УДК 517.519.63

Мадорский В.М., Стрилец Н.Н.

О РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

Рассмотрим непериодическую краевую задачу Дуффинга на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$:

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+bx(t)+cx^p(t)=F(t), \quad a,b,c\in R, \quad p\in N \tag{1}$$

$$\alpha_0 x(\tau_0)+\beta_0\dot{x}(\tau_0)=\gamma_0, \quad \alpha_1 x(\tau_1)+\beta_1\dot{x}(\tau_1)=\gamma_1 \tag{2}$$

Как правило, данную задачу приходится решать численно, производя дискретизацию и сведение ее к системе нелинейных уравнений. Процесс дискретизации задачи заключается во введении на отрезке $[-\tau_0, \tau_1]$ сетки $\Delta_N : \tau_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \tau_1$. Тогда решение краевой задачи (1) – (2) сводится к вычислению значений искомой функции в узлах сетки, что приводит с учетом краевых условий (2) к необходимости решать систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0 x(\tau_0)+\beta_0\dot{x}(\tau_0)=\gamma_0, \\ a\ddot{x}(t_i)+b\dot{x}(t_i)+cx(t_i)+dx^3(t_i)=F(t_i), \quad i=\overline{0,N-1}, \\ \alpha_1 x(\tau_1)+\beta_1\dot{x}(\tau_1)=\gamma_1. \end{cases} \tag{3}$$

Для приведения системы (3) к системе нелинейных алгебраических уравнений заменяем производные функции $x(t)$ их разностными аналогами.

При таком способе решения задачи (1) – (2) возникает ряд проблем:

1. Выбор метода аппроксимации производных.
2. Выбор итерационного процесса для решения системы нелинейных уравнений.
3. Выбор метода восстановления в аналитическом виде полученного решения разностной задачи.

Первая проблема заключается в выборе метода, минимизирующего погрешность численного дифференцирования. С этой целью для приближенного вычисления производных будем использовать больше двух узлов, т.к. порядок точности почти прямо пропорционален их количеству. Формулы в этом случае можно получить, используя метод неопределенных коэффициентов [1], согласно которому производная k- го порядка в точке t_i представляется в виде

$$x^{(k)}(t_i) \approx \sum_{j=1}^{m} c_j x(t_j), \quad i=\overline{0,m}, \tag{4}$$

где $(m+1)$ – количество узлов аппроксимации.

Для определения коэффициентов c_j получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} c_0+c_1+\ldots+c_m=0, \\ c_0t_0+c_1t_1+\ldots+c_mt_m=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0t_0^k+c_1t_1^k+\ldots+c_mt_m^k=k!, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0t_0^l+c_1t_1^l+\ldots+c_mt_m^l=\dfrac{l!}{(l-k)!}t_i^{l-k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0t_0^m+c_1t_1^m+\ldots+c_mt_m^m=\dfrac{m!}{(m-k)!}t_i^{m-k}, \end{cases}$$

которая решается одним из прямых методов, например методом Гаусса.

Практика применения метода неопределенных коэффициентов для аппроксимации производных показывает, что привлечение 11-13 точек позволяет получить точность аппроксимации для первой производной порядка 10^{-10} – 10^{-9}, для второй – порядка 10^{-9} – 10^{-8} в случае сетки с равноотстоящими узлами и сетки, построенной по узлам многочлена Чебышева I рода.

Вторая проблема заключается в выборе эффективного итерационного процесса для решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

При подстановке (4) в (3) получаем систему для определения $x(t_i), \ i=\overline{0,N}$:

$$\begin{cases} \alpha_0 x(t_0)+\beta_0\sum\limits_{s=0}^{m} c_{0,s}^{(1)} x(t_s)=\gamma_0, \\ a\sum\limits_{s=0}^{m} c_{j,s}^{(2)} x(t_{l+s})+b\sum\limits_{s=0}^{m} c_{j,s}^{(1)} x(t_{l+s})+bx(t_j)+ \\ +cx^3(t_j)=F(t_j), \quad j=\overline{0,N-1}, \\ \alpha_1 x(t_n)+\beta_1\sum\limits_{s=0}^{m} c_{n,s}^{(1)} x(t_{n-m+s})=\gamma_1, \end{cases} \tag{5}$$

где $l=max\left(min\left(j+\left[\frac{m+l}{2}\right],N\right)-m,0\right)$.

Исходная дифференциальная задача (1) – (2), как правило, является некорректной, поэтому трудно рассчитывать на корректность разностной задачи. Следовательно, для решения системы (5) целесообразно применять следующий регуляризованный итерационный процесс [2]:

Шаг 1. Решаем линейную систему для определения поправки Δx_n :

$$\left(\sigma\beta_n\|f(x_n)\|^2 E+f'^*(x_n)f'(x_n)\right)\Delta x_n = -f'^*(x_n)f(x_n), \quad 0<\sigma<<1.$$

Шаг 2. Получаем следующее приближение:
$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n$, x_0 – заданный вектор.

Мадорский Виладий Меерович. *Зав. каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Стрилец Николай Николаевич. *Ассистент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.

Шаг 3. Если $\|f(x_n)\| \le \varepsilon$ и (или) $\|\Delta x_n\| \le \varepsilon$ – конец просчётов, иначе – пересчет β_{n+1} по формуле

$$\beta_{n+1} = min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right),$$

$$\beta_0 \in (10^{-4}; 10^{-1})$$

и переход к шагу 1.

Здесь $f'^*(x)$ – оператор, сопряжённый оператору $f'(x)$ – производной Фреше оператора $f(x)$.

Предлагаемый итерационный процесс, как показано в [3], является нелокальным и сверхлинейным. При этом сверхлинейность проявляется сравнительно быстро.

Третья проблема заключается в выборе метода, позволяющего как можно точнее восстановить в аналитическом виде решение разностной задачи.

Если речь идет о сетке из равноотстоящих узлов, то в качестве такого метода может выступать аппроксимация сплайном 5-ой степени [4]:

$$S_5(t) = x_i + \left[\frac{\Delta x_i}{h} - (2B_i + B_i)\frac{h}{6} + (8T_i + 7T_{i+1})\frac{h^3}{360}\right](t - t_i)$$
$$+ \frac{B_i}{2}(t - t_i)^2 + \frac{1}{6}\left[\frac{\Delta B_i}{h} - (2T_i + T_{i+1})\frac{h}{6}\right](t - t_i)^3 + \frac{T_i}{24}(t - t_i)^4 +$$
$$+ \frac{\Delta T_i}{120h}(t - t_i)^3,$$

с непериодическими краевыми условиями

$$S_5^{(2k+1)}(\tau_0) = x_{\tau_0}^{(2k+1)},$$
$$S_5^{(2k+1)}(\tau_1) = x_{\tau_1}^{(2k+1)}, \quad k = 0,\ 1$$

Неизвестные параметры $B_i, T_i,\quad i = \overline{0, N}$ определяются из линейной системы:

$$\begin{cases} (120B_0 + 60B_1) + (-8T_0 - 7T_1)h^2 = 360\left(\dfrac{\Delta x_0}{h^2} - \dfrac{x'_{\tau_0}}{h}\right), \\ (60B_{i-1} + 240B_i + 60B_{i+1}) + (-7T_{i+1} - 16T_i - 7T_{i+1})h^2 = \\ = 360\dfrac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ 60B_{n-1} + 120B_n) + (-7T_{n-1} - 8T_n)h^2 = 360\left(\dfrac{x'_{\tau_1}}{h} - \dfrac{\Delta x_{n-1}}{h^2}\right), \\ (6B_0 - 6B_1) + (2T_0 + T_1)h^2 = -6x'''_{\tau_0}h, \\ (-6B_{i-1} + 12B_i - 6B_{i+1}) + (T_{i-1} + 4T_i + T_{i+1})h^2 = 0, \\ i = \overline{1, n-1}, \\ (-6B_{n-1} + 6B_n) + (T_{n-1} + 2T_n)h^2 = 6x'''_{\tau_1}h, \end{cases} \tag{6}$$

где $h = t_i - t_{i-1} = const, \quad i = \overline{1, N}$.

Систему (6) можно решить одним из прямых методов, например методом Гаусса.

В ряде задач теории колебаний, например при выделении областей устойчивости, необходима высокая точность (порядок невязки на приближенном решении меньше 10^{-11} – 10^{10}). В этом случае восстановление с помощью сплайна 5-ой степени не всегда дает нужный результат. Поэтому здесь может быть применен другой подход, связанный с аппроксимацией приближенного решения отрезком ряда Фурье по ортогональным полиномам, в частности по полиномам Чебышева I рода.

Отрезок ряда Фурье (по полиномам Чебышева) на сетке Δ_N из узлов многочлена Чебышева имеет вид:

$$P_m(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} c_k T_k\left(\frac{2t - \tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}\right),$$
$$c_k = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} x(t_j) T_k\left(\frac{2t - \tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}\right), \quad k = \overline{0, m}\ , \tag{7}$$
$$t_j = cos\frac{2j - 1}{2N}\pi, \quad j = \overline{1, N}.$$

Если же значения функции $x(t)$ даны в равноотстоящих узлах, то для повышения точности аппроксимации сначала вычисляем значения $x(t)$ в узлах многочлена Чебышева при помощи интерполяционного полинома Ньютона, а затем строим отрезок ряда Фурье по формулам (7).

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ОБСУЖДЕНИЕ ЕГО РЕЗУЛЬТАТОВ

Для сравнения перечисленных выше подходов к аппроксимации решения был проведен численный эксперимент. Критерием эффективности процедуры аппроксимации может служить норма $\|x(t) - P(t)\|_{L_2[\tau_0, \tau_1]}$, где $P(t)$ – аппроксимирующий полином.

В ходе эксперимента предполагалось выполнение следующих условий:

1. Число членов отрезка ряда Фурье по полиномам Чебышева на единицу меньше числа точек разбиения,
2. Для сетки из равноотстоящих узлов число точек, необходимых для построения отрезка ряда Фурье по полиномам Чебышева, не превышает 65.

Результаты численного эксперимента были сведены в таблицу 1, которая содержит информацию об аппроксимации непериодической функции $y = 5 \cdot 2^x + 7\,sin(3x)$. Значения функций в точках взяты с погрешностью порядка 10^{-13}.

Таблица 1.

Количество точек аппроксимации	Сплайн 5-ой степени	Отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева	
		Сетка из равноотстоящих узлов	Сетка из узлов полинома Чебышева
33	3,158e-5	3,616e-7	1,5e-13
65	3,2e-7	6,43e-7	1,6e-13
129	4,764e-9	0,058	1,6e-13
257	2,148e-10	0,023	1,5e-13

Анализируя полученные результаты, можно сделать некоторые выводы.

Наиболее эффективным методом восстановления функции является аппроксимация отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева по сетке из узлов многочлена Чебышева. В то же время аппроксимация указанным способом по сетке из равноотстоящих узлов не является столь эффективной, а с ростом числа точек ее точность падает. Вычислительная практика показывает, что оптимальным числом узлов, по которым строится отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева, является 65.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Березин И. С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х т.: Т. 1. – М.: 1966. – 464 с.
2. Мадорский В. М. Локализация решений нелинейных уравнений // Труды Института математики НАН Беларуси – Минск, 2002. – Том 11. С. 96 – 103
3. Стрилец Н.Н. Сравнительный анализ ряда квазиньютоновских методов для решения нелинейных систем // IV межвуз. науч.-метод. конф. молодых ученых: Сб. матер. – Брест, 2002. – С. 43 – 44.
4. Мадорский В.М, Стрилец Н.Н. Об использовании сплайн-аппроксимации при решении уравнений Дуффинга и Ван-дер-Поля // Веснік Брэсцкага універсітэта. – 2001. – № 4. – С. 3 – 9.

УДК 517.948.34

Пархимович И.В.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим сначала некоторые общеизвестные понятия, необходимые в дальнейшем.

Пусть H – гильбертово пространство и в нем действует линейный оператор $A : D \to H$ с плотной в H областью определения, т.е. $\overline{D} = H$.

Уравнение $Ax=y$ называется корректно разрешимым [1], если при $\forall x \in D(A)$ имеет место неравенство $\|x\| \le k\|Ax\|$, где $k > 0$ и не зависит от x.

Из корректной разрешимости вытекает однозначная разрешимость, при которой однородное уравнение $Ax=0$ имеет только нулевое решение, иными словами нуль – пространство оператора A представляет нуль: $N(A)=0$.

Известно [1], что если уравнение $Ax=y$ корректно разрешимо, то оператор A имеет на области значений $R(A)$ ограниченный обратный

Рассмотрим краевую задачу для линейного интегро-дифференциального уравнения

$$T_x : \begin{cases} T_\lambda \equiv \dot{x}(t)+\lambda(P(t)\ x(t) + \\ + \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = f(t) \\ x\ (a) - \int_a^b M(t)\ \dot{x}(t)\,dt = 0, \end{cases} \tag{1}$$

в которой предполагается:

1) действительная неизвестная n-векторная функция $x(t)$ действительного

переменного t принадлежит линеалу $D_2^n[a,b]$ абсолютно непрерывных n-вектор-функций, а $\dot{x}(t) \in L_2^n\ [a,\ b]$; n - вектор – функция $f \in L_2^n\ [a,\ b]$;

2) $P(t)$, $M(t)$, $K(t,s)$ – n x n матрицы, элементы которых суммируемы с квадратом в соответствующих областях.

Мы укажем достаточный признак корректной разрешимости задачи (1), используя легко доказываемое обобщение известного [1] результата.

Утверждение 1. Уравнение $Tx = f$ корректно разрешимо тогда и только тогда, когда уравнение $T_s^* u = f$ везде разрешимо, где $T_s^* - S$ - сопряженный оператор [2] к оператору T.

Для задачи (1) S - оператором служит оператор

$$S_x : \begin{cases} Dx \equiv \dot{x} \\ x(a) - \int_a^в M(t)\ \dot{x}(t)\ dt = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Имеет место

Утверждение 2. Дефектное подпространство оператора $S(2)$ равно нулю, т.е. $Z_s^* = 0$.

Для оператора T_λ (1) составим аналог формулы Лагранжа, получаемой интегрированием по частям:

$$\int_a^b T_\lambda x(t)z(t)dt \equiv \int_a^b \dot{x}'(t)z(t)dt +$$

$$+\lambda\int_a^b (P(t)x(t))'z(t)dt +$$

$$+\lambda\int_a^b\int_a^b (K(t,s)\dot{x}(s))'z(t)dsdt = \int_a^b \dot{x}'(t)z(t)dt +$$

$$+\lambda\int_a^b x'(t)P'(t)z(t)dt + \lambda\int_a^b \dot{x}'(s)ds\int_a^b K'(t,s)z(t)dt =$$

$$= \int_a^b \dot{x}'(t)z(t)dt + \lambda x'(t)\int_t^b P'(s)z(s)ds\Big|_{t=a}^{b} +$$

$$+\lambda\int_a^b \dot{x}'(t)\int_t^b P'(s)z(s)dsdt +$$

$$+\lambda\int_a^b \dot{x}'(s)ds\int_a^b K'(t,s)z(t)dt = \lambda x'(a)\int_a^b P'(s)z(s)ds +$$

$$+\int_a^b \dot{x}(t)(z(t)+\lambda\int_t^b P'(s)z(s)ds)+\lambda\int_a^b K'(s,t)z(s)ds)dt.$$

***Пархимович Игорь Владимирович**. К. физ.-мат.н., профессор каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.