$$\begin{aligned}x^*(t_*+h)&=F(t_*+h)F^{-1}(t_*)x(t_*)+\\&+\int_{t_*}^{t_*+h}F(t_*+h)F^{-1}(t)b(t)dt\,u^*(t_*)+\\&+\int_{t_*}^{t_*+h}F(t_*+h)F^{-1}(t)D(t)dt\,w^0+\\&+\int_{t_*}^{t_*+h}F(t_*+h)F^{-1}(t)y^*(t)dt\end{aligned}$$

получим

$$\int_{t_*}^{t_*+h}F^{-1}(t)y^*(t)dt=F^{-1}(t_*+h)x^*(t_*+h)-F^{-1}(t_*)x(t_*)-$$
$$-\int_{t_*}^{t_*+h}F^{-1}(t)b(t)dt\,u^*(t_*)-\int_{t_*}^{t_*+h}F^{-1}(t)D(t)dt\,w^0$$

откуда следует, что

$$\Delta g(t_*)=\xi^*(t_*+h)-\xi^*(t_*)-f_{(1)}(t_*)u^*(t_*)-\Delta\mu^*(t_*).$$

Здесь $\Delta\mu^*(t^*)=\left(\sum_{k\in J_w}\int_{t_*}^{t_*+h}\psi'_{hi}(t)d_{(k)}(t)dt\,w^0_k,\ i\in I\right)$.

Чтобы найти $\xi^*(t_*+h)$, $\Delta\mu^*(t_*)$, $\Delta g(t_*)$ проинтегрируем уравнение (5) на промежутке $[t_*,t_*+h]$ с начальными условиями $\psi_{hi}(t_*)$, $i\in I$; текущее состояние $x^*(t_*+h)$ оптимальному регулятору уже известно (оно поступило в регулятор в момент t_*+h).

Положим $K_{on}(t_*+h)=K^0_{on}(t_*)$, где $K^0_{on}(t_*)=\{I^0_{on}(t_*),T^0_{on}(t_*),J^0_{von}(t_*),J^0_{won}(t_*)\}$.

1) Рассмотрим ситуацию, когда множества опорных индексов $J^0_{von}(t_*)$, $J^0_{won}(t_*)$ не пусты:

$$|J^0_{von}|\ne\varnothing \text{ или } |J^0_{won}|\ne\varnothing.$$

В противном случае переходим к **2)**.

Поскольку в задаче (12) управляющие параметры v, w «защемлены»

$$v^0\le v\le v^0,\ w^0\le w\le w^0,$$

то двойственный метод начинает итерацию с вывода из опоры $K_{on}(t_*+h)$ индексов $j\in J^0_{von}$, $k\in J^0_{won}$. Для этого достаточно на первой итерации компоненты вектора $\Delta\delta_{on}$ - изменение коуправления $\Delta\delta_{(1)}(t)$, $t\in T(t_*+h)$, и оценок $\Delta\delta_{(2)j}$, $j\in J^0_{von}$; $\Delta\delta_{(3)k}$, $k\in J^0_{won}$, - определить следующим образом

$$\Delta\delta_{(2)j}=\pm1,\ j\in J^0_{von};\ \Delta\delta_{(3)k}=\pm1,\ k\in J^0_{won}.$$

При этом, если $t_*\in T^*_{on}(t_*)$, то положим

$$\Delta\delta_{(1)}(t_*)=\pm1,\ \Delta\delta_{(1)}(t)=0,\ t\in T_{on}(t_*+h)\setminus t_*, \quad (13)$$

а в случае $t_*\in T^0_{on}(t_*)-\Delta\delta_{(1)}(t)=0$, $t\in T_{on}(t_*+h)$. Кроме этого в процессе выполнения итерации исключим из рассмотрения множества $J^0_{vн}$ и $J^0_{wн}$. Это не позволит войти в новую опору индексам из этих множеств. Очевидно, что после итерации опора $\overline{K}_{on}(t_*+h)$ будет иметь вид $\{\overline{I}_{on}(t_*+h);\overline{T}_{on}(t_*+h)\}$. Если после итерации полученная опора не оптимальна, то продолжаем выполнение итераций двойственного метода на множестве $T_u(t_*+h)$, что гарантирует исключение момента t_* из опоры $K^0_{on}(t_*+h)$.

После получения оптимальной опоры $K^0_{on}(t_*+h)$ обновляем информацию, хранящуюся в памяти ЭВМ, для момента t_*+h, полагая

$$u^*(t_*+h)=\begin{cases}\gamma(t_*+h), & t_*+h\notin T^0_{on}(t_*+h);\\ \omega(t_*+h\,|\,t_*+h), & t_*+h\in T^0_{on}(t_*+h).\end{cases}$$

Вместо векторов $\psi_c(t_*)$, $\psi_{hi}(t_*)$, $i\in I$; $f_{(1)}(t_*)$ подсчитаем и запомним $\psi_c(t_*+h)$, $\psi_{hi}(t_*)$, $i\in I$, $f_{(1)}(t_*+h)$; векторы $\xi^*(t_*)$, $\mu^*(t_*)$, $\varsigma^{t_*}(t^*)$ заменим на $\xi^*(t_*+h)$, $\mu^*(t_*+h)=\mu^*(t_*)-\Delta\mu^*(t_*)$, $\varsigma^{t_*+h}(t^*)$. Из памяти удалим векторы $r_v(t_*)$, $r_w(t_*)$.

Если в ходе итерации двойственного метода возникает ситуация, когда не существует конечного шага σ, при котором появляется новый нуль у возмущенного коуправления $\delta_{(1)}(t,\sigma)=\delta_{(1)}(t)+\sigma\Delta\delta_{(1)}(t)$, $t\in T_u(t_*+h)$, то это означает, что задача (12) не имеет допустимых управлений, т.е. текущее состояние $x^*(t_*+h)$ вышло за пределы множества X_{t_*+h}.

2) $\left(\left|J^0_{von}\right|\neq\varnothing\right.$ и $\left.\left|J^0_{won}\right|\neq\varnothing\right)$. Положим $\varsigma^{t_*+h}_{on}(t^*)=\varsigma^{t_*}_{on}(t^*)$. Найдем опорные значения псевдоуправления $\omega_{on}(t_*+h)=(\omega(t\,|\,t_*+h),t\in T_{on}(t_*+h))$ из уравнения

$$P_{on}(t_*)\omega_{on}(t_*+h)=\varsigma^{t_*+h}_{on}(t_*)-$$
$$-\xi^*_{on}(t_*)-\mu^*_{on}(t_*)-\Delta g_{on}(t_*)-r_{uon}(t_*)$$

и выходной псевдосигнал

$$\varsigma^{t_*+h}(t^*)=P_{|on|}(t_*)\omega(t_*+h)+$$
$$+\xi^*_{on}(t_*)-\mu^*_{on}(t_*)-\Delta g(t_*)-r_u(t_*)$$

Если выполняются неравенства

$$\left|\omega(t\,|\,t_*+h)\right|\le1,\ t\in T_{on}(t_*+h),$$
$$g_{*i}\le\varsigma^{t_*+h}_i(t_*)\le g^*_i,\ i\in I \quad (14)$$

и условие $t_*\notin T_{on}(t_*+h)$, то положим $K^0_{on}(t_*+h)=K_{on}(t_*+h)=K^0_{on}(t_*)$;

$$u^*(t_*+h)=\begin{cases}\omega(t_*+h|t_*+h), & \text{если } t_*+h\in T^0_{on}(t_*+h);\\ 1, & \text{если } \gamma(t_*)=1 \text{ и } t_*+h\notin T_{н0}(t_*);\\ & \text{или } \gamma(t_*)=-1 \text{ и } t_*+h\in T_{н0}(t_*);\\ -1, & \text{если } \gamma(t_*)=-1 \text{ и } t_*+h\notin T_{н0}(t_*);\\ & \text{или } \gamma(t_*)=1 \text{ и } t_*+h\in T_{н0}(t_*).\end{cases}$$

Информацию, хранящуюся в памяти ЭВМ для момента t_*, преобразуем для момента t_*+h следующим образом. Положим $P_{|on|}(t_*+h)=P_{|on|}(t_*)$, $v(t_*+h)=v(t_*)$, $r_u(t_*+h)=r_u(t_*)-f_{(1)}(t_*)u^*(t_*)$, $\varsigma^{t_*+h}(t_*)=\varsigma^{t_*}(t_*)$. Если $t_*+h\in T_{н0}(t_*)$, то полагаем $T_{н0}(t_*+h)=T_{н0}(t_*)\setminus t_*+h$; $s^*(t_*+h)=s^*(t_*)-1$; перенумеруем точки множества $T_{он}(t_*+h)$. При $t_*+h\in T^0_{on}(t_*+h)$ или $t_*+h\in T_{н0}(t_*)$ положим $\gamma(t_*+h)=-\gamma(t_*)$. Остальная информация преобразуется как и в ситуации **1)**.

При выполнении неравенств (14) и условия $t_*\in T_{on}(t_*+h)$ момент t_* выводим из опоры двойственным методом (п. 2), взяв вариацию (13). Полученная после выполнения итерации двойственного метода опора $K^0_{on}(t_*+h)$ будет оптимальной. Информацию для момента t_*+h готовим аналогично ситуации **1)**.

В случае нарушения неравенств (14) для построения оптимальной опоры $K^0_{on}(t_*+h)$ задачи (12) используем двойственный метод (п. 2). При этом, если $t_*\in T^0_{on}(t_*)$, то выводим t_* из начальной опоры $K_{on}(t_*+h)$ уже на первой итерации по описанным выше правилам (ситуация 1)). В дальнейшем процессе решения задачи (12) операции двойственного метода по преобразованию опоры выполняем на множестве $T_u(t_*+h)$ (так же поступаем и в случае с $t_*\notin T_{on}(t_*+h)$).

Рассмотрим ситуацию, которая возникает в произвольный текущий момент $\tau\in T_u$ процесса управления. По предположению, оптимальный регулятор проработал в моменты t_*, t_*+h, … , $\tau-h$ и получил управления $u^*(t_*)$, $u^*(t_*+h)$, …, $u^*(\tau-h)$. Под действием этих управляющих сигналов и реализовавшегося возмущения $y^*(t)$, $t\in[t_*,\tau]$, объект управления в момент τ оказался в состоянии $x^*(\tau)$. Описание операций для выработки управления $u^*(\tau)$ аналогично ситуации **2)** для момента t_*+h.

Частое повторение ситуации $\tau - h \in T_{on}^{0}(\tau - h)$ означает, что в замкнутой системе (10) возник дискретный аналог скользящего режима. Способы регуляризации скользящего режима в рамках рассматриваемого подхода описаны в [3].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *ГабасовР., Дмитрук Н.М., Кириллова ФМ.* Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // АиТ. 2002. № 3. С. 3 - 26.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973.
3. *Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Субоптимальный регулятор, сглаживающий управления и фильтрирующий высокочастотные возмущения на участках скольжения // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 6. С. 25 - 32.

УДК 539.3

Босяков С.М.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И КЛАССИФИКАЦИЯ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

ВВЕДЕНИЕ

Достаточно полный анализ закономерностей распространения упругих волн в кубически анизотропных средах проведен в большом количестве публикаций, в том числе [1—4]. В них большое место уделено исследованию особенностей кривых высшего порядка (кривые обратных скоростей, волновые фронты). Некоторые из них, например параболические точки на кривых обратных скоростей (точки возврата на волновых фронтах) [5, 6], легли в основу классификации анизотропных сред. Так, в [6] выделены десять групп гексагонально-анизотропных сред, а также четыре основные и три промежуточные группы кубически анизотропных сред с общими для каждой группы упругими свойствами. Классификация проведена по точкам перегиба кривых обратных скоростей одной из квазипоперечных волн, указывающих на возникновение лакун и их количество. Однако, несмотря на полноту исследования, осталось неучтенным появление лакун на волновом фронте второй квазипоперечной волны. Ниже предлагается классификация кубически анизотропных сред, опирающаяся на трехмерные представления волновых движений в кубически анизотропных средах, которые позволяют одновременно учесть особенности распространения двух квазипоперечных волн.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения движения кубически анизотропных сред при отсутствии массовых сил имеют следующий вид:

$$\left(A_4\Delta + \left(A_1 - A_2 - 2A_4\right)\partial_i^2\right)u_i + \\ +\left(A_2 + A_4\right)\partial_i \sum_{k=1}^{3}\partial_k u_k = \rho\ddot{u}_i, \qquad (1)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений; A_1, A_2, A_4 — постоянные упругости в основной кристаллографической системе координат; ρ — плотность среды; $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$; $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $i = \overline{1,\ 3}$; точка обозначает дифференцирование по времени.

Выражения для координат точек среды $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$, до которых дошла энергия волнового возмущения к моменту времени t, запишем, следуя [7], виде:

$$x_j^{(k)} = \frac{ct}{\sqrt{1 + \frac{a}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\Lambda_k + 2\pi k\right)}}\left(2\cos\alpha_j\left(1 + \frac{a}{3}\right) + \right.$$

$$\left. +\sqrt{3}\left(\frac{p_j^*}{\sqrt{-p}}\cos\left(\Lambda_k + 2\pi k\right) + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{4p^3}\sin\left(\Lambda_k + 2\pi k\right)}{\sqrt{4p^3 + 27q^2}}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\left(q_j^* + \frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{q}{p}p_j^*\right)\right)\right), \qquad (3)$$

где $a = \dfrac{A_1}{A_4} - 1$; $b = \dfrac{A_2}{A_4} + 1$; $\Lambda_k = \arccos\left(-\dfrac{q}{2}\sqrt{-\left(\dfrac{3}{p}\right)^3}\right)$:

$$p = -\frac{a^2}{3} + \left(a^2 - b^2\right)m;\ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{a\left(a^2 - b^2\right)\ m}{3} + \\ +\left(a^3 - 3ab^2 + 2b^3\right)n;\ p_j^* = 2\left(a^2 - b^2\right)\cos\alpha_j \times \left(1 - \cos^2\alpha_j\right) - \\ -\frac{4a^2\cos\alpha_j}{3},\ q_j^* = \frac{4a^3}{9} - \frac{2a}{3}\left(a^2 - b^2\right)\left(m\cos\alpha_j + +\cos\alpha_j\left(1 - \cos^2\alpha_j\right)\right) \\ +2\left(a^3 - 3ab^2 + 2b^3\right)\cos\alpha_j\left(m - \cos^2\alpha_j\left(1 - \cos^2\alpha_j\right)\right);$$

$$m = \sum_{i \neq j = 1}^{3}\cos^2\alpha_i\cos^2\alpha_j;\quad n = \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3;$$

$\cos\alpha_j$ — направляющие косинусы нормали к волновой поверхности; $c = \sqrt{A_4/\rho}$; $j = \overline{1,\ 3}$.

В формулах (3) $k = 1$ соответствует квазипродольной волне, $k = 2,\ 3$ - квазипоперечным волнам.

С помощью (3) можно построить безразмерные волновые поверхности квазипродольной (L_1) и квазипоперечных волн (L_2 и L_3) для кубически анизотропных материалов, а также их сечения в плоскостях, проходящих через начало основной системы координат, задавая в (3) соответствующим образом направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности. Для расчета абсолютных значений координат $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$ в момент времени t, следует умножить безразмерные значения, приведенные ниже на рисунках, на ct.

Заметим, что волновые фронты квазипоперечных волн, распространяющихся в кубически анизотропных средах, хорошо изучены в координатных плоскостях, и результаты исследований нашли отражение в достаточно большом количе-

Босяков Сергей Михайлович, *доцент каф. теоретической и прикладной математики Белорусского государственного университета.* **??????????????????**
Беларусь, БГУ, г. Минск.