УДК 517.9

*Макарук С.Ф.*

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА ДВУМЕРНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача оптимального дизайна, которая заключается в расположении круговых включений в материале таким образом, чтобы материал в целом имел экстремальную проводимость в заданном направлении. Эта задача имеет техническое применение. Она соответствует следующей проблеме, возникающей в инженерии. Конструктор имеет в своем расположении материал заданной формы, на границе которого приложено внешнее поле. И пусть у конструктора имеются включения заданной формы и размера. Необходимо расположить эти включения с фиксированной концентрацией таким образом, чтобы проводимость в выбранном направлении была максимальной (минимальной). Используя наши формулы, конструктор может составлять композиционный материал с оптимальными свойствами.

Задача оптимального дизайна состоит в отыскании таких характеристик включений, при которых материал в целом (или, другими словами, однородный материал, эквивалентный данному неоднородному) имеет максимальное (минимальное) значение какого-нибудь из его физических параметров. Соответствующие математические задачи формулируются обычно как вариационные задачи для функционала энергий с теми или иными ограничениями (см. [1–4]). Типичными физическими характеристиками при этом могут являться заданные проводимости компонент, а ограничениями – условие идеального контакта на границе матрицы и включений, наличие внешнего поля вне композита. Эти условия могут быть представлены в форме краевых задач для соответствующих потенциалов. Если неизвестные переменные (например, форма включений, их расположение, размер и т. д.) имеют геометрическую природу, то мы имеем дело с задачами оптимизации формы.

Мы предлагаем другую формулировку задач оптимального дизайна. Принципиальное различие состоит в том, что мы фиксируем форму и размеры включений. В частности, мы рассматриваем случай ограниченной области, заполненной материалом с $N$ включениями ($N$ может быть равно единице). Каждое включение при этом имеет положительную концентрацию в основном материале. Это приводит к необходимости применения методов, отличных от метода гомогенизации (см. [4–5]), достаточно часто используемого в теории оптимального дизайна. Напомним, что гомогенизация применима, если характеристика размера $\varepsilon$ включения стремиться к нулю (в нашем случае это означало бы, что $N$ стремится к бесконечности).

Мы также обсуждаем задачу оптимального дизайна в случае неограниченных областей. В этом случае для простого внешнего поля задача оптимизации эквивалентна задаче оптимизации эффективной проводимости композиционного материала при условии, что концентрация включений достаточно мала.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА

**2.1. Краевая задача.** Рассмотрим ограниченную односвязную область $Q$ на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}\cup\infty$. Пусть $D_k\,(k=1,2,\ldots,N)$ взаимно непересекающиеся круги $D_k:=\{z\in\mathbb{C}:|z-a_k|<r\}$ одинакового радиуса, принадлежащие $Q$. Следовательно, $Q$ состоит из объединения многосвязной области $D=Q-\bigcup_{k=1}^{N}D_k$ (матрицы) и непересекающихся дисков $D_k$ (включений).

Мы изучаем проводимость композиционного материала, когда области $D$ и $D_k$ заполнены материалами с проводимостями $\lambda_m$ и $\lambda_i$, соответственно. Предположим, что рассматриваемое поле потенциально, т.е., существует потенциал $u(z)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u=0 \quad \text{в} \ \bigcup_{k=1}^{N}D_k\cup D. \tag{2.1}$$

Пусть выполнены условия сопряжения (условия идеального контакта)

$$u^+=u^-,\ \ \lambda_m\frac{\partial u^+}{\partial n}=\lambda_i\frac{\partial u^-}{\partial n} \ \text{ на } T,\ \ k=1,2,\ldots N. \tag{2.2}$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали, окружность $T_k:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a_k|=r\}$ является границей $D_k$ и

$$u^+(t):=\lim_{z\to t,z\in D}u(z),\quad u^-(t):=\lim_{z\to t,z\in D_k}u(z),$$
$$t\in T_k,\ \ k=1,2,\ldots N.$$

Мы также предполагаем, что $u(z)$ удовлетворяет некоторому краевому условию на $\partial Q$. Пусть $h(t)$ заданная гельдеровская функция на кривой $\partial Q$. Обычно рассматриваются следующие краевые условия:

$$u(t)=h(t),\quad t\in\partial Q, \ \text{(условие Дирихле)} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=h(t),\quad t\in\partial Q, \ \text{(условие Неймана)} \tag{2.4}$$

или смешанное краевое условие, когда условия Дирихле и Неймана заданы на различных частях $\partial Q$. Можно ввести два типа комплексных потенциалов, соответствующих рассматриваемым задачам (см., [6]). Первый тип имеет форму

$$\varphi(z)=u(z)+iv(z),\ \ z\in D;$$

$$\varphi_k(z)=\frac{\lambda_i+\lambda_m}{2\lambda_m}(u_k(z)+iv_k(z)),\ z\in D_k,$$

где функции $\varphi(z)$, $\varphi_k(z)$ аналитичны в областях $D$ и $D_k$, соответственно, и непрерывно дифференцируемы в замыканиях этих областей. Тогда два действительных условия (2.2) на каждой из окружностей $T_k$ могут быть записаны в терминах комплексных потенциалов

$$\varphi(t)=\varphi_k(t)-\rho\overline{\varphi_k(t)},\ \ |t-a_k|=r_k,\quad k=1,2,\ldots N, \tag{2.5}$$

где $\rho=\dfrac{\lambda_i-\lambda_m}{\lambda_i+\lambda_m}$ параметр, введенный Бергманом [3]. Соотношение (2.5) называют условием $R$- линейного сопряжения.

***Макарук Светлана Федоровна,*** *ст. преподаватель каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
*Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*

Условие Дирихле (2.3) принимает при этом вид

$$\operatorname{Re}\varphi(t) = h(t), \quad t \in \partial Q. \qquad (2.6)$$

Функцию $h(t)$ можно рассматривать как действительную часть функции $f(t)$, аналитически продолженной в область $Q$. Тогда (2.6) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}(\varphi(t) - f(t)) = 0, \quad t \in \partial Q. \qquad (2.7)$$

*Замечание.* Функция $f(z)$ может рассматриваться как решение задачи (2.5)-(2.6) при $\rho = 0$. В этом случае потенциал $f(z)$ не зависит от параметров $\lambda_i = \lambda_m$.

Второй тип потенциалов определяется производными

$$\psi(z) = \varphi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \psi_k(z) = \varphi_k'(z). \qquad (2.8)$$

Тогда (2.2) представляет собой следующее условие $R$ – линейного сопряжения

$$\psi(t) = \psi_k(t) + \rho\left(\frac{r}{t - a_k}\right)^2 \overline{\psi_k(t)}, \qquad (2.9)$$
$$|t - a_k| = r_k, \quad k = 1, 2, \ldots N.$$

Здесь мы использовали следующее соотношение из работы [6]

$$[\overline{\psi_k(t)}]' = -\rho\left(\frac{r}{t - a_k}\right)^2 \overline{\psi_k(t)}, \quad |t - a_k| = r_k. \qquad (2.10)$$

Пусть $n(t) = n_1 + in_2$ вектор внешней нормали к $\partial Q$, записанный в комплексной форме. Условие Неймана (2.4) при этом может быть записано в виде

$$\operatorname{Re}\{n(t)\psi(t)\} = f_1(t), \quad t \in \partial Q, \qquad (2.11)$$

так как

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n_1\frac{\partial u}{\partial x} + n_2\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Re}(n_1 + in_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

*Пример.* Рассмотрим частный случай задачи (2.1)-(2.2) со смешанными краевыми условиями. Пусть $Q$ квадрат с единичной площадью $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1/2 < x, y < 1/2\}$. Пусть

$$u(\pm 1/2, y) = \pm 1/2, \quad -1/2 < y < 1/2;$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, \pm 1/2) = 0, \quad -1/2 < x < 1/2. \qquad (2.12)$$

Задача (2.1)-(2.2),(2.12) – это основная краевая задача теории композиционных материалов, представленных единичной ячейкой $Q$. Мы имеем скачок потенциала вдоль оси *OX*. Значит внешнее поле направлено вдоль оси *x*. Соотношение (2.12) записывается в терминах комплексных потенциалов следующим образом

$$\operatorname{Re}\varphi(t) = \pm 1/2, \quad t = \pm 1/2 + iy;$$
$$\operatorname{Im}\varphi(t) = 0, \quad t = x \pm i/2. \qquad (2.13)$$

**2.2. Задача оптимального дизайна.** Рассмотрим теперь задачу (2.1)-(2.2), т. е. (2.5)-(2.6) (или (2.5), (2.7)) в терминах комплексных потенциалов. Локальное соотношение между потоком $q$ и градиентом $\nabla u$ задано одним из известных законов (законом Фурье в случае задачи теплопроводности, законом Ома для электрического поля и т.п.)

$$q = \begin{cases} \lambda_m \nabla u & \text{в } D, \\ \lambda_i \nabla u & \text{в } \bigcup\limits_{k=1}^{N} D_k. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Введем величину $\lambda_Q$ при помощи соотношения

$$\lambda_Q F = \lambda_m \iint\limits_D \frac{\partial u}{\partial x} dxdy + \lambda_i \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{D_k} \frac{\partial u_k}{\partial x} dxdy, \qquad (2.15)$$

где

$$F = \iint\limits_Q \operatorname{Re} f'(z) dxdy. \qquad (2.16)$$

В правой части (2.15) мы имеем координату по *x* общего потока, проходящего через область $Q$. В левой части мы имеем координату по $x$ общего потока потенциала $f(z)$, умноженную на новую величину $\lambda_Q$, которую будем называть проводимостью области $Q$ в направлении $x$. Направление *x* фиксируется для определенности, проводимость области $Q$ в любом другом направлении может рассматриваться таким же образом. Функцию $f(z)$ можно рассматривать, как решение задачи Дирихле (2.7) для области $Q$, т. е., для однородного материала с постоянной проводимостью $\lambda_Q$. Тогда (2.15) может рассматриваться как равенство потоков в направлении $x$ данного композиционного материала и однородного материала, эквивалентного данному.

Далее, мы нормируем данную функцию $f(z)$, обозначая

$$F = \iint\limits_Q \operatorname{Re} f'(z) dxdy = \int\limits_{\partial Q} \operatorname{Re} f(t) dy = \int\limits_{\partial Q} h(t) dy = |Q|. \qquad (2.17)$$

В частности, если внешнее поле определяется комплексным потенциалом $f(z) = z$, то под $|Q|$ в (2.17) понимается площадь области $Q$. Поэтому, если $u(z)$ и $u_k(z)$ удовлетворяют задаче (2.1)-(2.2), (2.12), то соотношение (2.15) совпадает с определением эффективной проводимости композиционного материала в направлении *x* (см., например, [7] и [4]).

Используя формулу Грина и теорему о среднем значении гармонических функций, можно переписать (2.15) следующим образом

$$\lambda_Q = \lambda_m \int\limits_{\partial Q} u dy + \pi r^2 (\lambda_i - \lambda_m) \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_k}{\partial x}(a_k), \qquad (2.18)$$

Мы можем заменить потенциал $u(z)$ на $\operatorname{Re} f(z)$ на $\partial Q$. Используя (2.10) запишем (2.18) в виде

$$\frac{\lambda_Q}{\lambda_m} = 1 + \pi r^2 \frac{\lambda_i - \lambda_m}{\lambda_m} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_k}{\partial x}(a_k). \qquad (2.19)$$

Для наших целей удобнее записать (2.19) в терминах комплексных потенциалов

$$\frac{\lambda_Q}{\lambda_m} = 1 + 2\rho v |Q| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Re}\psi_k(a_k), \qquad (2.20)$$

где $v = \dfrac{N\pi r^2}{|Q|}$ концентрация включений в $Q$.

В дальнейшем мы будем рассматривать две следующие модельные задачи оптимального дизайна:

*Задача А.* Пусть $Q$ – заданная ограниченная область в $\mathbf{C}$, $f(z)$ – заданная функция, аналитическая в $Q$, а фиксированная константа $\rho$ удовлетворяет следующему неравенству $|\rho| < 1$. Пусть $N$ кругов фиксированного радиуса $r$ расположены в области $Q$. Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_k(z)$ удовлетворяют задаче (2.5), (2.7), $\psi_k(z) = \varphi_k'(z)$.

Вопрос состоит в определении такого расположения кругов, чтобы функционал $\lambda_Q$ из (2.20) достигал максимального (минимального) значения.

В этой постановке круги должны быть взаимно непересекающимися, но возможно касание кругов между собой, а также их касание границы области $Q$.

Если граница области $Q$ находится далеко от всех включений, то этот случай можно смоделировать, полагая область $Q$ неограниченной. Тогда вместо граничного условия на $\partial Q$ мы полагаем, что $f(z)$ имеет особенность на бесконечности. В этом случае мы также используем формулу (2.20), предполагая, что $v|Q|$ заданное положительное число.

<u>*Задача В.*</u> Пусть $v|Q|$ заданное положительное число, $f(z)$ заданная функция аналитическая в $\mathbb{C}$ и фиксированная константа $\rho$ удовлетворяет следующему неравенству $|\rho|<1$. Пусть $N$ дисков фиксированного радиуса $r$ расположены на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $\psi(z)$ и $\psi_k(z)$ удовлетворяют задаче

$$\begin{gathered}\psi(t)=\psi_k(t)+\rho\left(\frac{r}{t-a_k}\right)^2\overline{\psi_k(t)}-f'(t),\\ |t-a_k|=r_k,\quad k=1,2,\dots N,\end{gathered}\tag{2.21}$$

где $\psi_k(z)$ аналитична в области $D_k$, $\psi(z)$ аналитична в дополнении всех $D_k$ до расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ и $\psi(\infty)=0$.

Вопрос состоит в размещении этих дисков таким образом, чтобы функционал $\lambda_Q$ из (2.20) достигал максимального (минимального) значения.

Для изучения Задач А и В достаточно исследовать величину

$$\sigma=\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Re}\psi(a_k)\tag{2.22}$$

вместо $\lambda_Q$, потому что только эта часть выражения

$$\frac{\lambda_Q}{\lambda_m}=1+2\rho v|Q|\frac{1}{N}\sigma$$

зависит от расположения включений, т. е. зависит от параметров $a_k$. Поэтому Задача А может быть сформулирована следующим образом:

<u>*Задача $A_0$.*</u> Пусть $Q$ – заданная ограниченная область в $\mathbb{C}$, $f(z)$ – заданная функция, аналитическая в $Q$, и фиксированная константа $\rho$ удовлетворяет следующему неравенству $|\rho|<1$. Пусть $N$ дисков, фиксированного радиуса $r$ вставлены в $Q$. Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_k(z)$ удовлетворяют задаче (2.5), (2.7), $\psi_k(z)=\varphi_k'(z)$.

Вопрос состоит в размещении этих дисков таким образом, чтобы функционал $\sigma$ из (2.22) достигал максимального (минимального) значения.

Подобным же образом формулируется Задача $B_0$, соответствующая Задаче В.

<u>*Замечание.*</u> Если включения имеют форму, отличную от круговых, то функционал $\sigma$ имеет вид

$$\sigma=\iint_P \operatorname{Re}\psi(z)\,dxdy,$$

где $P$ – объединение всех включений, $\psi(z)=\psi_k(z)$ - потенциал в $k-$ом включении.

<u>*Теорема 1.*</u> Для любого фиксированного параметра $\rho$, ($|\rho|<1$) и фиксированного радиуса включений $r$ существует оптимальная конфигурация, которая решает Задачу А (или Задачу $A_0$).

*Доказательство.* Задача А означает оптимизацию функционала $\lambda_Q$ в (2.22) на множестве решений (2.9). В [6] решение задачи $R-$ линейного сопряжения (2.9) дано в аналитическом виде. Компоненты $\psi_k(z)=\psi_k(z;\rho,r^2,a_1,\dots a_N)$ этого решения являются аналитическими по $\rho$, $r^2$ и непрерывными по $a_1,\dots,a_N$. Поэтому, функционал $\lambda_Q$ непрерывен по переменным $a_1,\dots a_N$ и, следовательно, ограничен на множестве

$$\begin{gathered}\Omega:=\{(a_1,\dots a_N)\in C^N:\ a_j\in Q,\\ j=1,\dots N;\ |a_k-a_j|\ge 2r,\ \ k\ne j\}.\end{gathered}$$

Чтобы найти оптимальную конфигурацию, решающую Задачу А, достаточно найти экстремум вещественно-значного функционала $\lambda_Q$ от $N$ комплексных переменных $a_1,\dots a_N$ в ограниченной области $\Omega$. Существование этого экстремума следует из классической теоремы Вейерштрасса.

## 3. СЛАБО НЕОДНОРОДНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Предположим, что расположение дисков $D_k$ известно. Используя [6] можно представить значения функций $\psi(z)$, $\psi_k(z)$ в виде рядов по малому параметру $\rho$

$$\begin{gathered}\psi(z)=\psi^{(0)}(z)+\rho\psi^{(1)}(z)+O(\rho^2),\\ \psi_k(z)=\psi_k^{(0)}(z)+\rho\psi_k^{(1)}(z)+O(\rho^2),\quad \rho\to 0\end{gathered}\tag{3.1}$$

Подставим (3.1) в (2.9) и соберем коэффициенты при $\rho^0$ и $\rho^1$. Первое из этих соотношений является задачей о скачке

$$\psi^{(0)}(t)=\psi_k^{(0)}(t)-f'(t),\ \ |t-a_k|=r,\ \ k=1,2,\dots N,\tag{3.2}$$

относительно функций $\psi(z)^{(0)}$, $\psi_k^{(0)}(z)$, аналитических в $Q$ и $D_k$, соответственно. Единственное решение (3.2) имеет форму

$$\psi^{(0)}(z)=0,\ \ \psi_k^{(0)}(z)=f'(z),\ \ k=1,2,\dots N.\tag{3.3}$$

Второе соотношение после подстановки (3.3) дает другую задачу о скачке

$$\begin{gathered}\psi^{(1)}(t)=\psi_k^{(1)}(t)+\left(\frac{r}{t-a_k}\right)^2\overline{f'(t)},\\ |t-a_k|=r,\ \ k=1,2,\dots N,\end{gathered}\tag{3.4}$$

Вместо (3.4) можно рассмотреть следующую задачу

$$\varphi^{(1)}(t)=\varphi_k^{(1)}(t)-\overline{f(t)},\ \ |t-a_k|=r,\ \ k=1,2,\dots N,\tag{3.5}$$

относительно комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\varphi_k(z)$, для которых $(\varphi^{(1)}(z))'=\psi^{(1)}(z)$, $(\varphi_k^{(1)}(z))'=\psi_k^{(1)}(z)$ и $\varphi^{(1)}(\infty)=0$ (см. (2.8) и (2.10)). Заметим, что функция $\overline{f(t)}=\overline{f\left(\frac{r^2}{\overline{t-a_k}}+a_k\right)}$ аналитически продолжается на $|z-a_k|>r$, так как $f(z)$ аналитична в $|z-a_k|<r$. Тогда

единственное решение задачи (3.5) может быть найдено в виде

$$\varphi^{(1)}(z) = -\sum_{m=1}^{N} \overline{f\left(\frac{r^2}{z-a_m}+a_m\right)},\ \ z\in Q,$$

$$\varphi_k^{(1)}(z) = -\sum_{m\neq k} \overline{f\left(\frac{r^2}{z-a_m}+a_m\right)},\ \ z\in D_k,\ \ k=1,2,\dots N, \tag{3.6}$$

где в сумме $\sum\limits_{m\neq k}$ индекс $m$ изменяется от 1 до $N$ за исключением $m \neq k$. Поэтому,

$$\varphi_k^{(1)}(z) = \sum_{m\neq k}\left(\frac{r}{z-a_k}\right)^2 \overline{f'\left(\frac{r^2}{z-a_m}+a_m\right)}, \tag{3.7}$$

$z\in D_k,\ \ k=1,2,\dots N$.

Подставляя (3.3), (3.7) в (3.1) и далее в (2.22) получим приближенное представление функционала

$$\sigma \approx \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} f'(a_k) + \rho\sum_{k=1}^{N}\sum_{m\neq k}\left(\frac{r}{a_k-a_m}\right)^2 \overline{f'\left(\frac{r^2}{a_k-a_m}+a_m\right)}\right). \tag{3.8}$$

Далее исследование экстремальных значений $\sigma$ может быть проведено стандартными методами.

В частном случае, когда $f(z)=z$ получаем из (3.8)

$$\sigma = N + \rho\sigma_1,$$

где только выражение

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m\neq k}\mathrm{Re}\frac{1}{(a_k-a_m)^2} \tag{3.9}$$

зависит от расположения центров $a_k$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $\rho$ достаточно маленькое и $f(z)=z$. Тогда существует конфигурация включений, для которых функционал $\lambda_Q$ достигает максимального (минимального) значения, т. е. существует решение Задачи В.

Каждое включение, соответствующее решению этой задачи, касается по крайней мере одного из оставшихся включений.

*Доказательство.* В рассматриваемом случае изменяющаяся часть функционала $\lambda_Q$ совпадает с функционалом $\sigma_1$, определенным в (3.9). Это – вещественнозначная функция от $N$ комплексных переменных $(a_1,\dots a_N)\in\Omega$, где $\Omega$ определена в предыдущем разделе равенством (2.23). Область $\Omega$ ограничена в $\mathbf{C}^N$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса $\sigma_1$ достигает своего максимального (минимального) значения в области $\Omega$. Из определения области $\Omega$ следует, что $\sigma_1$ гармоническая функция в $\Omega$. Поэтому по принципу максимума для гармонической функции от нескольких переменных экстремальные точки функции $\sigma_1$ принадлежат границе $\Omega$. Теорема доказана.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. C. Barbarosie (1997) Optimization of perforated domains through homogenezation. Struct. Optim. **14**, P. 225-231.
2. В.Л. Бердичевский (1983) Вариационные принципы механики сплошной среды. Наука, Москва.
3. G. Buttazzo (1998) On the existence of minimizing domains for some shape optimization problem. ESIAM: Proceedings. Actes du 29eme Congres d’Analyse Numerique: CANum’97. Paris, **3**, P. 51-64.
4. A.V. Cherkaev (2000) Variational methods for structural optimization. Springer Verlag, New York.
5. V.V. Jikov, S.M. Kozlov and O.A. Oleinik (1994) Homogenization of differential operators and integral functionals. Springer Verlag, Berlin.
6. V.V. Mityushev, S.V. Rogosin (1999) Constructive methods for linear and nonlinear boundary value problems for analytic functions. Chapman&Hall/CRC, Boca Raton – London.
7. V.V. Mityushev (2001) Transport properties of doubly periodic arrays of circular cylinders and optimal design problems. Appl. Math. And Optimization. **44**, P. 17-31.


УДК 513.82

***Курочка О.Н., Юдов А.А.***

# ОБ ИНВАРИАНТНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА В СТРУКТУРНУЮ ГРУППУ ЛИ И В ЕЕ АЛГЕБРУ ЛИ

Пусть $G$ – группа Ли, $H$ – ее замкнутая подгруппа Ли, $M = G/H$ – однородное $G$-пространство,

$$\pi: G \to G/H : a \to aH \tag{1}$$

– каноническая проекция.

Группа $G$ действует в $M$ с помощью левых сдвигов:

$$G\times M \to M : (a, bH) \to abH = a\cdot bH = T_a(bH). \tag{2}$$

<u>Определение:</u> *Подмногообразием* размерности $n$ однородного пространства $M$ будем называть пару ($D_0$, $f$), где $D_0$ – окрестность нуля евклидова пространства $R_n$, $f$ – аналитическое вложение $D_0$ в $M$.

Таким образом, подмногообразия однородного пространства изучаются локально. Теория построения канонического репера подмногообразия подробно описана в работе [1]. Ниже излагаются идеи работы [1], и строится канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в её алгебру Ли.

Предположим, что $f(0) = \pi(e)$. В противном случае, если $f(0) = \pi(a) \neq \pi(e)$, от подмногообразия ($D_0$, $f$) перейдём к ему эквивалентному ($D_0$, $T_{a^{-1}}\circ f$). Пусть $dimG = r$, $dimH = s$, тогда $dimM = r - s = m$.

Рассмотрим пространство $\Gamma_1$ всех касательных к $M$ $n$-мерных подпространств. Действие группы $G$ на $M$ продолжается в действии на $\Gamma_1$, на котором группа $G$ будет действовать с помощью дифференциалов левых сдвигов пространства $M$

***Курочка Ольга Николаевна,*** *учитель математики СШ № 12 г. Бреста.*
***Юдов Александр Андреевич,*** *к. физ.-мат. н., доцент каф. алгебры и геометрии Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
*Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.*