УДК 517.9

Русина Т.И.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ДИФЕРЕНЦИАЛАХ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

Дифференциальные уравнения со случайными функциями условно можно разделить на два класса: дифференциальные уравнения со случайной переменной и стохастические дифференциальные уравнения. Исследования первого класса уравнений ведутся стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Отличительной особенностью стохастических дифференциальных уравнений является то, что они содержат обобщенные случайные процессы типа «белого шума». Классические методы не применимы для исследования решений подобных уравнений. Для этого К.Ито и др. разработана специальная теория, которая базируется на понятиях стохастических интегралов Ито [1], Стратоновича [2], θ-интегралов [3] и их обобщениях.

Однако, несмотря на специфику стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений, многие авторы пытались исследовать их с позиций естественного аппроксимационного подхода. Известно что, решения стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича, как правило, аппроксимируются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений [4], а Ито – решениями конечно-разностных уравнений [5]. Впервые единый подход к аппроксимации интегралов Ито и Стратоновича, базирующийся на алгебре обобщенных случайных процессов, был предложен в работе Н.В. Лазаковича и развит в дальнейшем им и его учениками [6-9]. В данных работах показано, что решения однородных стохастических уравнений Ито и Стратоновича, а также уравнений в θ-интегралах могут быть аппроксимированы решениями конечно-разностных уравнений с осреднением (уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов) [7, 9]. Для неоднородных стохастических уравнений алгебраический подход был применен в работе [8] при исследовании стохастических уравнений в случае Ито и Стратоновича. В данной статье рассматриваются стохастические уравнения в θ-интегралах и доказывается что они могут быть ассоциированными решениями уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

Напомним некоторые понятия из работы [6], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $T=[0, a]$ – отрезок вещественной прямой $\mathbf{R}$, $a\in\mathbf{R}$, а $(\Omega, \mathrm{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство.

Определение 1. *Расширенной прямой* $\tilde{\mathbf{R}}$ *называется следующее фактор-множество* $\tilde{\mathbf{R}}=\overline{\mathbf{R}}/M$, где $\overline{\mathbf{R}}=\{(x_n)\colon \forall n\in\mathbf{N}\ x_n\in\mathbf{R}\}$ и $M=\{(x_n)\in\overline{\mathbf{R}}:\exists\, n_0\in\mathbf{N}\ \forall n>n_0\ x_n=0\}$.

Аналогичным образом определяется $\tilde{T}=\overline{T}/M$, где $T=[0, a]\subset\mathbf{R}$, $a\in\mathbf{R}$, $\overline{T}=\{(x_n)\colon \forall n\in\mathbf{N}\ x_n\in T\}$

Рассмотрим множество последовательностей функций $f_n(t,\omega)\colon T\times\Omega\ \to\mathbf{R}$ со следующими свойствами:

1. $f_n(t,\cdot)$ является случайной величиной на $(\Omega, \mathrm{A}, \mathbf{P})$ для всех $t\in T$ и $n\in\mathbf{N}$;
2. $f_n(\cdot,\omega)\in\mathbf{C}^{\infty}(T)$ для всех $n\in\mathbf{N}$ и почти всех $\omega\in\Omega$.

Будем говорить, что элементы $F=(f_n(t,\omega))$ и $G=(g_n(t,\omega))$ эквивалентны, если существует такой номер n_0, что для любых $t\in T$ и почти всех $\omega\in\Omega$ $f_n(t,\omega)=g_n(t,\omega)$ при $n>n_0$.

Через $\mathrm{G}(T,\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентности исходного множества. Очевидно, что $\mathrm{G}(T,\Omega)$ образует алгебру с покоординатным сложением и умножением.

Определение 2. *Класс эквивалентности вида* $\tilde{F}(\tilde{t},\omega)=[(f_n(t_n,\omega))]$, $\tilde{t}=[(t_n)]\in\tilde{T}$, $[(f_n(t_n,\omega))]\in G(T,\Omega)$ *называется обобщенным случайным процессом*.

Множество обобщенных случайных процессов обозначим через $\mathrm{G}(\tilde{T},\Omega)$; оно является алгеброй с покоординатными операциями сложения и умножения.

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс $\tilde{F}(\tilde{t},\omega)=[(f_n(t_n,\omega))]\in G(\tilde{T},\Omega)$ ассоциирует классический случайный процесс с непрерывными, интегрируемыми и т.д. траекториями, если $f_n(t,\omega)$ при $n\to\infty$ для почти всех $\omega\in\Omega$ или в $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}, \mathrm{A}, \mathbf{P})$ сходится к данному процессу в соответствующем пространстве непрерывных, интегрируемых и т.д. функций.

Пусть $\{\Phi_t\}_{t\in T}$ –стандартный поток σ-алгебр, $F_a\subset A$; $B(t)$, $t\in T$, – одномерный стандартный процесс F_t – броуновского движения.

Определение 3. *Обобщенным случайным процессом броуновского движения называется элемент алгебры* $G(\tilde{T},\Omega)$, *ассоциирующий* $B(t)$.

Основные результаты.

Рассмотрим следующую задачу Коши в алгебре обобщенных случайных процессов [6]

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}\tilde{X}(\tilde{t})=\tilde{f}(\tilde{t},X(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{B}(\tilde{t})+\tilde{g}(\tilde{t},X(\tilde{t}))d_{\tilde{h}}\tilde{t};\\ \tilde{X}(\tilde{t})\big|_{[\tilde{0},\tilde{h})}=\tilde{X}_0(\tilde{t}), \end{cases} \tag{1}$$

где $\tilde{0}=[(0)]$, $\tilde{h}=[(h_n)]\in H$, $\tilde{f}=[(f_n)]\in G(\tilde{R})$ ассоциирует $f\in C_B^2(R^2)$, $\tilde{g}=[(g_n)]\in G(\tilde{R})$, $g\in C_B^1(R^2)$, $\tilde{B}=[(B_n)]\in G(T,\Omega)$ – обобщенный процесс броуновского движения, ассоциирующий стандартный процесс броуновского движения $B(t)$, $\tilde{X}^0=[(X_n^0)]\in G(T,\Omega)$, $x\in R$ и случайный процесс $X_n^0(t)$, $n=1, 2, \ldots t\in[0, h_n)$ согласован с потоком σ-алгебр

Русина Татьяна Ивановна, *ст. преподаватель каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$\Phi_{t+1/n}$ $(\Phi_t = \sigma\{B(s): 0 \le s \le t\})$.

Здесь $C_B^l(R^2)$ – множество функций l раз непрерывно дифференцируемых как функции двух переменных и ограниченных на R^2 вместе со своими частными производными до порядка l включительно.

На уровне представителей задача (1) запишется следующим образом

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = \\ = f_n(t, X_n(t))(B_n(t+h_n) - B_n(t)) + g_n(t, X_n(t))h_n; \\ X_n(t)\big|_{[0,h_n)} = X_0^n(t), \quad t \in T \end{cases} \qquad (2)$$

В качестве обобщенного процесса броуновского движения, входящего в систему (1) и ассоциирующего $B(t)$, будем рассматривать элементы алгебры обобщенных случайных процессов $G(\widetilde{T}, \Omega)$ [6]: $\tilde{B}(t) = [(B_n(t))]$, где

$B_n(t)=(B*\rho_n)(t)= \int_0^{1/n} B(t+s)\rho_n(s)ds$, $\rho_n(t)\in D(\mathbf{R})$,

$\rho_n(t)\ge 0$, $supp\ \rho_n(t)\subset[0,1/n]$ и $\int_0^{1/n} \rho_n(t)dt = 1$.

Замечание 1. Процесс $B_n(t)$ является $\Phi_{t+1/n}$ согласованным, а также для s>t $B_n(s) - B_n(t)$ и $B_n(t) - B(t)$ не зависят от Φ_t. Нетрудно убедиться, что процесс $B_n(t), t \in T$ имеет моменты любого порядка, причем $E(B_n(t)) = 0$ для любого $t \in T$.

Будем считать, что элементы $\tilde{f} = [(f_n)]$ и $\tilde{g} = [(g_n)]$ из системы (1) ассоциируют функции f и g соответственно (см. [10]), и возьмем их такого вида: $f_n = f * \rho_n$, $g_n = g * \rho_n$, где

$\rho_n(u,v) \in D(\mathbf{R}^2)$, $\rho_n(u,v) \ge 0$,

$$\text{supp}\ \rho_n(u,v) \subset [0,1/n]^2, \ \int_0^{1/n}\int_0^{1/n} \rho_n(u,v)dudv = 1 \qquad (3)$$

Рассмотрим уравнение ассоциированное системе (2)

$$X(t) = x + (\theta)\int_0^t f(s, X(s))dB(s) + \int_0^t g(s, X(s))ds, \qquad (4)$$

где $t\in T$, $x\in R$, $\theta\in[0,1]$ и стохастический интеграл в правой части (4) это стохастический θ-интеграл.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть t произвольная фиксированная точка из отрезка T, $t = \tau_t' + k_t h_n = \tau_t + m_t\delta$, $\delta_1 = \lambda h_n$, $\lambda \in N$, $1/n \le \delta_1 < 1/n + h_n$, где $\tau_t = \tau_t' + k_t' h_n$; $\tau_t \in [\delta, 2\delta)$; $1/n < \delta = l h_n < 1$; $l, m_t, k_t, k_t' \in N$

С помощью предыдущих представлений решение системы (2) можно записать в виде

$$X_n(t) = X_n^0(\tau_t') + \sum_{k=0}^{k_t-1} f_n(\tau_t' + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n)) \times$$
$$\times[B_n(\tau_t' + (k+1)h_n) - B_n(\tau_t' + kh_n)] +$$
$$+\sum_{k=0}^{k_t-1} g_n(\tau_t' + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n))h_n \qquad (5)$$

Теорема 1. *Пусть* $\theta\in[0,1/2]$, $f \in C_B^2(R^2)$ *и* $g \in C_B^1(R^2)$, *«начальное условие» задачи Коши (2)* $X_n^0(t)$ *принадлежит* $L^2(\Omega, A, P)$ *и является* $\Phi_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t\in[0, h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (2)* $X_n(t)$ *и решения уравнения (4)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t) - x]^2 +$$
$$+ \frac{C}{n^{2/3}h_n^{1/3}} + C(K(n,h_n) - (1-2\theta))^2,$$

если $1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2}$, и

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t) - x]^2 +$$
$$+Ch_n + C(K(n,h_n) - (1-2\theta))^2,$$

если $1/n^{1/2} \le h_n$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если* $\sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t) - x]^2 \to 0$ *и* $K(n, h_n)\to(1-2\theta)$, $\theta\in[0;1/2]$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$, *так, что* $1/n^2=o(h_n)$ *то* $\sup_{t\in T} E[X_n(t) - X(t)]^2 \to 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta\in[0;1/2]$, $f \in C_B^2(R^2)$, $g \in C_B^1(R^2)$. *Если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$, *так, что* $1/n^2=o(h_n)$, *причем* $\sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t) - x]^2 \to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (2) в* $L^2(\Omega, A, P)$ *и равномерно по* $t\in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходилась числовая последовательность* $K(n, h_n)$.

Чтобы получить аналогичные теоремы для уравнения (4) в случае, когда $\theta\in[1/2; 1]$ рассмотрим следующую задачу Коши с опережением

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(t+h_n, X_n(t+h_n)) \times \\ \times(B_n(t+h_n) - B_n(t)) + g_n(t+h_n, X_n(t+h_n))h_n; \\ X_n(t)\big|_{[\tilde{0},\tilde{h}_n)} = X_0^n(t), \quad t \in T \end{cases} \qquad (6)$$

С помощью принципа сжимающих отображений несложно показать, что данная задача имеет решение, однако в общем случае оно будет неединственным. Но, и в этом случае, справедливы, аналогичные предыдущим теоремам.

Теорема 3. *Пусть* $\theta \in [1/2;1]$, $f \in C_B^2(R^2)$ *и* $g \in C_B^1(R^2)$, *«начальное условие» задачи Коши (6)* $X_n^0(t)$ *принадлежит* $L^2(\Omega, A, P)$ *и является* $\Phi_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t\in[0, h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (6)* $X_n(t)$ *и решения уравнения (4)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t)-X(t)]^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t)-x]^2 +$$
$$+\frac{C}{n^{2/3}h_n^{1/3}} + C(K(n,h_n)-(1-2\theta))^2,$$
если $1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2}$, и
$$\sup_{t\in T} E[X_n(t)-X(t)]^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t)-x]^2 +$$
$$+Ch_n + C(K(n,h_n)-(1-2\theta))^2,$$
если $1/n^{1/2} \le h_n$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, если* $\sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t)-x]^2 \to 0$ *и* $K(n, h_n)\to(1-2\theta)$, $\theta\in[1/2;1]$ *при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$, *так, что* $1/n^2=o(h_n)$ *то* $\sup_{t\in T} E[X_n(t)-X(t)]^2 \to 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\theta\in[1/2;1$, $f\in C_B^2(R^2)$, $g\in C_B^1(R^2)$. *Если* $n\to\infty$, $h_n\to 0$, *так, что* $1/n^2=o(h_n)$, *причем* $\sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t)-x]^2\to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (6) в* $L^2(\Omega,\ A,\ P)$ *и равномерно по* $t\in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходилась числовая последовательность* $K(n, h_n)$.

Замечание. Очевидно, все предыдущие результаты верны, если в уравнении (4) неслучайное начальное условие x заменить на Φ_0 измеримую случайную функцию из $L^2(\Omega,\ A,\ P)$.

Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $f\in C_B^2(R^2)$ *и* $g\in C_B^1(R^2)$ *тогда, если «начальное условие»* $X_n^0(t)$ *системы (2) принадлежит* $L^2(\Omega,\ A,\ P)$ *и является* $\Phi_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t\in[0, h_n)$, *то* $X_n(t)$ *принадлежит* $L^2(\Omega,\ A,\ P)$ *и является* $\Phi_{t+1/n}$ *измеримым для всех* $t\in T$ *и справедливо следующее неравенство:* $E(X_n(t+h_n)-X_n(t))^{2p} \le Ch_n^{2p}+Ch_n^p$, $p=1,\ 2,\ \ldots$

Доказательство леммы 1. Пусть $t\in[h_n,\ 2\ h_n)$, тогда $k_t=1$ и из формулы (5) получаем
$$X_n(t)=X_n(\tau_t'+h_n)=X_n^0(\tau_t')+f_n(\tau_t',X_n(\tau_t'))[B_n(\tau_t'+h_n)-$$
$$-B_n(\tau_t')]+g_n(\tau_t',X_n(\tau_t'))h_n$$

Т.к. $X_n^0(t)$ принадлежит $L^2(\Omega,\ A,\ P)$ и является $\Phi_{t+1/n}$ измеримым, а так же из замечания 1. вытекает, что $X_n(t)$ принадлежит $L^2(\Omega,A,P)$ и является $\Phi_{t+1/n}$ измеримым при $t\in[h_n,\ 2\ h_n)$.

Аналогично по индукции с помощью представления (5) показывается, что $X_n(t)$ принадлежит $L^2(\Omega,\ A,\ P)$ и является $\Phi_{t+1/n}$ измеримым для любого полуинтервала $[(k\text{-}1)h_n,\ kh_n)$, $k=1,\ 2,\ \ldots k_t$, а значит для всех $t\in T$.

Оценим, учитывая ограниченность функций f и g, а так же результат леммы 1 [9]
$$E(X_n(t+h_n)-X_n(t))^{2p} = E[f_n(\tau_t',X_n(\tau_t'))[B_n(\tau_t'+h_n)-$$
$$-B_n(\tau_t')]+g_n(\tau_t',X_n(\tau_t'))h_n]^{2p} \le C(E[f_n(\tau_t',X_n(\tau_t'))[B_n(\tau_t'+$$
$$+h_n)-B_n(\tau_t')]]^{2p}+E[g_n(\tau_t',X_n(\tau_t'))h_n]^{2p}) \le CE(B_n(\tau_t'+$$
$$+h_n)-B_n(\tau_t'))^{2p}+Ch_n^{2p} \le Ch_n^{2p}+Ch_n^p,\quad p=1,\ 2,\ \ldots$$

Лемма 2. Пусть $f\in C_B^2(R^2)$ и $g\in C_B^1(R^2)$, B_n, f_n, g_n из представлений (3) соответственно. Тогда для решения задачи (2) $X_n(t)$ и всех $t\in T$ справедливо неравенство:
$$E[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]-(I)\int_{\tau_t}^{t} f(s,X(s))dB(s)]^2 \le$$
$$\le \frac{C}{n^4h_n\delta^2}+\frac{C}{n\delta}+C\delta+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2$$

Доказательство леммы 2. Перепишем условие леммы таким образом:
$$\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta)]-$$
$$-(I)\int_{\tau_t}^{t} f(s,X(s))dB(s)=\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B_n(\tau_t+\right.$$
$$\left.+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta)]\right]+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times\right.$$
$$\left.\times[B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})]\right]+\sum_{k=0}^{m_t-1}[f_n(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+$$
$$+k\delta))-f_n(\tau_t+k\delta-\delta_1,X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))][B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$\left.-B_n(\tau_t+k\delta)]\right]+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(\tau_t+k\delta-\delta_1,X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))\times\right.$$
$$\left.\times[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]\right]+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}[f_n(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))-\right.$$
$$\left.-f_n(\tau_t+k\delta,X(\tau_t+k\delta))][B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})]\right]-$$
$$-\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(\tau_t+k\delta,X(\tau_t+k\delta))[B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B(\tau_t+k\delta)]\right]+$$
$$+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}[f_n(\tau_t+k\delta,X(\tau_t+k\delta))-\right.$$
$$\left.-f(\tau_t+k\delta,X(\tau_t+k\delta))][B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta)]\right]+$$
$$+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f(\tau_t+k\delta,X(\tau_t+k\delta))[B(\tau_t+(k+1)\delta)-\right.$$

$$-B(\tau_t+k\delta)]-(I)\int_{\tau_t}^{t} f(s,X(s))dB(s)\Bigg]=$$

$$=I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)+$$
$$+I_5(t)-I_6(t)+I_7(t)+I_8(t)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Т.к. $\tau_t+k\delta+1/n<\tau_t+(k+1)\delta$, то из замечания 1. вытекает независимость множителей под знаком суммы в выражении $I_1(t)$, поэтому из ограниченности f имеем

$$E(I_1(t))^2\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}E(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B(\tau_t+(k+1)\delta))^2\le\frac{Cm_t}{n}\le\frac{C}{n\delta} \tag{7}$$

Аналогично получены оценки: $E(I_2(t))^2\le\dfrac{C}{n\delta}$,

$$E(I_4(t))^2\le\frac{C}{n\delta},\ E(I_6(t))^2\le\frac{C}{n\delta} \tag{8}$$

Используя независимость множителей под знаком суммы, по формуле конечных приращений получаем для $I_5(t)$

$$E(I_5(t))^2\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2(\delta-\frac{1}{n})\le$$
$$\le C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2 \tag{9}$$

Используя независимость множителей под знаком суммы и вид f_n получим оценку для $I_7(t)$.

$$E(I_7(t))^2\le\frac{C}{n^2}\sum_{k=0}^{m_t-1}E[B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta)]^2\le$$
$$\le\frac{C}{n^2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\delta\le\frac{C}{n^2} \tag{10}$$

Для получения следующей оценки воспользуемся определением и свойствами интеграла Ито

$$E(I_8(t))^2=2\int_{\tau_t}^{t}E[f(\bar{s},\overline{X}(\bar{s}))-f(\bar{s},X(s))]^2ds+$$
$$+2\int_{\tau_t}^{t}E[f(\bar{s},X(s))-f(s,X(s))]^2ds\le$$
$$\le C\int_{\tau_t}^{t}E(\overline{X}(\bar{s})-X(s))^2ds+C\int_{\tau_t}^{t}(\bar{s}-s)^2ds\le$$
$$\le C(\sum_{k=0}^{m_t-1}\int_{\tau_t+k\delta}^{\tau_t+(k+1)\delta}|\tau_t+k\delta-s|ds+$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}\int_{\tau+k\delta_t}^{\tau_t+(k+1)\delta}(\tau_t+k\delta-s)^2ds)\le C\delta \tag{11}$$

где $\bar{s}(s)=\tau_t+k\delta$, $\overline{X}(\bar{s})=X(\tau_t+k\delta)$ при $s\in[\tau_t+k\delta,\ \ \tau_t+(k+1)\delta)$.

Запишем следующие преобразования для $I_3(t)$, использующие формулу Тейлора

$$I_3(t)=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}[f_n(\tau_t+k\delta-jh_n,X_n(\tau_t+k\delta-jh_n))-$$
$$-f_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_{n1},X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))]\times$$
$$\times[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]=$$
$$=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\Big[f'_{n_t}(\tau_t+k\delta-jh_n,X_n(\tau_t+k\delta-jh_n))h_n+$$
$$+f'_{n_X}(\tau_t+k\delta-jh_n,X_n(\tau_t+k\delta-jh_n))\times(X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))+$$
$$+\frac{1}{2}f''_{n_{tt}}(s,X(s))h_n^2+\frac{1}{2}f''_{n_{XX}}(r,X(r))(X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))^2+f''_{n_{tX}}(u,X(u))h_n(X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))][B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)],$$

где r,s,u принадлежат полуинтервалу $[\tau_t+k\delta-(j+1)h_n,\ \ \tau_t+k\delta-jh_n)$.

Учитывая представление (5) $I_3(t)$ можно записать в виде:

$$I_3(t)=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}f'_{n_t}(\tau_t+k\delta-jh_n,X_n(\tau_t+k\delta-jh_n))\times$$
$$\times h_n[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}[(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-jh_n,X_n(\tau_t+k\delta-jh_n))-$$
$$-(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-\delta_1,X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))]\times$$
$$\times[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)][B_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n)]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-\delta_1,X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))\times$$
$$\times[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)][B_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n)]+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}(f'_{n_X}g_n)\big(\tau_t+k\delta-$$
$$-jh_n,X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)h_n[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}f''_{n_{tt}}(s,X(s))h_n^2[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}f''_{n_{XX}}(r,X(r))(X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))^2[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}f''_{n_{tX}}(u,X(u))h_n(X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))]\times$$

$$\times[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]=$$

$$=I_{31}(t)+I_{32}(t)+I_{33}(t)+I_{34}(t)+\frac{1}{2}I_{35}(t)+\frac{1}{2}I_{36}(t)+I_{37}(t)$$

Для оценки $I_{31}(t)$ воспользуемся ограниченностью f'_{n_t}.

$$E(I_{31}(t))^2\le Ch_n^2 m_t\lambda\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}E[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]^2\le Ch_n^2 m_t^2\lambda^2\frac{1}{n}\le\frac{C}{n} \qquad (12)$$

Для оценки $I_{32}(t)$ воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и теоремой о конечных приращениях Лагранжа.

$$E(I_{32}(t))^2=E\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\sum_{p=j+1}^{\lambda}[(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta+h_n-\right.$$
$$-ph_n,X_n(\tau_t+k\delta+h_n-ph_n))-(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-$$
$$-ph_n,X_n(\tau_t+k\delta-ph_n))][B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]\times$$
$$\left.\times[B_n(\tau_t+k\delta_n-jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n)]\right]^2\le$$
$$\le E\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{\lambda}[C\,|X_n(\tau_t+k\delta+h_n-ph_n)-\right.$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-ph_n)|+Ch_n][B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$\left.-B_n(\tau_t+k\delta)][B_n(\tau_t+k\delta_n)-B_n(\tau_t+k\delta-ph_n)]\right]^2\le$$
$$\le Cm_t\lambda\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=2}^{\lambda}E([(X_n(\tau_t+k\delta+h_n-ph_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-ph_n))^2+h_n^{\,2}]\times[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]^2[B_n(\tau_t+k\delta_n)-B_n(\tau_t+k\delta-ph_n)]^2)\le$$
$$\le Cm_t\lambda^2\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m_t-1}(h_n+h_n^2)(\lambda-1)h_n\le$$
$$\le Ch_n m_t^{\,2}\lambda\frac{1}{n}\frac{\lambda^2 h_n}{2}\le\frac{C}{n^4h_n\delta^2}+\frac{Ch_n^2}{n\delta^2} \qquad (13)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и ограниченность f_n и f'_{n_X} получим:

$$E(I_{33}(t))^2\le Cm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}(E[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]^4\times$$
$$\times E[B_n(\tau_t+k\delta)-B_n(\tau_t+k\delta-\delta_1)]^4)^{\frac{1}{2}}\le\frac{C}{n\delta} \qquad (14)$$

$$E(I_{34}(t))^2\le\frac{C}{n}\ \text{и}\ E(I_{35}(t))^2\le\frac{Ch_n^{\,2}}{n} \qquad (15)$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского и леммой 1 получим:

$$E(I_{36}(t))^2\le Cm_t\lambda\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}E[(X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))^2\times[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]]^2\le Cm_t\lambda\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\Big[E(X_n(\tau_t+k\delta-jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta-(j+1)h_n))^8\times$$
$$\times E[B_n(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B_n(\tau_t+k\delta)]^4\Big]^{\frac{1}{2}}\le\frac{C}{n} \qquad (16)$$

Аналогично получим: $E(I_{37}(t))^2\le\dfrac{Ch_n}{n}$ (17)

Таким образом, из неравенств (12)-(17) получаем оценку для $I_3(t)$

$$E(I_3(t))^2\le\frac{C}{n^4h_n\delta^2}+\frac{C}{n\delta}. \qquad (18)$$

Оценки (7)-(11), (18) влекут за собой неравенство леммы.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда, для всякого $t\in T$ справедливо следующее неравенство:*

$$E[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]^2-\int_{\tau_t}^{t}(f'_Xf)(s,X(s))ds]^2\le\frac{C}{n\delta}+$$
$$+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2+C\delta$$

Доказательство леммы 3. Выполним следующие преобразования:

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]^2-\int_{\tau_t}^{t}(f'_Xf)(s,X(S))ds=$$
$$=\Bigg[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))([B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]^2-[B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta)]^2)\Bigg]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$-B(\tau_t+k\delta)]^2+2\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$
$$\times[B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})][B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$-B(\tau_t+k\delta)]+\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$
$$\times\big([B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})]^2-(\delta-\frac{1}{n})\big)-$$
$$-\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\frac{1}{n}+$$

$$+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\delta-\int_{\tau_t}^{t}(f'_Xf)(s,X(s))ds\right]=$$

$$=S_0(t)+S_1(t)+2S_2(t)+S_3(t)-S_4(t)+S_5(t)$$

Т.к. $f\in C_B^2(R^2)$, то, применяя неравенство Коши-Буняковского имеем:

$$E(S_0(t))^2=E[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))([B_n(\tau_t+$$
$$+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta)]\times[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+$$
$$+1)\delta)]+[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta)][B(\tau_t+k\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)]+[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta)][B(\tau_t+$$
$$+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta)]+[B(\tau_t+k\delta)-B_n(\tau_t+k\delta)][B(\tau_t+$$
$$+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta)])]^2\le 4Cm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}(E([B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)][B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta)])^2+$$
$$+E([B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta)][B(\tau_t+k\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)])^2+E([B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+(k+1)\delta)]\times$$
$$\times[B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta)])^2+E([B(\tau_t+k\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta)][B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta)])^2)\le$$
$$\le Cm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}(\frac{C\delta}{n}+\frac{C\delta}{n}+\frac{C\delta}{n}+\frac{C\delta}{n})\le Cm_t^2\frac{\delta}{n}\le\frac{C}{n\delta}\qquad(19)$$

Из ограниченности f_n и f'_{n_X} и свойств броуновского движения получаем для $S_1(t)$

$$E(S_1(t))^2\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}E[B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-$$
$$-B(\tau_t+k\delta)]^4\le\frac{C}{n^2\delta^2}\qquad(20)$$

Учитывая независимость множителей под знаком суммы и то, что математическое ожидание броуновского движения равно нулю, имеем

$$E(S_2(t))^2\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}E[B(\tau_t+(k+1)\delta)-B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})]^2\times$$
$$\times E[B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})-B(\tau_t+k\delta)]^2\le\frac{C}{n}\qquad(21)$$

Аналогично, пользуясь независимостью множителей под знаком суммы и свойствами броуновского движения, получаем оценку для $S_3(t)$

$$E(S_3(t))^2\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}(E([B(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B(\tau_t+k\delta+\frac{1}{n})]^4+(\delta-\frac{1}{n})^2)\le C\delta\qquad(22)$$

Оценка $S_4(t)$ является простым следствием того, что

$$f\in C_B^2(R^2):E(S_4(t))^2\le\frac{C}{n^2\delta^2}\qquad(23)$$

Оценим $S_5(t)$ следующим образом:

$$E(S_5(t))^2=E\left(\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n-f'_Xf)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))+\right.$$
$$+\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}((f'_Xf)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta)-(f'_Xf)(\tau_t+k\delta,X(\tau_t+k\delta))+$$
$$\left.+\left[\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_Xf)(\tau_t+k\delta,X(\tau_t+k\delta))-\int_{\tau_t}^{t}(f'_Xf)(s,X(S))ds\right]\right)^2\le$$
$$\le\frac{C}{n^2}+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2+C\delta\qquad(24)$$

Таким образом, из выражений (19)-(24) получаем требуемую оценку.

Лемма 4. Пусть $X_n(t)$ – решение задачи (2), причем $f\in C_B^2(R^2)$ и $g\in C_B^1(R^2)$, B_n, f_n, g_n из представлений (3) и $K(n,h_n)$ из леммы 1 [3]. Тогда для всех $t\in T$ справедливо неравенство

$$E\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))([B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-\right.$$
$$\left.-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2-h_nK(n,h_n))\right]^2\le C\delta+\frac{C\delta^2}{h_n}$$

Доказательство леммы 4. Преобразуем выражение под знаком математического ожидания следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\big([B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2-h_nK(n,h_n)\big)=$$
$$=\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$
$$\times\left[\sum_{j=\lambda+1}^{l}[B_n(\tau_t+k\delta\ \ +jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2-\right.$$
$$\left.-(\delta-\delta_1)K(n,h_n)\right]+\sum_{k=0}^{m_t-1}\Big[(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))-$$
$$-(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-\delta_1,X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))]\times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{\lambda}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2-\right.$$
$$\left.-\delta_1K(n,h_n)\right]+\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-\delta_1,X_n(\tau_t+k\delta-\delta_1))\times$$
$$\times\left[\sum_{j=1}^{\lambda}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2-\right.$$
$$\left.-\delta_1K(n,h_n)\right]=U_1(t)+U_2(t)+U_3(t)$$

Из замечания 1 вытекает, что для различных k выражения в квадратных скобках в слагаемом $U_1(t)$ независимы. Тогда, с учетом лемм 1 и 1 [9], верны следующие преобразования.

$$E(U_1(t))^2 \le CE[\sum_{k=0}^{m_t-1}(\sum_{j=\lambda+1}^{l}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$

$$-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2-(\delta-\delta_1)K(n,h_n))]^2 \le$$

$$\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}(l-\lambda)\sum_{j=\lambda+1}^{l}E[B_n(\tau_t+k\delta\ \ +jh_n)-$$

$$-B_n(\tau_t+k\delta\ \ +(j-1)h_n)]^4+(\delta-\delta_1)^2K^2(n,h_n)=$$

$$=C\sum_{k=0}^{m_t-1}((l-\lambda)\sum_{j=\lambda+1}^{l}h_n^2+(\delta-\delta_1)^2)\le C\delta \qquad (25)$$

Для оценки $U_2(t)$ применим неравенство Коши-Буняковского и теорему Лагранжа.

$$E(U_2(t))^2 = E\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{i=0}^{\lambda-1}[(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-ih_n, X_n(\tau_t+\right.$$

$$+k\delta-ih_n))-(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-(i+1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta-$$

$$-(i+1)h_n))]\left[\sum_{j=1}^{\lambda}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+\right.$$

$$\left.\left.+(j-1)h_n)]^2-\delta_1K(n,h_n)]\right]\right]^2 \le$$

$$\le m_t\sum_{k=0}^{m_t-1}\lambda\sum_{i=0}^{\lambda-1}\Big(E[(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-ih_n, X_n(\tau_t+k\delta-ih_n))-$$

$$-(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta-(i+1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta-(i+1)h_n))]^4\times$$

$$\times E\left[\sum_{j=1}^{\lambda}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2-\right.$$

$$\left.-\delta_1K(n,h_n)]]^4\Big)^{\frac{1}{2}} \le m_t\sum_{k=0}^{m_t-1}\lambda\sum_{i=0}^{\lambda-1}(Ch_n^2+Ch_n^4)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times E\Bigg((\lambda-1)^3\sum_{j=1}^{\lambda}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$

$$-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^8+C\delta_1^4\Bigg)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le Cm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}\lambda\sum_{i=0}^{\lambda-1}[(h_n^2(\lambda^4h_n^4+\delta_1^4)]^{\frac{1}{2}} \le Cm_t^2\lambda^2h_n\delta_1^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n} \quad (26)$$

Аналогично тому, как рассмотрено $U_1(t)$ рассмотрим $U_3(t)$. Тогда $E(U_3(t))^2 \le C\delta$ (27)

Из полученных оценок (25)-(27) следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 5. Пусть $X_n(t)$ – решение задачи (2), причем $f\in C_B^2(R^2)$ и $g\in C_B^1(R^2)$, B_n, f_n, g_n из представлений (3). Тогда для всех $t\in T$ справедливо неравенство:

$$E[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}g_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n,$$

$$X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n\ \ ))h_n-\int_{\tau_t}^{t}g(s,X(s))ds]^2 \le$$

$$\le Ch_n+C\delta+\frac{C}{n}+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E[X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta)]^2$$

Доказательство леммы 5. Преобразуем выражение, стоящее под знаком математического ожидания следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[g_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-$$

$$g_n(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta))]h_n+\sum_{k=0}^{m_t-1}[g_n(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta)-$$

$$-g_n(\tau_t+k\delta, X(\tau_t+k\delta))]\delta+\sum_{k=0}^{m_t-1}[g_n(\tau_t+k\delta, X(\tau_t+k\delta)-$$

$$-g(\tau_t+k\delta, X(\tau_t+k\delta))]\delta+[\sum_{k=0}^{m_t-1}g(\tau_t+k\delta\ \ , X(\tau_t+k\delta\ \ )-$$

$$-\int_{\tau_t}^{t}g(s,X(s))ds]=K_1(t)+K_2(t)+K_3(t)+K_4(t)$$

Пользуясь видом X_n и теоремой Лагранжа о конечных приращениях по лемме 1 получим оценку для $K_1(t)$

$$E(K_1(t))^2 = E(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}[g_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n,$$

$$X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-g_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n,$$

$$X_n(\tau_t+k\delta))+g_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta))-$$

$$-g_n(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta))]h_n)^2 \le$$

$$\le Ch_n^2E(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-$$

$$-X_n(\tau_t+k\delta)))^2+Ch_n^2E(\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(p-1)h_n)^2 \le$$

$$\le Ch_n^2m_tl\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}E(X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))- \qquad (28)$$

$$-X_n(\tau_t+k\delta))^2+Ch_n^4E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}\frac{l(l-1)}{2}\right)^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n}$$

Из теоремы Лагранжа вытекает, что

$$E(K_2(t))^2 \le E(\sum_{k=0}^{m_t-1}(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta)))^2 \le$$

$$\le C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2 \qquad (29)$$

По лемме 3 [9] получаем оценку для $K_3(t)$:

$$E(K_3(t))^2 \le \frac{C}{n} \qquad (30)$$

Используя определение интеграла Лебега, теорему Лагранжа и интегральную форму неравенства Коши-Буняковского получаем:

$$E(K_4(t))^2 = E(\int_{\tau_t}^{t}g(\bar{s},X(\bar{s}))ds-\int_{\tau_t}^{t}g(s,X(s))ds)^2 \le$$

$$\le E(\int_{\tau_t}^{t}[C\,|\,X(\bar{s})-X(s)\,|+C\,|\,\bar{s}-s\,|]ds)^2 =$$

$$= E\left(\sum_{k=0}^{m_t-1}\int_{\tau_t+k\delta}^{\tau_t+(k+1)\delta}[C\,|\,X(\tau_t+k\delta)-X(s)\,|+C\,|\,\tau_t+k\delta-s\,|]ds\right)^2 \le$$

$$\le Cm_t\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}\int_{\tau_t+k\delta}^{\tau_t+(k+1)\delta}|\,\tau_t+k\delta-s\,|\,ds+ \qquad (31)$$

$$+Cm_t\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}\int_{\tau_t+k\delta}^{\tau_t+(k+1)\delta}(\tau_t+k\delta-s)^2ds \le C\delta$$

Объединяя результаты (28)-(31) получаем неравенство из леммы.

Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. В дальнейших выкладках воспользуемся тем, что уравнение (4) с θ-интегралом эквивалентно следующему уравнению с интегралом Ито (см. напр. [3]):

$$X(t) = x + (I)\int_0^t f(s,X(s))dB(s) +$$

$$+\theta\int_0^t f'_X(s,X(s))\,f(s,X(s))ds + \int_0^t g(s,X(s))ds$$

Используя это равенство и формулу (5) представим разность $X_n(t)-X(t)$ в следующем виде.

$$X_n(t)-X(t) = X_n^0(\tau'_t) + \sum_{k=0}^{k_t-1} f_n(\tau'_t+kh_n, X_n(\tau'_t+kh_n))\times$$

$$\times[B_n(\tau'_t+(k+1)h_n)-B_n(\tau'_t+kh_n)]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_t-1} g_n(\tau'_t+kh_n, X_n(\tau'_t+kh_n))h_n - x - (I)\int_0^t f(s,X(s))dB(s) -$$

$$-\theta\int_0^t f'_X(s,X(s))\,f(s,X(s))ds - \int_0^t g(s,X(s))ds =$$

$$= [X_n^0(\tau'_t) - x + \sum_{k=0}^{k'_t} f_n(\tau'_t+kh_n, X_n(\tau'_t+kh_n))\times$$

$$\times(B_n(\tau'_t+(k+1)h_n)-B_n(\tau'_t+kh_n)) - (\theta)\int_0^t f(s,X(s))dB(s)+$$

$$+\sum_{k=0}^{k'_t} g_n(\tau'_t+kh_n, X_n(\tau'_t+kh_n))h_n - \int_0^{\tau_t} g(s,X(s))ds]+$$

$$+[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta))(B_n(\tau'+(k+1)\delta)-$$

$$-B_n(\tau'+k\delta)) - (I)\int_{\tau_t}^t f(s,X(s))dB(s)]+$$

$$+[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}(f_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-$$

$$-f_n(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta)))\times(B_n(\tau_t+k\delta+ph_n)-$$

$$-B_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)) - \theta\int_{\tau_t}^t f'_X(s,X(s))\,f(s,X(s))ds]+$$

$$+[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l} g_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-$$

$$-\int_{\tau_t}^t g(s,X(s))ds] = H_0(t)+H_1(t)+H_2(t)+H_3(t)$$

Представим $H_0(t)$ в следующем виде:

$$H_0(t) = [X_n^0(\tau'_t)-x] + \sum_{k=0}^{k'_t} f_n(\tau'_t+(k-1)h_n, X_n(\tau'_t+(k-1)h_n))\times$$

$$\times(B_n(\tau'_t+kh_n)-B_n(\tau'_t+(k-1)h_n)) - (\theta)\int_0^{\tau_t} f(s,X(s))dB(s)+$$

$$+\sum_{k=0}^{k'_t} g_n(\tau'_t+(k-1)h_n, X_n(\tau'_t+(k-1)h_n))h_n - \int_0^{\tau_t} g(s,X(s))ds =$$

$$= [X_n^0(\tau'_t)-x] + A_1(t) - A_2(t) + A_3(t) - A_4(t)$$

Рассмотрим $E(A_1(t))^2$. В силу ограниченности f получим следующую оценку:

$$E(A_1(t))^2 \le Ck'_t\sum_{k=0}^{k'_t-1} E\big(B_n(\tau'_t+(k+1)h_n)-B_n(\tau'_t+kh_n)\big)^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n} \qquad (32)$$

Используя свойства θ-интеграла, интеграла Ито и ограниченность f и f'_X для $A_2(t)$ получаем:

$$E(A_2(t))^2 = E\left((\theta)\int_0^{\tau_t} f(s,X(s))dB(s)\right)^2 =$$

$$= E\left((I)\int_0^{\tau_t} f(s,X(s))dB(s) + \theta\int_0^{\tau_t} f(s,X(s))\,f'_X(s,X(s))ds\right)^2 \le$$

$$\le 2E\left((I)\int_0^{\tau_t} f(s,X(s))dB(s)\right)^2 +$$

$$+2\theta^2E\left(\int_0^{\tau_t} f(s,X(s))\,f'_X(s,X(s))ds\right)^2 \le$$

$$\le 2\int_0^{\tau_t} Ef^2(s,X(s))ds + 2\theta^2C\tau_t^2 \le C\tau_t + C\tau_t^2 \le C\delta \qquad (33)$$

Из ограниченности g и g_n получаем оценки: $E(A_3(t))^2 \le C\delta^2$, $E(A_4(t))^2 \le C\delta^2$ (34)

Из формул (32) – (34) вытекает

$$E(H_0(t))^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n} + C\delta + C\delta^2 + CE(X_n^0(\tau_t)-x)^2 \le$$

$$\le \frac{C\delta^2}{h_n} + C\delta + CE(X_n^0(\tau_t)-x)^2$$

По лемме 2

$$E(H_1(t))^2 \le \frac{C}{n^4h_n\delta^2} + \frac{C}{n\delta} + C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2$$

Исследуем $H_2(t)$. Для этого воспользуемся видом X_n из равенства (5) и формулой Тейлора для функции f_n.

$$H_2(t)=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}\sum_{j=1}^{p-1}(f_n(\tau_t+k\delta+jh_n,X_n(\tau_t+k\delta+jh_n))-$$
$$-f_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n,X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)))\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+k\delta+ph_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-$$
$$-\theta\int_{\tau_t}^{t}f'_X(s,X(s))f(s,X(s))ds=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l}\sum_{j=1}^{p-1}[f'_{n_t}(\tau_t+k\delta+$$
$$+(j-1)h_n,X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))h_n+f'_{n_X}(\tau_t+k\delta+$$
$$+(j-1)h_n,X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))(X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))+\frac{1}{2}f''_{n_{tt}}(u,\overline{X}_n(u))h_n^2+$$
$$+\frac{1}{2}f''_{n_{XX}}(z,\overline{X}_n(z))(X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-X_n(\tau_t+k\delta+$$
$$+(j-1)h_n))^2+f''_{n_{tX}}(r,\overline{X}_n(r))(X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))h_n]\times(B_n(\tau_t+k\delta+ph_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))-\theta\int_{\tau_t}^{t}f'_X(s,X(s))f(s,X(s))ds=$$
$$=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}f'_{n_t}(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n,X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))\times$$
$$\times h_n(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))+$$
$$+\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n,X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))\times\right.$$
$$\times(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)-$$
$$\left.-\theta\int_{\tau_t}^{t}f'_X(s,X(s))f(s,X(s))ds\right]+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}(f'_{n_X}g_n)(\tau_t+$$
$$+k\delta+(j-1)h_n,X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))h_n\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}f''_{n_{tt}}(u,\overline{X}_n(u))h_n^2(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}f''_{n_{XX}}(z,\overline{X}_n(z))\times$$
$$\times(X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))^2\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))+$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}f''_{n_{tX}}(r,\overline{X}_n(r))(X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))h_n\times(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+$$
$$+k\delta+jh_n))=J_1(t)+J_2(t)+J_3(t)+\frac{1}{2}J_4(t)+\frac{1}{2}J_5(t)+J_6(t)$$

где u, z, r принадлежат $[\tau_t+k\delta+(j-1)h_n;\tau_t+k\delta+jh_n)$, а $\overline{X}_n(u)$, $\overline{X}_n(z)$, $\overline{X}_n(r)$ лежат на отрезке, соединяющем точки $X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)$ и $X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)$.

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

Используя ограниченность f'_{n_t} для $J_1(t)$ получим:

$$E(J_1(t))^2\le Ch_n^2m_tl\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}E(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))^2\le Ch_n^2m_tl\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}(\delta-jh_n)\le C\delta \qquad (35)$$

Представим $J_2(t)$ в следующем виде:

$$J_2(t)=\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)-$$
$$-\theta\int_{\tau_t}^{t}f'_X(s,X(s))f(s,X(s))ds]+[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}[(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta+$$
$$+(j-1)h_n,X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))-$$
$$-(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))]\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))]=J_{21}(t)+J_{22}(t)$$

Для оценки слагаемых $J_{21}(t)$ и $J_{22}(t)$ будем пользоваться следующим тождеством:

$$[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+ph_n)]^2-$$
$$-\sum_{j=p+1}^{l}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2=$$
$$=2\sum_{j=p+1}^{l}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]\times \qquad (36)$$
$$\times[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)]$$

Применяя тождество (36) при $p=0$ преобразуем $J_{21}(t)$ следующим образом:

$$J_{21}(t)=\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)-$$
$$-\theta\int_{\tau_t}^{t}f'_X(s,X(s))f(s,X(s))ds=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta))^2-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))^2-$$
$$-\theta\int_{\tau_t}^{t}f'_X(s,X(s))f(s,X(s))ds=\frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f'_{n_X}f_n)(\tau_t+$$
$$+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta))^2-$$

$$-\int_{\tau_t}^{t} f_X'(s,X(s))f(s,X(s))ds]-\frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l}(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+$$
$$+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta))(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))^2-h_nK(n,h_n)]-$$
$$-\frac{K(n,h_n)}{2}[\sum_{k=0}^{m_t-1}(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta))\delta-$$
$$-\int_{\tau_t}^{t} f_X'(s,X(s))f(s,X(s))ds]+(1-2\theta-K(n,\ h_n))\times$$
$$\times\frac{1}{2}\int_{\tau_t}^{t} f_X'(s,X(s))f(s,X(s))ds=\frac{1}{2}J_{21}^1(t)-\frac{1}{2}J_{21}^2(t)-$$
$$-\frac{K(n,\ h_n)}{2}J_{21}^3(t)+\frac{1-2\theta-K(n,\ h_n)}{2}J_{21}^4(t)$$

Из леммы 3 вытекает:

$$E(J_{21}^1(t))^2\le\frac{C}{n\delta}+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2+C\delta$$

Лемма 4 дает следующую оценку для $J_{21}^2(t)$:

$$E(J_{21}^2(t))^2\le\frac{C\delta^2}{h_n}.$$

Заметим, что $J_{21}^3(t)=S_5(t)$, где $S_5(t)$ из леммы 3. Тогда из неравенства (27) следует, что

$$E(J_{21}^3(t))^2\le\frac{C}{n^2}+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-X(\tau_t+k\delta))^2+C\delta$$

Т.к. $f\in C_B^2(R^2)$ то, очевидно, что $E(J_{21}^4(t))^2\le C$.

Таким образом из оценок $J_{21}^1(t),\ \ J_{21}^2(t),\ \ J_{21}^3(t),\ \ J_{21}^4(t)$ получаем

$$E(J_{21}(t))^2\le\frac{C}{n\delta}+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n(\tau_t+k\delta)-$$
$$-X(\tau_t+k\delta))^2+\frac{C\delta^2}{h_n}+C(K(n,h_n)-(1-2\theta))^2 \qquad (37)$$

Применяя теорему Лагранжа о конечных приращения, неравенство Коши-Буняковского и равенство (36), а так же оценки для приращений из лемм 2 [9] и 3 [9], получим:

$$E(J_{22}(t))^2=E[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{p=1}^{j-1}[(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+k\delta+$$
$$+ph_n, X_n(\tau_t+k\delta+ph_n))-(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+k\delta+$$
$$+(p-1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))](B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))]^2=E[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l-2}[(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+k\delta+$$
$$+ph_n, X_n(\tau_t+k\delta+ph_n))-(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+k\delta+$$
$$+(p-1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))]\times$$
$$\times\sum_{j=p+1}^{l-1}(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))]^2=$$
$$=\frac{1}{4}E[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l-2}[(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+k\delta+ph_n, X_n(\tau_t+k\delta+ph_n))-$$
$$-(f_{n_X}' f_n)(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n, X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n))]\times$$
$$\times[(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+ph_n))^2-$$
$$-\sum_{j=p+1}^{l}[(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2]]^2\le$$
$$\le\frac{1}{4}m_tl\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l-2}E([C\,|\,X_n(\tau_t+k\delta+ph_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta+(p-1)h_n)|+Ch_n]^2\times[(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+ph_n))^2-\sum_{j=p+1}^{l}[(B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2]^2)\le Ch_nm_tl\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l-2}E[(B_n(\tau_t+$$
$$+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+ph_n))^2-\sum_{j=p+1}^{l}[(B_n(\tau_t+k\delta+$$
$$+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2]^4)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le Ch_nm_tl\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=1}^{l-2}(\delta^4+(l-p)\sum_{j=p+1}^{l}h_n^4))^{\frac{1}{2}}\le Ch_nm_t^2l^2\delta^2\le\frac{C\delta^2}{h_n} \qquad (38)$$

Тогда, исходя из оценок (37) и (38) получим, что

$$E(J_2(t))^2\le\frac{C}{n\delta}+C\delta\sum_{k=0}^{m_t-1}(X_n(\tau_t+k\delta)-$$
$$-X(\tau_t+k\delta))^2+C(K(n,h_n)-(1-2\theta))^2+\frac{C\delta^2}{h_n} \qquad (39)$$

Для оценки слагаемых $J_3(t)$, $J_4(t)$, $J_5(t)$, $J_6(t)$ воспользуемся оценкой приращения для $X_n(t)$ из леммы 1 и тем, что $f\in C_B^2(R^2)$. Тогда, по неравенству Коши-Буняковского и лемме 2 [9] получаем: $E(J_3(t))^2\le C\delta$ и

$$E(J_4(t))^2\le Ch_n^2\delta \qquad (40)$$

$$E(J_5(t))^2\le Clm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}E[(X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))^4(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)- \qquad (41)$$
$$-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))^2]\le C\delta$$

$$E(J_6(t))^2\le Ch_n^2lm_t\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{j=1}^{l-1}E[(X_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-$$
$$-X_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n))^2\times$$
$$\times(B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n))^2]\le$$
$$\le Ch_n^3l^2m_t^2\delta\le Ch_n\delta \qquad (42)$$

Тогда, из неравенств (35), (39)-(42) получаем оценку $H_2(t)$.

$$E(H_2(t))^2 \le \frac{C}{n\delta} + C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t + k\delta) -$$

$$-X(\tau_t + k\delta))^2 + C(K(n,h_n) - (1-2\theta))^2 + \frac{C\delta^2}{h_n}$$

Из леммы 5 вытекает: $E(H_3(t))^2 \le Ch_n + C\delta + \dfrac{C}{n}$.

Окончательно, из оценок $H_0(t), H_1(t), H_2(t), H_3(t)$ получаем следующее неравенство

$$E(X_n(t) - X(t))^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n} + CE(X^0{}_n(\tau_t) - x)^2 +$$

$$+\frac{C}{n^4 h_n \delta^2} + \frac{C}{n\delta} + C\delta \sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n(\tau_t + k\delta) - X(\tau_t + k\delta))^2 +$$

$$+Ch_n + \frac{C}{n} + C(K(n,h_n) - (1-2\theta))^2$$

Пользуясь дискретным аналогом неравенства Гронвалла получаем:

$$E(X_n(t) - X(t))^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n} + C\delta +$$

$$+CE(X^0{}_n(\tau_t) - x)^2 + \frac{C}{n^4 h_n \delta^2} + \frac{C}{n\delta} +$$

$$+Ch_n + \frac{C}{n} + C(K(n,h_n) - (1-2\theta))^2$$

Если $1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2}$, то, положив $\delta = h_n^{1/3}/n^{1/3}$ получим первое неравенство теоремы, а если $h_n \ge 1/n^{1/2}$, тогда $\dfrac{1}{nh_n} \le h_n$ и, взяв $\delta = h_n$, имеем второе неравенство.

Доказательство следствия 1. Получается предельным переходом в неравенстве из условия теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Достаточность доказана в следствии 1. Докажем необходимость. Пусть $X_n(t)$ сходится к некоторому процессу $X(t)$ в требуемом смысле, и пусть $Y_n(t)$ – решение уравнения (4) для $\theta = (1 - K(n,h_n))/2$, то есть, воспользовавшись эквивалентной записью уравнения (4), $Y_n(t)$ – решение уравнения

$$Y_n(t) = x + (I)\int_0^t f(s, Y_n(s))dB(s) +$$

$$+\frac{1-K(n,h_n)}{2}\int_0^t (ff'_Y)(s, Y_n(s))ds + \int_0^t g(s, Y_n(s))ds, \quad (48)$$

Из теоремы 1 вытекает справедливость неравенства

$$\sup_{t\in T} E[X_n(t) - Y_n(t)]^2 \le$$

$$\le C \sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^0(t) - x]^2 + \frac{C}{n} + Ch_n + \frac{C}{n^4 h_n^3}$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $1/n^2 = o(h_n)$ получим $\sup_{t\in T} E[X_n(t) - Y_n(t)]^2 \to 0$. Таким образом, $Y_n(t)$ сходится к $X(t)$. Поэтому и правая часть равенства (48) сходится. Отсюда вытекает, что и последовательность коэффициентов $(1-K(n, h_n))/2$ сходится, что и влечет за собой сходимость последовательности $K(n, h_n)$. Теорема доказана.

Результаты настоящей статьи доложены 08.09.2003г. на международной конференции «AMADE – 2003» [11]

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Itô K. On a stochastic integral equations //Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1946. – Vol. 22. – P. 32 – 36.
2. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1961. – 558 с.
3. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.:Наука, 1990. – 630 с.
4. Wong E., Zakai M. On the relationship between ordinary and stochastic differential equations // Internat. J. Engin. Sci. – 1965. – Vol. 3. – P. 213 – 229.
5. Мацкявичюс В. S^p-устойчивость решений симметрических стохастических дифференциальных уравнений // Лит. мат. сб. – 1985. – Т. 25, № 4. – С. 72 – 84.
6. Лазакович Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов //Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т.38, №5. – С. 23–27.
7. Лазакович Н.В., Яблонский О.Л. О приближении решений одного класса стохастических уравнений // Сиб. матем. журнал. – 2001. – Т. 42, № 1. – С. 87–102.
8. Лазакович Н.В., Юферова И.В. Аппроксимация стохастических интегралов Ито и Стратоновича в алгебре обобщенных случайных процессов //Известия АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1994. – №2. – С. 28–32.
9. Яблонский О.Л. Классификация способов аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов //Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т.44, №2. – С. 22–26.
10. Егоров Ю.В. К теории обобщенных функций //Успехи математических наук. – 1990. – Т.45, вып.5 (275). – С. 3–40.
11. Русина Т.И., Яблонский О.Л. Неоднородные уравнения в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.// Тезисы докл. междунар. конф. «Аналитические методы анализа и дифференц. уравн.» – Мн.:ИМ НАНБ, 2003. С. 154.

УДК 681.324:519.711.7

Головко В.А., Маньяков Н.В.

МАТРИЧНЫЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД ОБУЧЕНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СЕТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИВНОГО ШАГА

Основным методом обучения многослойных гетерогенных нейронных сетей прямого распространения без обратных связей является метод обратного распространения ошибки [1], наиболее эффективно представимый в его матричной форме для программной реализации [2]:

Модификация синаптических связей и порогов многослойной гетерогенной нейронной сети производится в соответствии с формулами:

***Головко Владимир Адамович**, д.т.н., профессор каф. ЭВМ и С Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*