

$$=d\pi(d\pi^{-1}(N_g)) = d\pi(N_g^*).$$

Отсюда:

$$dL_a(N_f^*) = N_g^*, \quad (13)$$

поскольку при  $dL_a$  полный прообраз преобразуется в полный прообраз.

Пусть

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0 \quad (14)$$

- система 1-форм в точке  $\hat{g}^*(x_0)$ , определяющая подпространство  $N_g^*$ , тогда система

$$dL_a \omega^{t+1} = 0, \dots, dL_a \omega^r = 0 \quad (15)$$

1-форм в точке  $\hat{f}(x_0)$  будет определять подпространство  $N_f^*$ . Рассуждая аналогично для подпространства  $N_{if}^*$  и  $N_{ig}^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, p+1$ , получим, что  $N_{if}^*$  и  $N_{ig}^*$  определяются системами 1-форм, отличающимися левым сдвигом  $L_a$ . Это означает, что дифференциальные инварианты подмногообразий  $(D_o, f)$  и  $(D_o, g)$  в соответствующих точках совпадают. Базисными формами подмногообразия  $(D_o, f)$ ,  $\omega^{s+1}, \dots, \omega^j$  мож-

но выбрать формы  $d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*$ , где  $V = \{V_1, \dots, V_n\}$  - некоторый базис векторных полей на  $D_o$ . Тогда базисными формами подмногообразия  $(D_o, g)$  будут формы

$$d(a \circ \hat{f})(V_i)_{x_0}^* = d\hat{g}(V_i)_{x_0}^* = d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*.$$

Достаточность. Пусть существует базис  $V = \{V_1, \dots, V_n\}$  векторных полей на  $D_o$ , такой, что  $\forall x_0 \in D_o$  в базисе  $\omega^j =$

$$d\hat{f}(V_i)_{x_0}^* = d\hat{g}(V_i)_{x_0}^*$$

подмногообразия  $(D_o, f)$  и  $(D_o, g)$  имеют одинаковые дифференциальные инварианты. Это значит, что любая форма  $\omega^j$ , не являющаяся базисной, выражается через  $\omega^j$  на пространствах  $T_{f(x_0)}^{\wedge} (Im \hat{f})$  и  $T_{g(x_0)}^{\wedge} (Im \hat{g})$

с одними и теми же коэффициентами. Поскольку  $\omega^j =$

$$d\hat{f}(V_i)_{x_0}^* = d\hat{g}(V_i)_{x_0}^*, \text{ то } \omega^j(d\hat{f}(V_k)_{x_0}^*) = \omega^j$$

УДК 517.9

Макарук С.Ф.

## КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В СЛУЧАЕ ДВУХ КРУГОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При конструировании композиционных материалов возникает задача размещения круговых включений таким образом, чтобы проводимость эквивалентного ему однородного материала (так называемая эффективная проводимость) принимала экстремально возможные значения. Задачи такого типа относятся к задачам оптимального дизайна композиционных материалов (см., например, [1-4]). Стационарная плоская задача такого типа может быть сформулирована как смешанная краевая задача для (аналитического) комплексного потенциала в области, часть границы которой неизвестна.

$$(d\hat{g}(V_k)_{x_0}^*) = \delta_k^i, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \text{ и значит:}$$

$$\hat{f}^*(\omega^j) = \hat{g}^*(\omega^j), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Остальные левоинвариантные формы  $\omega^j$  группы Ли  $G$  в

точках  $\hat{f}(x_0)$  и  $\hat{g}(x_0)$  выражаются через базисные с одина-

ковыми коэффициентами:  $\omega^j = \sum_i \alpha_i \omega^i$ . Значит:

$$\hat{f}^*(\omega^j) = \hat{f}^*(\sum_i \alpha_i \omega^i) = \sum_i \alpha_i \hat{f}^*(\omega^i) =$$

$$= \sum_i \alpha_i \hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\sum_i \alpha_i \omega^i) = \hat{g}^*(\omega^j).$$

Таким образом, выполняется условие теоремы 2.3 [2, стр. 238]. Тогда существует элемент  $a \in G$  такой, что для любого  $x_0 \in D_o$ :  $g(x_0) = L_a(f(x_0))$ , то есть по следствию 1 подмногообразия  $(D_o, f)$  и  $(D_o, g)$  эквивалентны. Теорема доказана.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андреев А.С., Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в ее алгебру Ли. // Вестник Брестского государственного университета, № 5- 2000.С. 28-31.
2. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970 г.
3. Андреев А.С. Построение канонического лифта подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в ее алгебру Ли. // Вестник Брестского государственного технического университета, № 5- 2001.С. 61-64.
4. Юдов А.А. Описание и обоснование метода Картаана построения канонического репера подмногообразия. // Известия АН БССР, деп. ВИНТИ, 1982 г., № 359582.
5. Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства  $G$  в структурную группу Ли и ее алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства  ${}^2R_4$ . // Известия АН БССР, деп. ВИНТИ, 1989 г., № 1498-В89.

Макарук Светлана Федоровна. Ассистент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

мость (например, теплопроводимость)  $\lambda_1$  и  $\lambda$ , соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что  $\lambda = 1$ . Предполагая наличие идеального контакта между средами, рассмотрим установившийся (тепловой) поток в композиционном материале  $D$ . Пусть  $f \in C^{(1, \lambda)}(\Gamma)$ ,  $g \in C^{(1, \lambda)}(\bar{D})$  заданные функции,

$$\rho = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1}. \quad \text{Задача оптимального дизайна состоит в}$$

нахождении кривой  $L$  и (кусочно-) аналитической функции  $\varphi(z)$ , непрерывной вплоть до границы соответствующих областей, удовлетворяющей краевым условиям

$$Re \varphi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \rho \overline{\varphi^+(t)} + g(t), \quad t \in L, \quad (2)$$

таких, что функционал эффективной проводимости  $\sigma$  принимает максимальное (или минимальное) значение, то есть

$$\sigma := \frac{1}{\pi r^2} \int_L Re \varphi^+(t) dy \rightarrow \max(\min), \quad t = x + iy, \quad (3)$$

в предположении, что площадь области  $D^+$  фиксирована.

Настоящая работа принадлежит конструктивному направлению в задачах оптимального дизайна композиционных материалов и основана на технике исследования краевых задач для аналитических и гармонических функций в специальных областях, описанной в [5]. Подобный подход был применен ранее в работе [6]. Исходя из предположений малости параметра  $\rho$  в [6] краевое условие задачи  $R$ -линейного сопряжения (2) заменено на краевое условие задачи о скачке

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = g(t), \quad t \in L. \quad (2')$$

Задача (1), (2'), (3) решена в [6] в случае конечного числа круговых включений. Кроме того, полное геометрическое описание оптимального размещения двух и трех круговых включений дано в важном для приложений случае  $g(z) = \bar{z}$ .

В настоящей работе дано полное геометрическое описание решения модельной задачи оптимального размещения двух круговых включений на плоскости (т. е.  $D = \hat{C}$ ) в случае  $g(z) = \bar{z}$ , то есть рассмотрена задача (3) для (кусочно-) аналитических функций, удовлетворяющих краевому условию

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \rho \overline{\varphi^+(t)} + \bar{t}, \quad t \in L, \quad (4)$$

где  $L = L_1 \cup L_2$ , а  $L_i = \{z \in C : |z - a_i| = r\}$ ,  $i = 1, 2$ , — окружности постоянного радиуса  $r$ , центры которых  $a_1, a_2$  ( $|a_1 - a_2| \geq 2r$ ) подлежат определению.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть  $z$  - некоторая точка на комплексной плоскости  $C$ . Обозначим, следуя [5], символом  $z_{(i)}^*$  точку симметричную

$$z \text{ относительно окружности } L_i, \text{ т.е. } z_{(i)}^* = \frac{r^2}{z - a_i} + a_i,$$

$i = 1, 2$ . Обозначим также через  $\varphi(z)$  компоненту решения

задачи (4) в области  $D^- = \hat{C} \setminus (\overline{\text{int } L_1} \cup \overline{\text{int } L_2})$ , а через  $\varphi_i(z)$  - компоненты решения (4) в областях  $D_i = \text{int } L_i$  соответственно,  $i = 1, 2$ .

Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) + \rho \overline{\varphi_2(z_{(2)}^*)} - \overline{z_{(1)}^*}, & z \in \bar{D}_1; \\ \varphi_2(z) + \rho \overline{\varphi_1(z_{(1)}^*)} - \overline{z_{(2)}^*}, & z \in \bar{D}_2; \\ \varphi(z) + \rho \overline{\varphi_1(z_{(1)}^*)} + \rho \overline{\varphi_2(z_{(2)}^*)}, & z \in D^- \end{cases} \quad (5)$$

По построению функция  $\Omega(z)$  аналитична в каждой из областей  $D_1, D_2, D^-$ , за исключением простых полюсов в точках  $z = a_1, z = a_2$  с вычетами  $(-r^2)$ . Кроме того, из краевого условия (4) следует, что скачок функции  $\Omega$  вдоль каждой из окружностей  $L_i, i = 1, 2$  равен нулю, т.е.

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \varphi_i(t) - \rho \overline{\varphi_i(t)} - \bar{t} - \varphi(t) = 0,$$

так как  $z_{(i)}^* = z$  при  $z = t \in L_i, i = 1, 2$ . Тогда по обобщенной теореме Лиувилля имеем

$$\Omega(z) = -\frac{r^2}{z - a_1} - \frac{r^2}{z - a_2} + c = -\overline{z_{(1)}^*} - \overline{z_{(2)}^*} + c_0. \quad (6)$$

Исходя из этого, приходим к системе функциональных уравнений для определения функций  $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ :

$$\begin{cases} \varphi_1(z) = -\rho \overline{\varphi_2(z_{(2)}^*)} - \overline{z_{(2)}^*} + c_0, & z \in \bar{D}_1 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \varphi_2(z) = -\rho \overline{\varphi_1(z_{(1)}^*)} - \overline{z_{(1)}^*} + c_0, & z \in \bar{D}_2 \end{cases} \quad (7.2)$$

Переходя в (7.2) к симметричным точкам относительно окружности  $L_2$ , находим  $\overline{\varphi_2(z_{(2)}^*)}$ :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_2(z_{(2)}^*)} &= -\rho \overline{\varphi_1((z_{(2)}^*)_{(1)}^*)} - \overline{(z_{(2)}^*)_{(1)}^*} + c_0 = \\ &= -\rho \overline{\varphi_1(\alpha(z))} - \alpha(z) + c_0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha(z) = (z_{(2)}^*)_{(1)}^* = -\frac{r^2(z - a_2)}{(a_1 - a_2)(z - a_2) - r^2} + a_1.$$

Тогда из (7.1) получим

$$\varphi_1(z) = \rho^2 \overline{\varphi_1[\alpha(z)]} + h_1(z), \quad z \in \bar{D}_1, \quad (8)$$

$$\text{где } h_1(z) = \rho \alpha(z) - \frac{r^2}{z - a_2} - \overline{a_2} - \rho c_0 + c_0. \text{ Заметим,}$$

что функции  $\alpha(z)$  и  $h(z)$  аналитичны в некоторой области, содержащей замкнутый круг  $\bar{D}_1$ . При этом  $\alpha(z)$  определяет так называемое конформное отображение внутрь области  $D_1$ , т. е. образ замкнутого круга  $\bar{D}_1$  при отображении  $\alpha(z)$  является собственным подмножеством открытого круга  $D_1(\alpha(\bar{D}_1)) \subset D_1, D_1 \setminus \alpha(\bar{D}_1) \neq \emptyset$ .

Из рекуррентной формулы (8) вытекает следующее формальное представление решения  $\varphi_1(z)$  в  $\bar{D}_1$ :

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} h_1[\alpha_k(z)] = h_1(z) + \rho^2 h_1[\alpha(z)] + \dots, \quad z \in \overline{D_1} \quad (9)$$

где  $\alpha_k(z)$  –  $k$ -ая итерация отображения  $\alpha$ . Ряд (9) сходится равномерно в  $\overline{D_1}$  к решению  $\varphi_1(z)$  уравнения (8) (см., например, [5]).

Аналогично получаем компоненту решения  $\varphi_2(z)$ :

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} h_2[\beta_k(z)] = h_2(z) + \rho^2 h_2[\beta(z)] + \dots, \quad z \in \overline{D_2}, \quad (10)$$

где  $\beta_k(z)$  –  $k$ -ая итерация отображения

$$\beta(z) = (z_{(1)}^*)_{(2)}^* = \frac{r^2(a_1 - z)}{(a_1 - a_2)(a_1 - z) - r^2} + a_2,$$

$$h_2(z) = \rho\beta(z) - \frac{r^2}{z - a_1} - \overline{a_1} - \rho\overline{c_0} + c_0.$$

Из теоремы о среднем гармонической функции вытекает, что функционал эффективной проводимости  $\sigma$  может быть представлен в виде

$$\sigma = \text{Re}\{\varphi_1'(a_1) + \varphi_2'(a_2)\} \quad (11)$$

Вычисляем значения соответствующих производных. В силу симметрии формул ограничимся выводом формулы для  $\varphi_1'(a_1)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1'(a_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} h_1'[\alpha_k(a_1)] \times \\ &\times \alpha'[\alpha_{k-1}(a_1)] \cdot \alpha'[\alpha_{k-2}(a_1)] \cdot \dots \cdot \alpha'(a_1) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} \left[ \rho\alpha'(a_1) + \frac{r^2}{(a_1 - a_2)^2} \right] \times \\ &\times \alpha'[\alpha_{k-1}(a_1)] \cdot \alpha'[\alpha_{k-2}(a_1)] \cdot \dots \cdot \alpha'(a_1), \quad z \in \overline{D_1}. \end{aligned}$$

Значение  $\alpha'(z)$  вычисляется непосредственно:

$$\alpha'(z) = \frac{r^4}{[(a_1 - a_2)(z - a_2) - r^2]^2},$$

$$\alpha'(a_1) = \frac{r^4}{[(a_1 - a_2)(a_1 - a_2) - r^2]^2}.$$

Также непосредственно устанавливаем следующий факт.

*Лемма.* Произведение  $\gamma_k = (a_1 - a_2)(\alpha_k(a_1) - a_2)$  является вещественно - значной функцией параметра  $A = |a_1 - a_2|$ . При этом  $\gamma_k > 0$  для всех  $A > 2r$ .

*Доказательство.* Достаточно убедиться в этом в случае  $k = 1$ . Вычисляя  $\alpha(a_1) - a_2$  имеем

$$\begin{aligned} \alpha(a_1) - a_2 &= -\frac{r^2(a_1 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_2) - r^2} + (a_1 - a_2) = \\ &= c(A)(a_1 - a_2), \end{aligned}$$

где  $c(A) = \frac{A^2 - 2r^2}{A^2 - r^2}$ . Отсюда следует утверждение леммы при  $k = 1$ . Индукция по  $k$  завершает доказательство леммы.

*Теорема.* При любом фиксированном  $|\rho| < 1$  функционал эффективной проводимости  $\sigma$  принимает максимальное значение в том случае, когда круговые включения касаются друг друга и расположены вдоль вещественной оси, и минимальное значение – когда круговые включения касаются друг друга и расположены вдоль мнимой оси.

*Доказательство.* Заметим, что сумма  $\varphi_2'(a_2)$  совпадает с суммой  $\varphi_1'(a_1)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \beta'(z) &= \frac{r^4}{[(a_1 - a_2)(a_1 - z) - r^2]^2}, \\ \beta'(a_2) &= \frac{r^4}{[(a_1 - a_2)(a_1 - a_2) - r^2]^2} = \alpha'(a_1), \\ h_2'(z) &= \rho\beta'(z) + \frac{r^2}{(z - a_1)^2}, \\ h_2'(a_2) &= \rho\beta'(a_2) + \frac{r^2}{(a_2 - a_1)^2} = h_1'(a_1). \end{aligned}$$

Также непосредственно проверяем, что  $\beta_k'(a_2) = \alpha_k'(a_1)$ . Следовательно, функционал эффективной проводимости  $\sigma$  может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \left[ \rho\alpha'(a_1) + \text{Re} \frac{r^2}{(a_1 - a_2)^2} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} \alpha_k'(a_1) =: \\ &=: \chi(a_1, a_2, \rho) \cdot \psi(a_1, a_2, \rho). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим сначала ряд

$$\psi(a_1, a_2, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} \alpha_k'(a_1). \quad (14)$$

При  $|a_1 - a_2| \geq 2r, \forall z \in \overline{D_1}$  выполнены неравенства

$$|\alpha'(z)| \leq \frac{r^4}{\left( \min_{z \in \overline{D_1}} |(a_1 - a_2)(z - a_2) - r^2| \right)^2} \leq \frac{r^4}{(2r^2 - r^2)^2} \leq 1.$$

Поскольку

$$\alpha(\overline{D_1}) \subset D_1,$$

$|\alpha_k'(z)| \leq 1, \forall z \in \overline{D_1}, \forall k = 1, 2, \dots$  Следовательно, ряд (14) сходится при любых  $|\rho| < 1$  равномерно по  $a_1, a_2$  из области  $|a_1 - a_2| \geq 2r$ .

Из леммы вытекает, что члены ряда (14) неотрицательны. При этом функция  $\psi(a_1, a_2, \rho)$  при любом фиксированном  $|\rho| < 1$  принимает максимальное значение на границе области  $|a_1 - a_2| \geq 2r$ , т. е. при  $|a_1 - a_2| = 2r$ :

$$\begin{aligned} 0 < \psi(a_1, a_2, \rho) &= \max_{|a_1 - a_2| \geq 2r} \psi(a_1, a_2, \rho) = \\ &= \psi(a_1, a_2, \rho) \Big|_{|a_1 - a_2| = 2r}. \end{aligned}$$

С другой стороны, при любом фиксированном  $\rho$  величина  $\chi(a_1, a_2, \rho)$  принимает максимальное (положительное) значение на границе области  $|a_1 - a_2| \geq 2r$ , если

$a_1 - a_2 = \pm 2r$ , и минимальное (отрицательное) значение на границе области  $|a_1 - a_2| \geq 2r$ , если  $a_1 - a_2 = \pm 2ri$ . Отсюда и следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Cherkhaev A. Variational Methods for Structural Optimization. N.-Y. etc.: Springer Verlag, 2000.
2. Лурье К. А., Черкаев А. В. Эффективные характеристики композиционных материалов и оптимальный дизайн

- структурных элементов // Успехи математических наук, т. 9 (1986), 3-81.
3. Bendse M. P. Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Berlin etc.: Springer Verlag, 1995.
4. Buttazzo G. On existence of minimizing domains for some shape optimization problem// ESAIM: Proceedings, v. 3 (1998), 51-64.
5. Mityushev V. V., Rogosin S. V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions. Boca Raton – London: Chapman & Hall / CRC Press, 2000.
6. Макарук С. Ф. Смешанная краевая задача для аналитических функций со свободной частью границы // Труды института математики НАНБ, т. 9 (2001), 101-104.

УДК 681.324:519.711.7

Маньяков Н.В., Махнист Л.П.

**МАТРИЧНАЯ АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ**

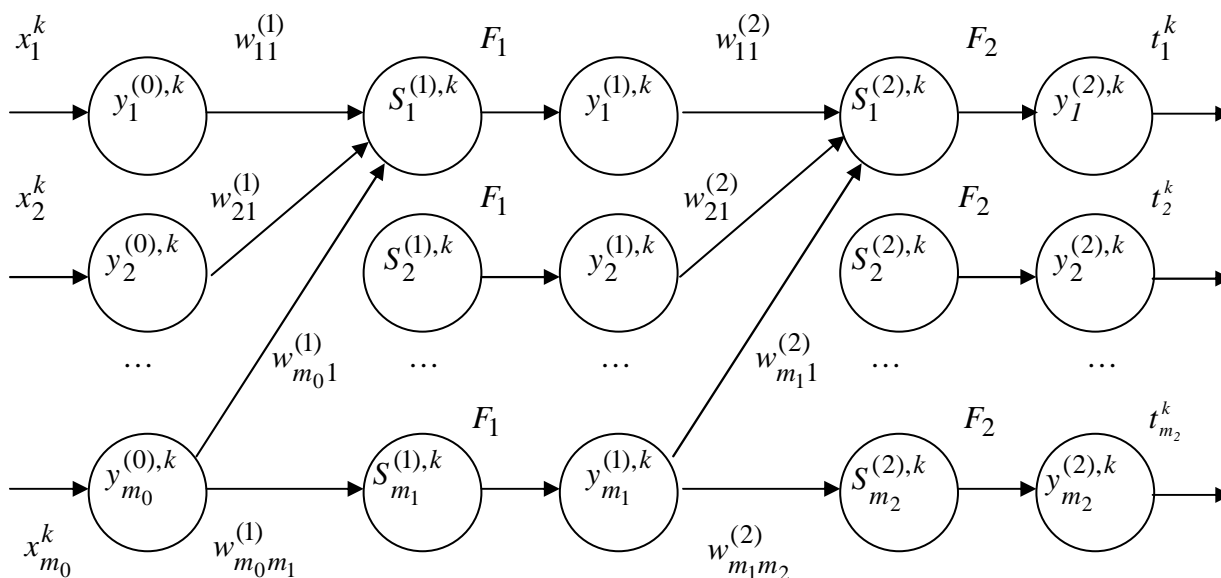


Рис.1. Схема функционирования нейронной сети

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБУЧЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ**

Рассмотрим двухслойную гетерогенную нейронную сеть, состоящую из  $m_0$  нейронных элементов распределительного слоя,  $m_1$  нейронов скрытого слоя и  $m_2$  – выходного слоя (рис.1).

Для данной сети каждый нейрон распределительного слоя имеет синаптические связи  $w_{i_0 i_1}^{(1)}$  ( $i_0 = \overline{1, m_0}, i_1 = \overline{1, m_1}$ ) со всеми нейронами скрытого слоя, а каждый нейрон скрытого слоя синаптические связи  $w_{i_1 i_2}^{(2)}$  ( $i_1 = \overline{1, m_1}, i_2 = \overline{1, m_2}$ ) со всеми нейронами выходного слоя. В качестве нейронов скрытого слоя используются

элементы с функцией активации  $F_1$ , в качестве нейронов выходного слоя – с функцией активации  $F_2$ . На вход сети подаются входные образы – векторы

$\overline{x}^k = (x_1^k, \dots, x_{m_0}^k), (k = \overline{1, L})$ . Входами распределительного слоя являются значения  $y_{i_0}^{(0),k} = x_{i_0}^k$ . При этом формируется вектор  $Y^{(0),k} = (y_1^{(0),k} \quad y_2^{(0),k} \quad \dots \quad y_{m_0}^{(0),k} \quad -1)^T$ .

Выходное значение  $i_1$ -го нейрона скрытого слоя сети для  $k$ -го образа определяется соотношением:

$$y_{i_1}^{(1),k} = F_1(S_{i_1}^{(1),k}),$$

*Маньяков Николай Владимирович. Ст. преподаватель каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*

*Махнист Леонид Петрович. К.т.н., доцент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*

*Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*