(используем предположение индукции для $n = m - 1$ и неравенство (С))

$$\le (k/(1-k))^2 \le k < 1.$$

Значит, норма правой части $\|E - [F'(u^m)]^{-1}(F'(u^m) - F'(u^{m+1}))\| \ge 1 - k$, а норма обратного к Q оператора $\|Q^{-1}\| \le 1/(1-k)$. Таким образом, из тождества $\|[F'(u^{m+1})]^{-1}\| = \|[F'(u^m)(E - [F'(u^m)]^{-1}(F'(u^m) - F'(u^{m+1})))]^{-1}\|$ следует, что

(22^*) $\quad \|[F'(u^{m+1})]^{-1}\| \le \|[F'(u^m)]^{-1}\|/(1-k)$ и т. д.

Неравенство (20) при n = m следует из условий $(21^* - 23^*)$

$$\|[F'(u^{m+1})]^{-1}\|K\|[F'(u^{m+1})]^{-1}F(u^{m+1})\| \le$$
$$\le \|[F'(u^m)]^{-1}\|/(1-k)Kk/(1-k)\|[F'(u^m)]^{-1}F(u^m)\| \le$$
$$\le (k/(1-k))^2 \le k.$$

Так как последовательность приращений $\|u^{m+1} - u^m\|$, согласно соотношению (23), со скоростью геометрической прогрессии бесконечно убывает к 0, то в силу полноты гильбертова пространства U_2 существует функция u^*, к которой сходится последовательность $\{u^n\}$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u^n = u^* \in U_2 \quad .$$

Из предельного перехода следуют условия (17) и (16)

$$\|u^* - u^0\| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n} \|[F'(u^m)]^{-1}F(u^m)\| \le$$

$\le (1-k)/(1-2k)\|[F'(u^0)]^{-1}F(u^0)\|$ и

$$(1-k)/(1-2k)\,)\|[F'(u^0)]^{-1}F(u^0)\| \le \delta = \frac{1}{2CK}$$

при $k = CK\|[F'(u^0)]^{-1}F(u^0)\| < 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Что и доказывает сходимость метода Ньютона (15) к точному решению уравнения (13) в области единственности $B(u^0,\delta)$.

Замечание 1. Если базис $e(x)$ ортонормированный, то для существования изолированного решения достаточно, чтобы

$$k \le 1 - \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

В этом случае радиус области единственности решения

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}CK}.$$

Замечание 2. Данная теорема является обобщением теорем [1] и [4] для функциональных уравнений.

Изложенная теория применялась при решении нелинейной краевой задачи Дирихле для дифференциального уравнения

$$F(u) = e^{-\frac{d^2u}{dx^2}} + \frac{d^2u}{dx^2} + u - x^2 - 2 = 0 \qquad (24)$$

с граничными условиями $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

Норму линейного оператора $[F'({}^N u)]^{-1}$ определим как наименьшее из чисел C, удовлетворяющих неравенству $\|[F'({}^N u)]^{-1}F({}^N u)\| \le C\|F({}^N u)\|$, и обозначим

$$\|[F'({}^N u)]^{-1}\| = C.$$

Итерационным процессом (15), начиная с приближенного решения операторного уравнения (24) $2u(x) = x2$ $(\|F(2u(x))\| \approx 0{,}15)$, было получено следующее нулевое приближение, удовлетворяющее условиям доказанной выше теоремы

$${}^{10}u^0(x) = 0{,}088232732\,x + 0{,}920702834\,x^2 -$$
$$-\,0{,}017477239\,x^3 + 0{,}007767224\,x^4 +$$
$$+\,0{,}001129046\,x^5 - 0{,}000316471\,x^6 -$$
$$-\,0{,}000049133\,x^7 + 0{,}000010116\,x^8 +$$
$$+\,0{,}000000893\,x^9 - 0{,}000000002\,x^{10}.$$

Норма невязки $\|F({}^{10}u^0(x))\| = 6{,}7\cdot 10^{-7}$, область существования точного изолированного решения $u^*(x)$ $B({}^{10}u^0(x),\delta) = \{u(x) \mid \|u(x) - {}^{10}u^0(x)\| \le \delta = 7{,}0\cdot 10^{-8}\}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мадорский В.М., Морозов В.В. О локализации решений нелинейных периодических систем. – Изв. высших учебных заведений. Сер. матем., 1985, № 12, с.19-22.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М., 1989, с.209-212,287.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1989, с.440-481,551-587.
4. Ревинский А.Ф., Морозов В.В. Об одном методе решения уравнения диффузии. – Тезисы международной математической конференции. Брест, 2002, с.153-154.

УДК 517.911

Семенчук Н.П., Дацык В.Т.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В [1] найдены условия существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения.

$$y^{(\alpha)} = f(x, y), \qquad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$, а функция f – удовлетворяет определенным условиям. Также в указанной работе найдена оценка приближения решения уравнения (1) решением специально построенного с помощью линейных методов суммирования интегралов Фурье операторного уравнения типа Абеля-Гаммерштейна.

Мы же в своей работе обобщаем результаты указанных исследований, полученных в [1].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с дробной старшей производной

$$y^{(\alpha)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

где $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть функция f – абсолютно интегрируема на параллелепипеде

$$\Pi_{lhj} := \\ =\left\{ \left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \begin{array}{ll} 0 \le x \le l, & l \in \mathbb{R}_+, \\ y_0^{(j)} - h_j \le y^{(j)} \le y_0^{(j)} + h_j, & y_0^{(j)} \in \mathbb{R}, \\ h_j \in \mathbb{R}_+, & j = \overline{0, n-1} \end{array} \right\}$$

Решение уравнения (2) будем искать в классе дифференцируемых до порядка $(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, функций $y = y(x)$ на отрезке $[0, l]$ с абсолютно непрерывной на этом отрезке производной $y^{(n-1)}(x)$. Причем, для любых указанных функций $y = y(x)$ функция $\mu(x) := f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ должна быть также абсолютно непрерывна на отрезке $[0, l]$. Норма для функций $y = y(x)$ вводится по формуле

$$\|y(x)\| := \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^l \left|y^{(j)}(x)\right| dx. \qquad (3)$$

Введенный класс функций $y = y(x)$ обозначим через $L^{(j)}(0, l)$.

Теорема 1. *Если для уравнения (2) функция f – абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{lhj} и для любых точек $M_1(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$ и $M_2(x, y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(n-1)})$ из Π_{lhj} будет*

$$|f(M_1) - f(M_2)| \le A \sum_{j=0}^{n-1} |y_1^{(j)} - y_2^{(j)}|, \qquad (4)$$

где A – некоторая положительная константа, то уравнение (1) при выполнении неравенства

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1)l^{\alpha-j})\right) < 1$$

(5)

имеет в классе $L^{(j)}(0, l)$ функций $y = y(x)$ единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $D^{-(1-\alpha)}y(0) = y_0^{(n-1)} = D^{-(2-\alpha)}y(0) = y_0^{(n-2)} = \ldots = D^{-(n-\alpha)}y(0) = y_0 = 0$, (6)

(для обозначений в (6) пояснения будут даны ниже)

Доказательство теоремы 1.

Вначале докажем, что уравнение (2) с начальными условиями (6) равносильно нелинейному интегральному уравнению

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right)dt \qquad (7)$$

Пусть $y = y(x)$ – решение (2) с начальными условиями (6). Действуя оператором $D^{-\alpha}\left(D^{-\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right.$, $x \in (0, l)$, $f(x) \in L(0, l)$, - дробный интеграл порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ с началом в точке $x = 0$) на левую и правую части (1), получим (7), учитывая: 1) [2], (1.11), С.7. Если $y = y(x)$ имеет суммируемую на $(0, l)$ производную $D^\alpha y(x)$ порядка α, $p-1 < \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}$, то почти всюду на $(0, l)$

$$D^{-\alpha}D^\alpha y(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{p}\left(D^{\alpha-k}y(x)\right)_{x=0} \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)} \qquad (1.11)$$

2) [3], стр. 229. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то почти в каждой точке $[a, b]$ эта функция имеет конечную производную $f'(x)$, которая оказывается суммируемой функцией;

3) [2], стр. 10. Если существует производная $D^\alpha y(x) \in L(0, l)$, то для любого β, $0 < \beta < \alpha$, существует также производная $D^\beta y(x) \in L(0, l)$

Обратно, если $y(x)$ – решение (7) в указанном классе, то правая часть (7) есть функция из класса $L(0, l)$. Покажем это.

$$\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right)dt\right\|_{L(0,l)} \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^l \left|\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right)dt\right| dx \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^l \left(\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left|f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right)\right|dt\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^l \left|f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{n-1}(t)\right)\right|dt\int_t^l (x-t)^{\alpha-1}dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^l \left|f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{n-1}(t)\right)\right| \left.\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\right|_t^l dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^l \left|f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right)\right|(l-t)^\alpha dt \le$$

$$\le \frac{l^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f\left(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right)\right\|_{L(0,l)} < \infty \qquad (8)$$

Действуем на правую и левую части (7) оператором D^α (D^α - оператор дифференцирования: пусть $\alpha > 0$ и целое число $p \ge 1$ таково, что $p - 1 < \alpha \le p$; если для $f(x) \in L(0, l)$ почти всюду на $(0, l)$ существует (не обязательно суммируемая на $(0, l)$) функция

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{-(p-\alpha)}f(x)}{dx^{-(p-\alpha)}},$$

то эта функция называется производной порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ с началом в точке $x = 0$).

При этом учитываем:

1) оценку (8);

2) [2], стр. 7. Если $f(x) \in L(0, l)$ и $\alpha > 0$, то $D^\alpha D^{-\alpha} f(x) = f(x)$ почти всюду на $(0, l)$

3) $y(x) = D^{-\alpha}D^\alpha y(x) - \sum_{k=1}^{p}(D^{\alpha-k}y(x))_{x=0} \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)} = D^{-\alpha}y^{(\alpha)}(x)$.

Тогда получим

$$D^\alpha y(x) = D^\alpha D^{-\alpha} f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

или

$$y^{(\alpha)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

Покажем, что и начальные условия (6) также выполняются. Воспользуемся ([2], стр. 5, ф. (1.2.)) тем, что если $f(x) \in L(0, l)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, то почти всюду на $(0, l)$ будет $D^{-\alpha 2} D^{-\alpha 1} f(x) = D^{-(\alpha 1 + \alpha 2)} f(x)$.

Будет при $k = 1\ldots n$.

$$D^{-(k-\alpha)} y(0) = D^{-(k-\alpha)} y(x)\,|_{x=0} =$$

$$= D^{-(k-\alpha)} D^{-\alpha} f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)|_{x=0} =$$

$$= D^{-k} f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)|_{x=0} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x (x-t)^{k-1} f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) dt \Big|_{x=0}$$

Равносильность дифференциального уравнения (1) и интегрального (7) доказана.

Дальше для доказательства существования и единственности решения интегрального уравнения (7) применим принцип сжимающих отображений. Представим (7) в операторном виде

$$\psi = B\varphi \qquad (9)$$

Покажем, что оператор B отображает элементы класса $L^{(j)}(0, l)$ в этот же класс.

Из (8) видно, что правая часть (7) есть функция из класса $L(0, l)$.

Воспользуемся теоремой о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра с переменными пределами интегрирования.

Возьмем любое $x \in [0, l]$. Тогда существует $[a, b] \subset (0, l)$, что $x \in [a, b]$. На прямоугольнике $\Pi := \left\{(x, t) \in \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} a \le x \le b, \\ 0 \le t \le l \end{array}\right\}$ функция $\mu(x, t) = (x - t)^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ и ее производная по x, то есть $\mu'(x, t) = (x - 1)(x - t)^{\alpha-2} f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$, определены и непрерывны, а также существуют производные функций-пределов интегрирования: $(0)' = 0, x' = 1$. Значит, для (7) существует производная

$$y'(x) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right) dt \qquad (10)$$

Аналогично доказывается, что для (7) существуют все производные до порядка $(n-1)$ включительно $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

$$y^{(k)}(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^x (x-t)^{\alpha-(k+1)} f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right) dt \qquad (11)$$

Покажем также, что функция $y^{(n-1)}(x)$ есть абсолютно непрерывная функция в своей области определения. По условию теоремы функция ньзя говорить $f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ абсолютно непрерывна на отрезке [0, l]. Тогда

$$f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) =$$

$$= f(0, y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)) +$$

$$+ \int_0^t f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\, ds.$$

Тогда

$$y^{(n-1)}(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times f\left(0, y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\right) \int_0^x (x-t)^{\alpha-n} dt +$$

$$+ \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-n} \times$$

$$\times \int_0^t f'\left(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s)\right) ds =$$

$$= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-2))\, f\left(0, y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\right)}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times x^{\alpha-(n-1)} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(m-1))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-n} dt \times$$

$$\times \int_0^t f'\left(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s)\right) ds \qquad (12)$$

Видно, что $x^{\alpha-(n-1)} = (\alpha - (n - 1)) \cdot \int_0^x t^{\alpha-n}\, dt$, то есть функция $x^{\alpha-(n-1)}$ представима неопределенным интегралом Лебега от суммируемой функции, а поэтому (см. [4], стр. 344) $x^{\alpha-(n-1)}$, а значит и первое слагаемое правой части (12) есть абсолютно непрерывная функция в своей области определения.

Дальше рассмотрим интегральную часть второго слагаемого правой части (12). Можно показать, изменяя порядок интегрирования и вычисляя внутренние интегралы, что

$$\int_0^x (x - t)^{\alpha-n} \int_0^t f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\, ds =$$

$$= \int_0^x \left(\int_0^t (t - s)^{\alpha-n} f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\, ds\right) dt \qquad (13)$$

Левая часть равна

$$\int_0^x (x - t)^{\alpha-n}\, dt \int_0^t f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\, ds =$$

$$= \int_0^x f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\, ds \int_s^x (x - t)^{\alpha-1}\, dt =$$

$$= \int_0^x f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s)) \left.\frac{-(x - t)^{\alpha}}{\alpha}\right|_s^x ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^x f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\,(x-s)^{\alpha}\,ds;$$

Правая часть равна

$$\int_0^x \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-n} f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\,ds\right) dt =$$

$$= \int_0^x f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\,ds \int_s^x (t-s)^{\alpha-1}\,dt =$$

$$= \int_0^x f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\,\frac{1}{\alpha}(t-s)^{\alpha}\Big|_s^x\,ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^x f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\,(x-s)^{\alpha}\,ds.$$

Вывод. Равенство (13) доказано.

Известно (см. [5], стр.40-41), что если $f(t)$ – абсолютно непрерывная функция в своей области определения и $0<\alpha<1$, то $\int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds$ – суммируемая функция.

У нас $n-1<\alpha<n$, $-n<-\alpha<1-n$, $0<n-\alpha<1$, поэтому

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-n} f'(s, y(s), y'(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\,ds = \psi(t)$$ –

есть суммируемая функция в своей области определения, а значит неопределенный интеграл $\int_0^x \psi(t)\,dt$ – будет абсолютно непрерывной функцией.

А поэтому второе слагаемое правой части равенства (12) есть (с учетом (13)) абсолютно непрерывная функция в своей области определения.

Тогда функция $y^{(n-1)}(x)$ (левая часть равенства (11) при $k=n-1$) будет абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[0, l]$.

Вывод. Доказали, что оператор B (см. (9)) отображает элементы класса $L^{(j)}(0, l)$ в этот же класс.

Дальше покажем, что оператор B есть сжимающее отображение. Берем любые элементы $\varphi_1, \varphi_2 \in L^{(j)}(0, l)$. Будем иметь:

$$\rho(B\varphi_1, B\varphi_2) = \left\|B\varphi_1 - B\varphi_2\right\|_{L^{(j)}(0,l)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^l \left|\int_0^x (x-t)^{\alpha-t}\left(f(t, \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(t)) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - f\left(t, \varphi_2(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_2^{(n-1)}(t)\right)\right)dt\right|dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^l \left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j)}{\Gamma(\alpha)}\right. \times$$

$$\times \int_0^x (x-t)^{\alpha-1-j}\left(f\left(t, \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(t)\right)\right) -$$

$$\left. - f\left(t, \varphi_2(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_2^{(n-1)}(t)\right)\right)dt\,|\,dx \le$$

$$\le \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^l dx \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}(t)|\,dt +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^l (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j)\,dx\int_0^l (x-t)^{\alpha-1-j} \times$$

$$\left.\times\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}(t)|\,dt\right) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^l \sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}|\,dt \times\right.$$

$$\times\int_t^l (x-t)^{\alpha-1}dx + \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^l (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j)\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t) -$$

$$\left. -\varphi_2^{(i)}(t)|\,dt\int_t^l (x-t)^{\alpha-1-j}dx\right) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^l \sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}(t)|\right.$$

$$\frac{(l-t)^{\alpha}}{\alpha}dt + \sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j)\int_0^l \sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}|$$

$$\left.\frac{(l-t)^{\alpha-j}}{\alpha-j}dt\right) \le \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^{\alpha}}{\alpha}\int_0^l \sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}(t)| +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))\,l^{\alpha-j} \times$$

$$\times\int_0^l \sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}(t)|\,dt =$$

$$= \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^{\alpha}}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))\,l^{\alpha-j}\right)\rho(\varphi_1, \varphi_2)$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, то справедлива оценка*

$$\|y(x)-y_{\lambda}(x)\|_{L^{(j)}(0,\ l)} \le \frac{B\,\|y(x) - U_{\lambda}(y; x)\|_{L^{(j)}(0,\ l)}}{1 - A\,l\,\varepsilon\left(U_{\lambda}, æ_{\cdots\,\alpha}^{\omega_{L^{(j)}}}\right)}$$

(14)

где U_{λ} - линейный регулярный метод суммирования интегралов;

$$\varepsilon\left(U_{\lambda}, æ_{\cdots\,\alpha}^{\omega_{L^{(j)}}}\right) =$$

$$= \sup_{\varphi \in æ_{\cdots\,\alpha}^{\omega_{L^{(j)}}}} \|\varphi(x) - U_{\lambda}(\varphi(\xi); x)\|_{L^{(j)}(0,\ l)}, \qquad (15)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(U_{\lambda}, æ_{\cdots\,\alpha}^{\omega_{L^{(j)}}}\right) = 0;$$

$\omega_{L^{(j)}}$ $\mathcal{K}_\alpha$ - *класс всех измеримых функций* $\varphi \in L^{(j)}(0, l)$ *и таких, что для любых* $x', x'' \in [0, l]$ *будет*

$$\|\varphi(x'') - \varphi(x')\|_{L^{(j)}(0, l)} \le \omega_L(\mathcal{K}_\alpha; |x''-x'|),$$

$$\omega_L(\mathcal{K}_\alpha; |x''-x'|) = \frac{1}{l} \sup_{\substack{0 \le \sigma \le |x''-x'| \\ 0 \le x \le l-\sigma \\ 0 < |x''-x'| < l}} \times$$

$$\times \int_0^l |\mathcal{K}_\alpha(x+\alpha t) - (((x, t)|\, dt \qquad (16)$$

- *усредненный модуль непрерывности функции,*

$$\mathcal{K}_\alpha(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (x-t)^{\alpha-1}, & t \le x, \\ 0, & t > x, \end{cases} \quad x \in (0, l) \qquad (17)$$

$y_\lambda(x)$ – *решение операторного уравнения.* (см. ниже)

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим так называемое операторное уравнение типа Абеля – Гаммерштейна

$$y_\lambda(x) = \int_0^l U_\lambda(\mathcal{K}_\alpha(\xi, t); x) f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t))\, dt$$

(18)

где

$$U_\lambda(\mathcal{K}_\alpha(\xi, t); x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\lambda) \left(\frac{u}{\lambda}\right)^m du \int_0^l \mathcal{K}_\alpha(\xi, t) \cos u(x-\xi)\, d\xi$$

(19)

$$\mathcal{K}_\alpha(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e(x, t)(x-t)^{\alpha-1}$$

$$e(x, t) = \begin{cases} 1, & t \le x, \\ 0, & t > x, \end{cases} \quad 0 < x < l. \qquad (20)$$

Ряды (суммы) $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\lambda) \left(\frac{u}{\lambda}\right)^m$ определяют класс линейных методов суммирования интегралов.

Сюда входят многие известные классические методы суммирования ($(C, 1)$ – средние, средние Зигмунда, метод Бернштейна-Рогозинского и др.). Например, если $a_0(\lambda) = 1$, $a_1(\lambda) = -1$ и все другие $a_m(\lambda) = 0$, то имеем так называемые $(C, 1)$ – средние, определяемые множителем суммирования – $\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)$.

Пусть уравнение (18) имеет в классе функций $L^{(j)}(0, l)$ единственное решение $y_\lambda(x)$. Оценим $\|y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)}$, где $y(x)$ – решение уравнения (7). Будем иметь

$$= y(x) - \int_0^l U_\lambda(\mathcal{K}_\alpha(\xi, t); x) f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))\, dt +$$

$$+ U_\lambda\left(\int_0^\lambda \mathcal{K}_\alpha(\xi, t) f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) - \right.$$

$$\left. - f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\, dt; x\right) =$$

$$= \left[\text{обозначим } \eta_\lambda(u) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\lambda)\left(\frac{u}{\lambda}\right)^m. \text{ Тогда} \right.$$

$$\cdot U_\lambda\left(\int_0^\lambda \mathcal{K}_\alpha(\xi, t) f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) - \right.$$

$$\left. - f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\, dt; x\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \eta_\lambda(u)\, du \int_0^l$$

$$\left(\int_0^l \mathcal{K}_\alpha(\xi, t) f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) - \right.$$

$$\left. - f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\, dt \right/ \cos u(x-\xi)\, d\xi =$$

= [по следствию из теоремы Фубини: если существует один из интегралов

$$\int_a^b \left(\int_c^d |f(x, y)|\, dy\right) dx \quad \text{или} \quad \int_c^d \left(\int_a^b |f(x, y)|\, dx\right) dy$$ то

существует двойной интеграл от $f(x, y)$ по прямоугольнику $[a, b] \times [c, d]$ и оба повторных, и все они равны между собой (см. [4], стр. 318)

$$= \int_0^l \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \eta_\lambda(u)\, du \int_0^l K_\alpha(\xi, t) \cos u(x-\xi)\, d\xi\right) \times$$

$$\times f\left(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)\right) dt - \int_0^l \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \eta_\lambda(u)\, dy \times\right.$$

$$\left. \times \int_0^l K_\alpha(\xi, t) \cos u(x-\xi)\, d\xi\right) \times$$

$$\times f\left(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)\right) dt =$$

$$= \int_0^l U_\lambda\left(K_\alpha(\xi, t); x\right) f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) dt -$$

$$\left. - \int_0^l U_\lambda\left(K_\alpha(\xi, t); x\right) f\left(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)\right) dt \right] =$$

$$= y(x) - U_\lambda(y; x) + U_\lambda(\beta_\lambda(\xi); x) - \beta_\lambda(x) + \beta_\lambda(x) \qquad (21)$$

где

$$\beta_\lambda(x) = \int_0^l K_\lambda(x, t)\left(f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)\right) - \qquad (22)$$

$$- f\left(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)\right)\Big) dt$$

Докажем, что

$$U_\lambda(y,x)=\int_0^l U_\lambda(K_\alpha(\xi,t);x)\,f\left(t,y(t),y'(t),...,y^{(n-1)}(t)\right)dt \tag{23}$$

Преобразуем левую часть (23).
Левая часть равна

$$\int_0^l\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \eta_\lambda(u)\,du\int_0^l \ldots_\alpha(\xi,t)\ \cos\ u\,(x-\xi)\,d\xi\right)\times$$
$$\times f\,(t,y\,(t),y'(t),\ldots,y^{(n-1)}(t))\,dt=$$
$$=\int_0^l\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \eta_\lambda(u)\,du\int_0^\xi \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\xi-t)^{\alpha-1}\cos u\,(x-\xi)\,d\xi\right)\times$$
$$\times f\,(t,y\,(t),y'(t),\ldots,y^{(n-1)}(t))\,dt=$$

[пользуемся следствием из теоремы Фубини и уравнением (7)]

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \eta_\lambda(u)du\times$$
$$\times\int_0^l\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\xi(\xi-t)^{\alpha-1}f\,(t,y\,(t),y'(t),\ldots,y^{(n-1)}(t))\,dt\right)\times$$
$$\times\cos u\,(x-\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\eta_\lambda(u)du\int_0^l y(\xi)\cos u(x-\xi)d\xi=$$
$$=\mathcal{U}_\lambda\,(y;x)$$

Равенство (23) доказано.
Введем усредненный по t модуль непрерывности функции

$$\omega_L(\ldots_\alpha;s):=\frac{1}{l}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\0\le x\le l-\sigma}}\int_0^l|\ldots_\alpha(x+\sigma,t)-\ldots_\alpha(x,t)|\,dt \tag{24}$$

Докажем, что $\lim\limits_{s\to+0}\ \omega_L(\ldots_\alpha;s)=0.$

$$\omega_L(\ldots_\alpha;s)=\frac{1}{l}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\0\le x\le l-\sigma}}\int_0^l|\ldots_\alpha(x+\sigma,t)-\ldots_\alpha(x,t)|\,dt$$

$$=\left[\begin{array}{l}K_\alpha=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}e(x,t)(x-t)^{\alpha-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-t)^{\alpha-1}, & t\le x\\ 0 & t>x\end{cases}\\ K_\alpha(x+\sigma,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(x+\sigma,t)^{\alpha-1}, & t\le x+\sigma,\\ 0 & t>x+\sigma\end{cases}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{l\,\Gamma(\alpha)}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\0\le x\le l-\sigma}}\left(\int_x^{x+\sigma}(x+\sigma-t)^{\alpha-1}dt+\int_0^x(x+\sigma-t)^{\alpha-1}-\right.$$
$$\left.-(x-t)^{\alpha-1})\,dt\right)=$$

$$=\left[D:=\left\{(x,\sigma)\in\partial\ \left|\begin{array}{l}0\le x\le l-\sigma,\\0\le\sigma\le s,\\0<s<l\end{array}\right.\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{l\,\Gamma(\alpha)}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\0\le x\le l-\sigma}}\times$$
$$\times\left(-\frac{(x+\sigma-t)^\alpha}{\alpha}\Bigg|_x^{x+\sigma}-\frac{(x+\sigma-t)^\alpha}{\alpha}\Bigg|_0^x+\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\Bigg|_0^x\right)=$$
$$=\frac{1}{l\,\Gamma(\alpha+1)}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\0\le x\le l-\sigma}}((x+\sigma)^\alpha-x^\alpha) \tag{25}$$

Функцию $\gamma(x,\sigma)=(x+\sigma)^\alpha-x^\alpha$ исследуем на наибольшее значение на $\overline{D}$.

$\gamma_x'=\alpha(x+\sigma)^{\alpha-1}-\alpha x^{\alpha-1}=\alpha((x+\sigma)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}),\ \gamma_\sigma'=$ $=\alpha(x+\sigma)^{\alpha-1}$

Находим критические точки функции γ в D.

$$\begin{cases}\alpha((x+\sigma)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1})=0,\\ \alpha(x+\sigma)^{\alpha-1}=0\end{cases}$$

Из последней системы следует, что $x+\sigma=0$, чего не может быть в D, то есть в D функция γ критических точек не имеет. Дальше продолжаем исследование на ∂D – границе D.

ОА: $x=0,\ 0\ \mathbb{C}\ \sigma\mathbb{C}\ s,\ \gamma(0,\sigma)=\mu(\sigma)=\sigma^\alpha$ - возрастает на отрезке $[0,s]$, поэтому функция γ достигает наибольшее значение в точке $(0,s)$ - $\gamma(0,s)=s^\alpha$.

АВ: $\sigma=s,\ 0\ \mathbb{C}\ x\ \mathbb{C}\ l-s,\ \gamma(x,s)=\mu(x)=(x+s)^\alpha-x^\alpha$, $\mu'=\alpha\ ((x+s)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1})>0$. Функция $\mu(x)$ возрастает на отрезке $[0,\ l-s]$, поэтому она достигает наибольшего значения в точке $x=l-s$ - $\gamma(l-s,s)=l^\alpha-(l-s)^\alpha$.

ВС: $x=l-\sigma,\ 0\ \mathbb{C}\ \sigma\,\mathbb{C}\ s,\ \gamma(l-\sigma,\sigma)=\mu(\sigma)=l^\alpha-$ $-(l-\sigma)^\alpha,\ \mu'=\alpha(l-\sigma)^{\alpha-1}>0$. Функция $\mu(\sigma)$ возрастает на отрезке $[0,s]$, поэтому функция γ достигает наибольшего значения в точке $(l-s,s)$ - $\gamma(l-s,s)=l^\alpha-(l-s)^\alpha$.

ОС: $\sigma=0,\ 0\ \mathbb{C}x\ \mathbb{C}l,\ \gamma(x,0)=0$.

Вывод. $\omega_L\ (\ldots_\alpha;\ s)=max\ \{s^\alpha,\ l^\alpha-\ (l-s)^\alpha\}\cdot\dfrac{1}{l\,\Gamma(\alpha+1)}$

Видно, что $\lim\limits_{s\to+0}\ \omega_L(\ldots_\alpha;s)=0$.

Дальше оценим модуль непрерывности

$$\omega(\beta_\lambda;s)=\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\0\le x\le l-\sigma\\0<s<l}}\int_0^{l-\sigma}|\beta_\lambda(x+\sigma)-\beta_\lambda(x)|\,dx \tag{26}$$

Получим:

$$\omega(\beta_\lambda;s)=\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\0\le x\le l-\sigma\\0<s<l}}\int_0^{l-\sigma}\int_0^l(\ldots_\alpha(x+\sigma,t)-\ldots_\alpha(x,t))-$$

$$-(f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) -$$

$$- f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \dots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\,dt\,|dx \le$$

$$\le \sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\ 0\le x\le l-\sigma\\ 0<s<l}} A \int_0^l \sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|\,dt \times$$

$$\times \int_0^{l-\sigma} |\dots_\alpha(x+\sigma,t) - \dots_\alpha(x,t)|\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\ 0\le x\le l-\sigma\\ 0<s<l}} \Bigg(\int_0^\sigma \sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|\,dt \times$$

$$\times\left(\int_0^t (x+\sigma-t)^{\alpha-1}\,dx + \int_t^{l-\sigma}\left((x+\sigma-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}\right)dx\right)+$$

$$+\int_\sigma^{l-\sigma}\sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|\,dt\times$$

$$\times\left(\int_{t-\sigma}^t (x+\sigma-t)^{\alpha-1}dx + \int_t^{l-\sigma}\left((x+\sigma-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}\right)dx\right)+$$

$$+\int_{l-\sigma}^l \sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)| -$$

$$-\int_{t-\sigma}^{l-\sigma}(x+\sigma-t)^{\alpha-1}\,dx\Bigg) = \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\ 0\le x\le l-\sigma\\ 0<s<l}} \times$$

$$\times\Bigg(\int_0^\sigma \sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)| -$$

$$-\left((x+\sigma-t)^\alpha\Big|_0^{l-\sigma} - (x-t)^\alpha\Big|_t^{l-\sigma}\right)dt + \int_\sigma^{l-\sigma}\sum_{j=0}^{n-1} y^{(j)}(t) -$$

$$-y_\lambda^{(j)}(t)|\times$$

$$\times\left((x+\sigma-t)^\alpha\Big|_{t-\sigma}^{l-\sigma} - (x-t)^\alpha\Big|_t^{l-\sigma}\right)dt + \int_{l-\sigma}^l\sum_{j=0}^{n-1}|y^{(j)}(t)-$$

$$-y_\lambda^{(j)}(t)|\,(x+\sigma-t)^\alpha\Big|_{t-\sigma}^{l-\sigma}dt =$$

$$=\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\ 0\le x\le l-\sigma\\ 0<s<l}}\Bigg(\int_0^\sigma\sum_{j=0}^{n-1}|y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|$$

$$((l-t)^\alpha - (\sigma-t)^\alpha - (l-\sigma-t)^\alpha)\,dt +$$

$$+\int_\sigma^{l-\sigma}\sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|\,((l-t)^\alpha-(l-\sigma-t)^\alpha)\,dt+$$

$$+\int_{l-\sigma}^l \sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|\,(l-t)^\alpha\, dt\le$$

$$\le\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{\substack{0\le\sigma\le s\\ 0\le x\le l-\sigma\\ 0<s<l}}\Bigg(\int_0^{l-\sigma}\sum_{j=0}^{n-1}|y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|$$

$$((l-t)^\alpha-(l-\sigma-t)^\alpha)\,dt+$$

$$+\int_{l-\sigma}^l\sum_{j=0}^{n-1}|y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)|\,\sigma^\alpha\, dt$$

Функцию $\gamma(t,\sigma) = (l-t)^\alpha - (l-\sigma-t)^\alpha$ исследуем на наибольшее значение на компакте.

$$\overline{G} := \left\{(t,\sigma)\in\mathbb{R}^2 \;\begin{array}{l}0\le t\le l-\sigma,\\ 0\le\sigma\le s\end{array}\right\}$$

$$\begin{cases}\gamma_t' = \alpha(l-\sigma-t)^{\alpha-1}-\alpha(l-t)^{\alpha-1}\ne 0,\\ \gamma_\sigma' = \alpha(l-\sigma-t)^{\alpha-1}\ne 0\end{cases}$$

Видно, что функция γ в G критических точек не имеет. Исследуем функцию на наибольшее значение на границе G.

OA: $t = 0$, $\gamma(0,\sigma)=\mu(\sigma)=l^\alpha-(l-\sigma)^\alpha$, $0 \le \sigma \le s$. $\mu' = \alpha(l-\sigma)^{\alpha-1}>0$. Значит, функция $\mu(\sigma)$ возрастает на отрезке $[0,s]$, поэтому $\gamma(0,s)=l^\alpha-(l-s)^\alpha$ - наибольшее значение функции γ на отрезке OA.

AB: $\sigma=s$, $\gamma(t,s)=(l-t)^\alpha-(l-s-t)^\alpha=:\mu(t)$, $0\le t\le l-s$, $\mu'=-\alpha(l-t)^{\alpha-1}+\alpha(l--s-t)^{\alpha-1}$ Видно, что при $\alpha>1$ будет $\mu'<0$, поэтому функция μ убывает на отрезке $[0, l-s]$, значит, в этом случае $\gamma(0,s)=l^\alpha-(l-s)^\alpha$ наибольшее значение функции γ на отрезке AB. Если же $0<\alpha<1$, то $\mu'>0$ и функция μ - возрастает на отрезке $[0, l-s]$. Тогда $\gamma(l-s,s)=s^\alpha$ - наибольшее значение функции γ на AB.

BC: $t=l-\sigma$, $\gamma(l-\sigma,\sigma)=\mu(\sigma)=\sigma^\alpha$ - возрастает на отрезке $[0,s]$. Значит, $\gamma(l-s,s)=s^\alpha$ - наибольшее значение функции на BC.

OC: $\sigma=0$, $\gamma=0$.

Вывод. Наибольшее значение функции $\gamma(t,\sigma) = (l-t)^\alpha -(l-\sigma-t)^\alpha$ на компакте $\overline{G}$ будет равно $\max\{l^\alpha -(l-s)^\alpha, s^\alpha\}$.

Тогда получим оценку указанного модуля непрерывности.

$$\omega_L(B_\lambda;s)\le\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^l\sum_{j=0}^{n-1}|y^{(j)}(t)-y_\lambda^{(j)}(t)|$$

$$\max\{l^\alpha-(l-s)^\alpha,s^\alpha\}=$$

$$=A\,l\,\|y(t)-y_\lambda(t)\|_{L^{(j)}(0,l)}\cdot\omega_L(\dots_\alpha;s) \qquad (27)$$

Через $æ_{\cdots\alpha}^{\omega_L(j)}$ обозначим класс всех измеримых функций $\varphi(x) \in L^{(j)}(0, l)$ и таких, что для любых $x', x'' \in [0, l]$ выполняется неравенство

$$\| \varphi(x'') - \varphi(x')\|_{L^{(j)}(0, l)} \le \omega_L(\cdots_\alpha; |x'' - x'|) \quad (28)$$

Из неравенства (27) следует, что

$$\frac{\omega(\beta_\lambda; s)}{A\, l\, \| y(t) - y_\lambda(t) \|_{L^{(j)}(0, l)}} \le \omega_L(\cdots_\alpha; s) \quad (29)$$

Обозначим через

$$\varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ_{\cdots\alpha}^{\omega_L(j)}\right) := \sup_{\varphi \in æ_{\cdots\alpha}^{\omega_L(j)}} \|\varphi(x) - \mathcal{U}_\lambda(\varphi(\xi); x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \quad (30)$$

Из (27) – (30) следует, что

$$\|\beta_\lambda(x) - \mathcal{U}_\lambda(\beta_\lambda(\xi); x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \le$$
$$\le A\, l\, \| y(t) - y_\lambda(t) \|_{L^{(j)}(0, l)} \cdot \varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ_{\cdots\alpha}^{\omega_L(j)}\right) \quad (31)$$

Причем, метод суммирования выбираем таким, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ_{\cdots\alpha}^{\omega_L(j)}\right) = 0$$

Дальше оценим $\|\beta_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)}$.

Получим:

$$\|\beta_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,l)} = \| \int_0^l \cdots_\alpha(x,t)(f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) -$$
$$- f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \ldots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\, dt \|_{L^{(j)}(0, l)} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l | \int_0^l \cdots_\alpha^{(j)}(x, t)\,(f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) -$$
$$- f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \ldots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\, dt \,|\, dx =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^l | \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} (f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) -$$
$$- f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \ldots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\, dt \,|\, dx +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l \left| \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j)}{\Gamma(\alpha)} \times \right.$$
$$\times \int_0^x (x - t)^{\alpha-1-j} (f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) -$$
$$- f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \ldots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\, dt|\, dx \le$$
$$\le \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^l dx \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) |\, dt + \right.$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^l (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j)\, dx \times$$
$$\left. \times \int_0^x (x-t)^{\alpha-1-j} \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) |\, dt \right) =$$
$$= \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^l \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) |\, dt \int_t^l (x-t)^{\alpha-1} dx + \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_0 (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j) \times$$
$$\left. \times \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) |\, dt \int_t^l (x-t)^{\alpha-1-j} dx \right) =$$
$$= \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^l \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) | \frac{(l-t)^\alpha}{\alpha} dt + \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j) \times$$
$$\left. \times \int_0^l \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) | \frac{(l-t)^{\alpha-j}}{\alpha-j} dt \right) \le$$
$$\le \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{l^\alpha}{\alpha} \int_0^l \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) |\, dt + \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))\, l^{\alpha-j} \times$$
$$\left. \times \int_0^l \sum_{j=0}^{n-1} | y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t) |\, dt \right) =$$
$$= \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))\, l^{\alpha-j} \right) \times$$
$$\times \| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \quad (32)$$

Из (21) получим с учетом оценок (31) и (32):

$$\|y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \le \| y(x) - \mathcal{U}_\lambda(y; x)\|_{L^{(j)}(0, l)} +$$
$$+ \|\beta_\lambda(x) - \mathcal{U}_\lambda(\beta_\lambda(\xi); x)\|_{L^{(j)}(0, l)} + \|\beta_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \le$$
$$\le \|y(x) - \mathcal{U}_\lambda(y; x)\|_{L^{(j)}(0, l)} + Al \| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \times$$
$$\times \varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ_{\cdots\alpha}^{\omega_L(j)}\right) +$$
$$+ \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))\, l^{\alpha-j} \right) \times$$
$$\times \| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \quad (33)$$

Из (33) получим:

$$\|y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \le C_\lambda + M \| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)} \le$$
$$\le C_\lambda + M(C_\lambda + M(C_\lambda + \ldots)\ldots) =$$
$$= C_\lambda(1 + M + M^2 + M^3 + \ldots) = C_\lambda B, \quad (34)$$

где

$$C_\lambda = \| y(x) - \mathcal{U}_\lambda(y; x)\|_{L^{(j)}(0, l)} +$$
$$+ A\, l\, \| y(x) - y_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0, l)} \cdot \varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ_{\cdots\alpha}^{\omega_L(j)}\right), \quad (35)$$

$$M = \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \left(\frac{l^{\alpha}}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - (j-1))\, l^{\alpha - j} \right), \qquad (36)$$

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} M^{k}, \qquad (37)$$

В правую часть (34) подставляем C_λ из (35), получим:

$$\|y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)} \le B \|y(x) - U_\lambda(y;\, x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)} +$$

$$+ A\, l\, \| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)} \cdot \varepsilon \left(U_\lambda, \text{æ}^{\,\omega_{L^{(j)}}}_{\cdots\, \alpha} \right) \qquad (38)$$

Решаем неравенство (38) относительно $\|y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,l)}$

$$\| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)} \le$$

$$\le \frac{B \,\|y(x) - U_\lambda(y;\, x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)}}{1 - A\, l\, \varepsilon \left(U_\lambda, \text{æ}^{\,\omega_{L^{(j)}}}_{\cdots\, \alpha} \right)} \qquad (39)$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Семенчук Н.П. // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1831-1833.
2. Джрбашян М.М., Нерсенян А.Б. //Известия АН Армянской ССР. 1968. 3, № 1. С. 3-29.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. – Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

УДК 517.929

Афонин В.Г., Тузик И.В.

ОБ УСРЕДНЕНИИ В СИСТЕМАХ, СОВЕРШАЮЩИХ МЕДЛЕННЫЕ И БЫСТРЫЕ ДВИЖЕНИЯ

1. УСРЕДНЕНИЕ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon X(x,y,\varepsilon) = \varepsilon X(x,y,0) + \varepsilon^2 X^1(x,y,\varepsilon), \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y,\varepsilon) = Y(x,y,0) + \varepsilon Y^1(x,y,\varepsilon) \end{cases} \qquad (1.1)$$

с начальными условиями $x|_{t=0} = x_0$, $y|_{t=0} = y_0$ на промежутке $0 < t < L/\varepsilon$. Здесь $\varepsilon > 0$ - малый параметр, L - конечное число, X – m-мерная, а Y – k-мерная вектор-функции, достаточно гладкие по компонентам *x* и *y* и аналитические по параметру ε.

Системе (1.1) ставится в соответствие система

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\, \bar{X}(\xi) \qquad (1.2)$$

с начальным условием $\xi|_{t=0} = x_0$, причем m-мерная вектор-функция $\bar{X}(\xi)$ должна быть подобрана таким образом, чтобы на большом промежутке $0 < t < L/\varepsilon$ выполнялось соотношение

$$\|x(t) - \xi(t)\| = O(\varepsilon). \qquad (1.3)$$

Пусть выбор $\bar{X}(\xi)$ уже сделан. Для получения оценки вида (1.3) введем вспомогательную функцию

$$\tilde{x} = \xi + \tilde{X}(x,y). \qquad (1.4)$$

Здесь $\tilde{X}(x,y)$ является частным решением векторного уравнения

$$\left(Y(x,y,0), \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{X}(x,y) = X(x,y,0) - \bar{X}(x), \qquad (1.5)$$

в котором x и y являются решением системы (1.1). Заметим, что поскольку x и y нам неизвестны, уравнение (1.5) должно решаться при произвольных допустимых значениях x и y.

Теорема 1. Пусть $\bar{X}$ и $\tilde{X}$ выбраны таким образом, что

$$\left\| X^1(x,y,\varepsilon) - \left(X(x,y,\varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{X}(x,y) - \right.$$

$$- \left(Y^1(x,y,\varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{X}(x,y) + \qquad (1.6)$$

$$\left. + \left[\bar{X}(\xi + \varepsilon \tilde{X}(x,y)) - \bar{X}(\xi) \right] / \varepsilon \right\| \le L(t),$$

$$\|\bar{X}(x) - \bar{X}(\tilde{x})\| \le K(t) \|x - \tilde{x}\|, \qquad (1.7)$$

$$\|\tilde{X}(x,y)\| \le M(t) \qquad (1.8)$$

для $t \in [0, L/\varepsilon)$.

Тогда имеет место неравенство

$$\|x(t) - \xi(t)\| \le \varepsilon M(0) \exp(\varepsilon \int_0^t K(u)du) +$$

$$+ \varepsilon^2 \int_0^t L(s) \exp(\varepsilon \int_s^t K(u)du) ds + \varepsilon M(t). \qquad (1.9)$$

Доказательство. В силу (1.1), (1.2), (1.4) имеем

Афонин Владимир Гаврилович. *Доцент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*

Тузик Ирина Владимировна. *Аспирант каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.