

Басинюк В.Л., Драган А.В., Басинюк Я.В.,  
Мардосевич Е.И., Усс И.Н.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОЗУБЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

### ВВЕДЕНИЕ

Вынужденные колебания цилиндрических прямозубых зубчатых колес, имеющие зубцовую частоту, как правило, являются основными в спектре генерируемого ими шума и вибраций [1]. Поэтому представляет определенный научный и практический интерес их зависимость от скоростных и нагрузочных режимов функционирования зубчатой передачи.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью исследований являлась оценка влияния скоростных и нагрузочных режимов функционирования цилиндрической прямозубой зубчатой передачи на амплитудные значения генерируемых ими вынужденных колебаний.

### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для решения поставленной задачи был использован методический подход, предложенный специалистами ИМАШ им. А.А. Благоднарова РАН [2]. В нем зацепляющиеся зубчатые колеса представлены в виде приведенных к зубчатому зацеплению масс, установленных на упругие опоры. Взаимодействующие зубья имеют переменную периодически изменяющуюся жесткость. Вследствие этого в зацеплении возникает сила, возбуждающая вынужденные колебания с зубцовой частотой, функция которой  $F_{3П}(t)$  может быть описана рядом Фурье или представлена в виде, например, периодической функции [2]

$$F_{3П}(t) = \beta \cdot P \cdot \sin(\omega_3 \cdot t), \quad (1)$$

где  $\beta$  - безразмерный коэффициент, пропорциональный амплитуде колебаний жесткости по фазе зацепления;  $P$  - статическая сила, возникающая вдоль линии зацепления вследствие воздействия зубчатую передачу нагружающего момента на ее выходном валу, Н;  $\omega_3$  - круговая зубцовая частота вынужденных колебаний, рад/с;  $t$  - время, с.

Схемы равновесия приведенных к зубчатому зацеплению сил при воздействии статической силы  $P$  и возникновении силы  $F_{3П}(t)$  показаны на рис.1 а. Упругие деформации зубьев и подшипниковых опор шестерни и колеса в направлении линии зацепления при воздействии на них силы  $P$  (рис.1 б, в) обозначены соответственно  $\delta_3$ ,  $\delta_{1X}$ ,  $\delta_{2X}$ , в перпендикулярном направлении -  $\delta_{1Y}$  и  $\delta_{2Y}$ . Приведенные к зубчатому зацеплению деформации элементов предшествующей и последующей по отношению к рассматриваемой зубчатой паре кинематической цепи обозначены как  $\delta_{K1}$  и  $\delta_{K2}$ . Условие равновесия статических сил, действующих на зубчатую передачу, может быть записано в виде [3]:

для сил, действующих вдоль оси  $X$

$$\Sigma F_{X1} = 0; P - F_{01X} - F_{M1} \cdot \cos \alpha_3 = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma F_{X2} = 0; P - F_{02X} - F_{M2} \cdot \cos \alpha_3 = 0; \quad (3)$$

для сил, действующих вдоль оси  $Y$

$$\Sigma F_{Y1} = 0; F_{01Y} - F_{M1} \cdot \sin \alpha_3 = 0; \quad (4)$$

$$\Sigma F_{Y2} = 0; F_{02Y} - F_{M2} \cdot \sin \alpha_3 = 0; \quad (5)$$

для моментов, действующих вокруг осей подшипниковых опор  $O_1$  и  $O_2$

$$\Sigma T_{O1} = 0; F_{M1} \cdot r_1 - F_3 \cdot r_1 \cdot \cos \alpha_3 = 0; \quad (6)$$

$$\Sigma T_{O2} = 0; F_{M2} \cdot r_2 - F_3 \cdot r_2 \cdot \cos \alpha_3 = 0, \quad (7)$$

где  $F_{1X}$ ,  $F_{2X}$  - силы реакции подшипниковых опор, действующие вдоль линии зацепления соответственно на шестерню и колесо;  $F_{1Y}$ ,  $F_{2Y}$  - силы реакции подшипниковых опор, действующие перпендикулярно линии зацепления соответственно на шестерню и колесо;  $F_{M1}$ ,  $F_{M2}$  - силы реакции предшествующей и последующей за рассматриваемой зубчатой передачей кинематических цепей, действующие в окружном направлении соответственно на шестерню и колесо;  $F_3$  - сила воздействия со стороны зубчатого зацепления на шестерню и зубчатое колесо, направленная вдоль линии зацепления;  $r_1$  и  $r_2$  - радиусы делительных окружностей соответственно шестерни и колеса.

На рис. 1 жесткость подшипниковых опор шестерни и колеса обозначены соответственно через  $C_{O1}$  и  $C_{O2}$ , связанных с их валами кинематических цепей -  $C_{M1}$  и  $C_{M2}$ , коэффициенты демпфирования колебаний в подшипниковых опорах -  $K_{O1}$  и  $K_{O2}$ , в муфтах -  $K_{M1}$  и  $K_{M2}$ . Все элементы механической системы в результате воздействия статической силы  $P$  предварительно упруго деформированы на соответствующие величины  $\delta_3$ ,  $\delta_{01X}$ ,  $\delta_{01Y}$ ,  $\delta_{02X}$ ,  $\delta_{02Y}$ ,  $\delta_{M1}$ ,  $\delta_{M2}$ .

Схемы нагружений и смещений зубчатых колес при возникновении  $F_{3П}(t)$  показаны на рис. 1г, д. В них, в начальный момент времени при  $t_0 = 0$ , дополнительные к приведенным выше смещения и скорости колебаний приведенных масс шестерни и колеса равны нулю.

Под воздействием возникающей в зацеплении внутренней силы  $F_{3П}(t)$ , возбуждающей колебания в механической системе, зубчатые колеса плоско-параллельно перемещаются в направлении осей  $X$  и  $Y$  на величины дополнительной деформации подшипниковых опор, для шестерни и колеса соответственно равные  $X_{O1}$ ,  $X_{O2}$ ,  $Y_{O1}$ ,  $Y_{O2}$  и смещаются в окружных направлениях за счет дополнительных упругих деформаций элементов кинематической цепи и (или) муфт на величины  $\Delta_{M1}$  и  $\Delta_{M2}$ . Поскольку углы поворотов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в окружном направлении малы, то эти перемещения могут быть приняты как линейные.

Басинюк Владимир Леонидович, к.т.н., доцент, зав. лаб. ИМИНМАШ НАН Беларуси, г. Минск.

Мардосевич Елена Ивановна, к.т.н., н.с. ИМИНМАШ НАН Беларуси, г. Минск.

Басинюк Ярослав Владимирович, к.т.н., ведущий инженер-программист ИП «Элам-системс», г. Минск.

Усс Иван Никодимович, начальник ГСКБ ПО «Минский тракторный завод», г. Минск.

Драган Александр Вячеславович, к.т.н., доцент каф. технологии машиностроения Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

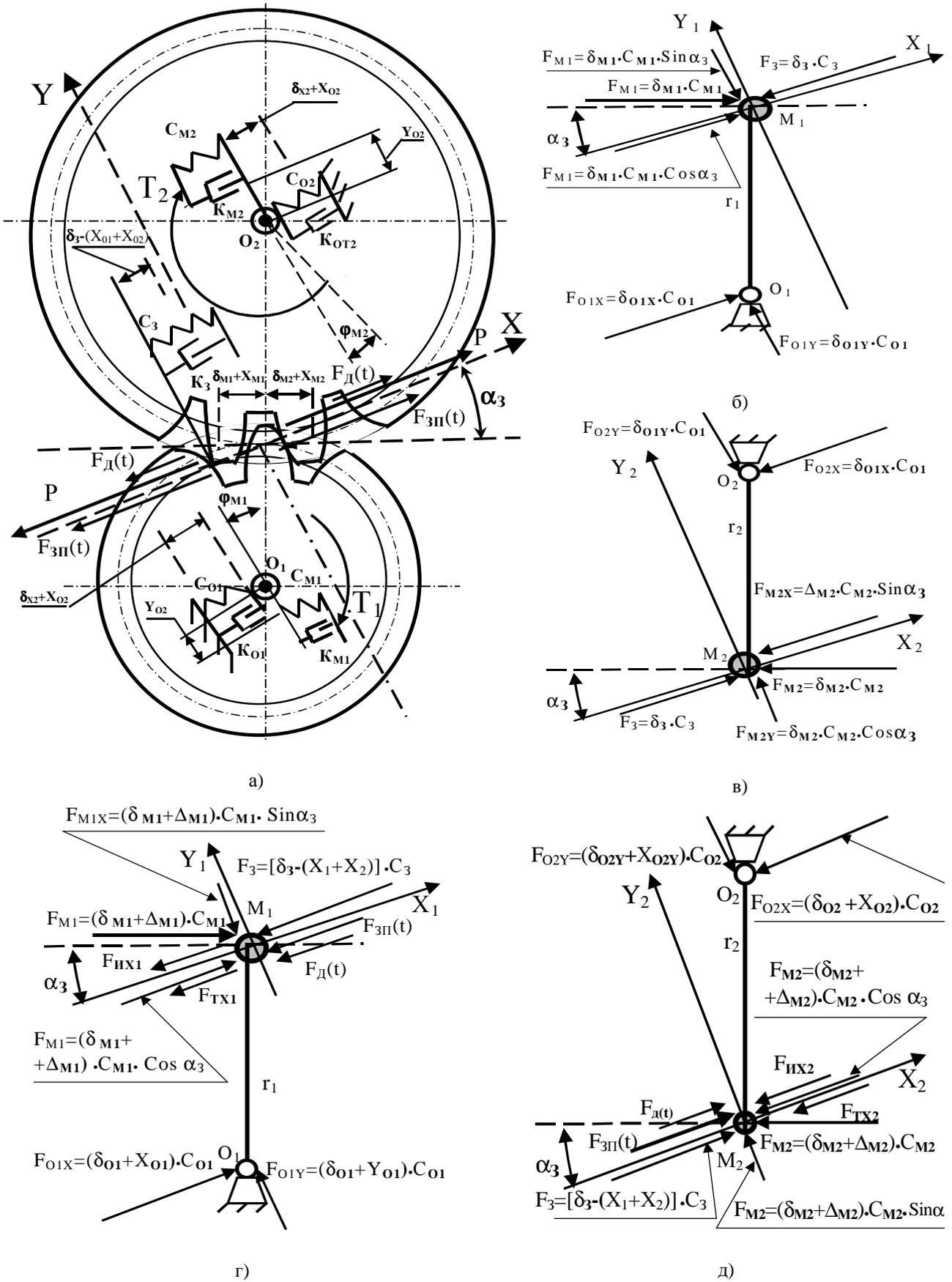


Рис. 1. Схемы динамической модели зубчатой передачи (а); равновесия сил при статическом нагружении шестерни (б) колеса (в); равновесия сил при приложении динамической нагрузки к шестерне (г) и колесу (д).

Колебания в радиальном и окружном направлениях обуславливают возникновение инерционных и демпфирующих сил. При этом, как показывает анализ исходных уравнений, их составляющие в направлении линии зацепления  $X$  и перпендикулярно ей -  $Y$ , связаны между собой постоянными коэффициентами. Поэтому в дальнейшем будут рассмотрено только одно из них - направление оси  $X$ .

При рассмотрении равновесия сил считаем все перемещения  $X_{O1}, X_{O2}, Y_{O1}, Y_{O2}$  положительными с последующим уточнением их действительного направления после решения системы дифференциальных уравнений, описывающих возникающие в рассматриваемой динамической системе колебания. В соответствии с этим направления сил инерции и трения принимаем обратными направлениям осей  $X$  и  $Y$ .

На рис. 1б, в, г, д приведены зависимости, связывающие силы, действующие в рассматриваемой механической системе, с деформациями и жесткостями ее элементов.

В случае взаимодействия одинаковых зубчатых колес, установленных на идентичные подшипниковые опоры и взаимодействующих с одинаковыми муфтами, система симметрична. Для шестерни и колеса уравнение равновесия сил, действующих вдоль оси  $X$  примет вид

$$m \cdot X'' + [\vartheta \cdot (C_3 \cdot C_{npx} \cdot m)^{1/2} / \pi] \cdot X' - C_3 \cdot (\delta_3 - 2 \cdot X) - C_M \cdot (\delta_M + \Delta_M) \cdot \cos \alpha_3 - C_O \cdot (\delta_{OX} + X_O) = \beta \cdot P \cdot \sin(\omega_3 \cdot t), \quad (8)$$

где  $K_{OT} = \vartheta \cdot (C_3 \cdot C_{npx} \cdot m)^{1/2} / \pi$  [4],  $\vartheta$  - логарифмический декремент затухания,  $m$  - приведенная к зацеплению масса зубчатого колеса (шестерни),  $C_3$  - жесткость зубчатого зацепления,  $\pi = 3,1415\dots$ ,  $C_{npx}$  - безразмерная приведенная жесткость муфт и подшипниковых опор в направлении линии зацепления, равная

$$C_{npx} = [(C_3/C_O) + (C_3/C_M) \cdot \cos^2 \alpha_3]^{-1}. \quad (9)$$

После преобразования выражения (8) получим

$$X'' + \omega_0 \cdot K_0 \cdot X' + \omega_0^2 \cdot K_c \cdot X = -\beta \cdot \omega_0^2 \cdot \delta_3 \sin(\omega_3 t), \quad (10)$$

где  $K_0 = [\vartheta \cdot (C_{npx})^{1/2} / \pi]$ ,

$$K_c = 2 - \{(C_M/C_3) \cdot [\cos^2 \alpha_3] / [\cos^2 \alpha_3 + (C_M/C_O)]\} - [(C_O/C_3)/k_{OX}].$$

С учетом того, что нагруженность зубчатой передачи в разработанной модели может быть выражена через деформацию зубьев соотношением  $\delta_3 = P/C_3$ , то решение уравнения (10) может быть представлено в следующем виде

$$X = e^{-\frac{\omega_0 K_0 t}{2}} (C_1 \cos(\zeta \cdot t) + C_2 \sin(\zeta \cdot t)) + \beta \cdot \delta_3 \cdot D_1 \cdot \sin(\omega_3 \cdot t + \phi_3), \quad (11)$$

где  $D_1 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{K_1^2 + \omega_0^2 \cdot \omega_3^2}}$ ,  $K_1 = \omega_0^2 \cdot K_c - \omega_3^2$ ,  $\omega_0^2 = C_3/m$ ,

$$\operatorname{tg}(\phi_3) = \frac{-\omega_0 \cdot \omega_3}{K_1}, \quad \zeta = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4K_c - K_0^2}.$$

$C_1$  и  $C_2$ , определенные с учетом начальных условий ( $X = 0$  и  $X' = 0$  при  $t = 0$ ), соответственно равны [3]

$$C_1 = -\beta \cdot \delta_3 \cdot D_1 \cdot \sin(\phi_3),$$

$$C_2 = -0,5 \cdot \beta \cdot \delta_3 \cdot D_1 \cdot \frac{(\omega_0 \cdot K_0 \cdot \sin(\phi_3) + 2 \cdot \omega_3 \cdot \cos(\phi_3))}{\zeta} \quad (12)$$

Приведем полученное решение дифференциального уравнения к безразмерному виду, более удобному для исследования на ПЭВМ

$$\frac{X}{\beta \cdot \delta_3} = D_1 \cdot \left[ -e^{-\frac{\omega_0 K_0 t}{2}} \cdot C_{12} \cdot \sin(\zeta \cdot t + \phi_{s1}) + \sin(\omega_3 \cdot t + \phi_3) \right], \quad (13)$$

где  $\phi_{s1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$ .

$$C_{12} = \sqrt{\sin^2(\phi_3) + 0,25 \cdot \left[ \frac{(\omega_0 \cdot K_0 \cdot \sin(\phi_3) + 2 \cdot \omega_3 \cdot \cos(\phi_3))}{\zeta} \right]^2}$$

$$\phi_{s0} = \phi_{s1} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_0 \cdot K_0 \cdot \zeta}{\zeta^2 - 0,25 \cdot \omega_0^2 \cdot K_0^2}\right).$$

Полученное решение дифференциального уравнения представляет собой математическую модель взаимодействия одинаковых зубчатых колес, описывающую их колебания с учетом жесткостных параметров подшипниковых опор и муфт и (или) предшествующей (последующей) части кинематической цепи. На его основе этого было построено программное обеспечение для автоматизированных исследований на ПЭВМ процессов передачи колебаний от зубчатых колес к подшипниковым опорам.

Поскольку целью исследований являлась оценка влияния нагруженности и угловых скоростей вращения на амплитудные значения смещений, скоростей и ускорений при колебаниях приведенных масс зубчатых колес на зубцовых частотах, то все параметры, кроме  $\delta_3$  и  $\omega_3$ , фиксировались. Диапазон изменений  $\omega_3$  был принят равным 700–6000 рад/с исходя из наиболее используемых угловых скоростей вращения зубчатых передач автотракторостроения и станочных трансмиссий. При моделировании процессов колебаний динамической системы величина  $\beta$  соответствовала 0,16; 0,2; 0,24, то есть колебаниям жесткости зацепления прямозубых колес при однопарном, реализуемом при легких режимах нагружения, и однопарно-двухпарном взаимодействии зубьев, возникающих при их деформации в процессе нагружения передачи значительными моментами и выборке зазоров, связанных с погрешностями шагов зацепления.

Для оценки достоверности полученных результатов на стенде с разомкнутым силовым контуром были проведены натурные испытания зубчатой передачи, имеющей модуль и одинаковые числа зубьев, соответственно равные 3 мм и 40.

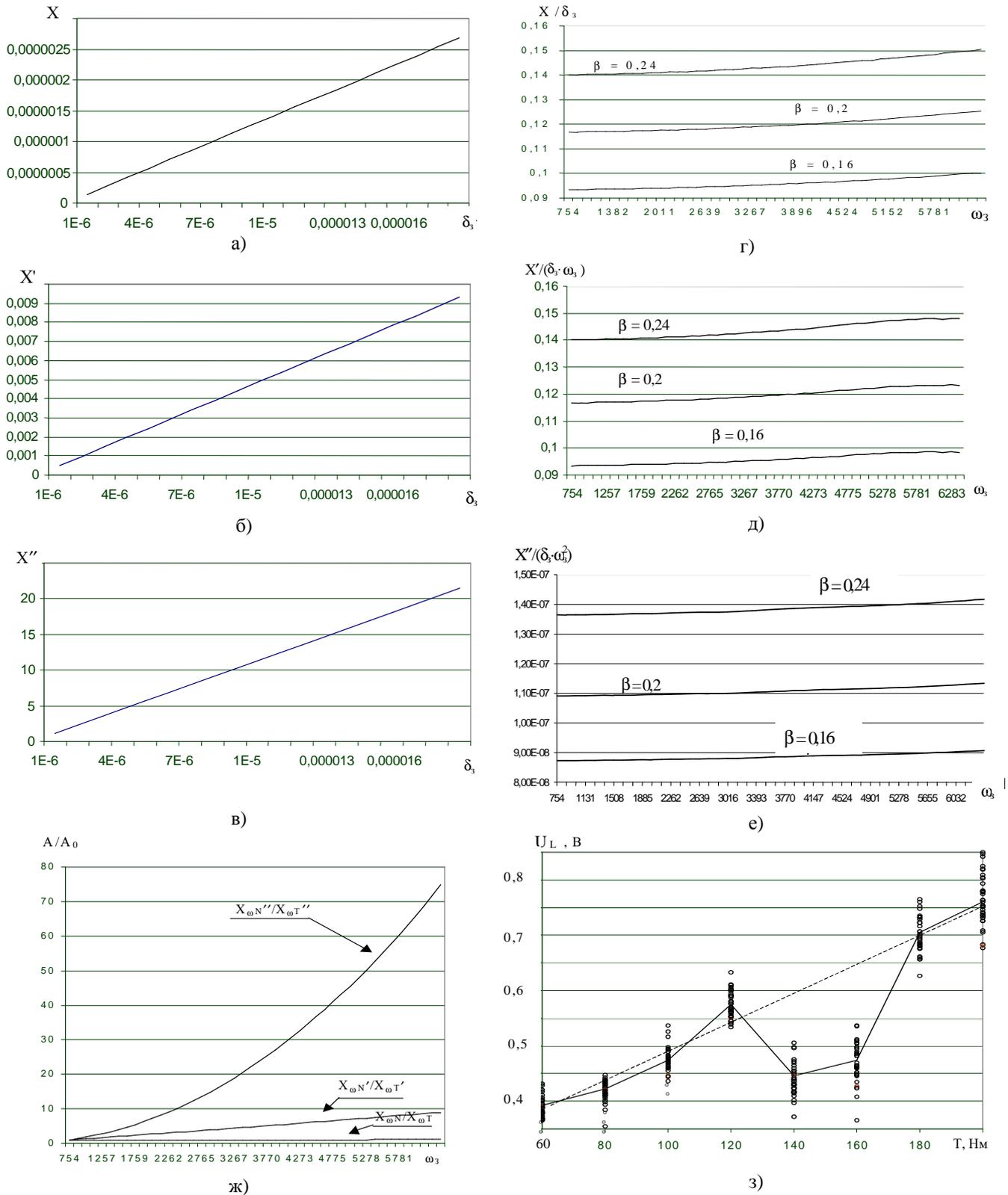
## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты исследований на ПЭВМ влияния нагруженности на амплитудные значения генерируемых зубчатым зацеплением колебаний (смещений, скоростей и ускорений) приведены на рис. 2а - ж, экспериментальных исследований зубчатой пары - на рис. 2з.

Их анализ показывает следующее.

Амплитуда смещений  $X_{max}$ , скорости  $X'_{max}$  и ускорения  $X''_{max}$  вынужденных колебаний с зубцовой частотой приведенных к зацеплению масс зубчатых колес практически линейно связаны с его нагруженностью, в рассматриваемом примере характеризующейся  $\delta_3$  (рис. 2а, б, в).

Увеличение статической составляющей нагружающего момента при постоянной угловой скорости вращения входного вала исследуемой передачи обуславливало практически пропорциональное возрастание амплитудных значений смещений (рис.2а), скоростей (рис. 2б) и ускорений (рис. 2в), генерируемых ею вынужденных колебаний.



**Рис. 2.** Влияние нагруженности (а, б, в) и скоростных режимов функционирования (г, д, е, ж) зубчатой передачи на амплитудные значения генерируемых ею смещений (а, г), скоростей (б, д) и ускорений (в, е) колебаний на зубцовой частоте;  $X_{\omega N}$ ,  $X'_{\omega N}$ ,  $X''_{\omega N}$  – значения амплитуд соответственно смещений, скоростей и ускорений при  $\omega = 754$  рад/с;  $X_{\omega T}$ ,  $X'_{\omega T}$ ,  $X''_{\omega T}$  – значения амплитуд соответственно смещений, скоростей и ускорений при текущем значении  $\omega$ ; экспериментально полученные амплитудные значения виброускорений  $U_L$  на зубцовой частоте, зарегистрированные при ступенчато увеличивающемся моменте нагружения зубчатой передачи с одинаковыми числами зубьев (з).

При одинаковой нагруженности  $X_{max}$  не зависит от окружной скорости, а отношения  $X'_{max}$  и  $X''_{max}$  к соответственно  $\omega_3$  и к  $\omega_3^2$  - близки к постоянным (рис. 2г, д, е). Их значения при увеличении угловой скорости вращения возрастают незначительно, не более 5-6%, при изменении  $\omega_3$  на порядок.

Таким образом, амплитудные значения смещений при вынужденных колебаниях, генерируемых зубчатыми колесами являются функцией только нагруженности и амплитуды колебаний жесткости по фазе зацепления. Их возрастание приводит к пропорциональному увеличению размахов колебаний на зубцовых частотах.

При этом надо учитывать то, что виброскорости и виброускорения вынужденных колебаний пропорциональны соответственно угловой скорости вращения и ее квадрату (рис.2 ж).

Приведенные выше данные хорошо согласуются с результатами испытаний натурных образцов (рис.2з) и исследований, приведенных в работе [2], в которой отмечено следующее: «Величины возмущающих сил (при условии независимости жесткости зубьев от нагрузки) прямо пропорциональны соответствующей передаваемой статической нагрузке, величинам постоянной и переменной погрешностей. Возмущающие силы не зависят от угловых скоростей вращения колес. Частотные спектры возмущающих сил, обусловленных изменением суммарной жесткости и постоянной погрешностью шагов зубьев, состоят из зубцовой частоты и ее гармоник».

#### ВЫВОДЫ

Наиболее существенное влияние на амплитуду смещений при вынужденных колебаниях с зубцовыми частотами, генерируемых цилиндрическими прямозубыми зубчатыми колесами, оказывает их нагруженность, между которыми существует близкая к линейной зависимость. Угловая скорость вращения оказывает незначительное влияние на этот параметр, однако от нее существенно зависят виброскорости и виброускорения.

Таким образом, при использовании амплитудных значений вынужденных колебаний на зубцовой частоте в качестве критерия для оценки качества изготовления и сборки зубчатых колес, а также разработке мероприятий по улучшению виброакустических характеристик прямозубых зубчатых передач на стадии проектирования, изготовления и определения их технического состояния в процессе испытаний и эксплуатации [4-8] целесообразно осуществлять регистрацию диагно-

стических данных в режиме регламентированного нагружения при стабилизированных угловых скоростях вращения диагностируемых зубчатых колес.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./В.Н. Челомей (пред). – М: Машиностроение, 1980 – Т.3. Колебания машин, конструкций и их элементов/ Под. ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. 1980. – 544 с.
2. Э.Л.Айрапетов, В.И.Апархов, М.Д.Генкин, А.А. Жирнов, О.И.Косарев. Возбуждение колебаний в зубчатых передачах //Сб. Динамические процессы в механизмах с зубчатыми передачами. М: Наука. – 1976. – С. 3-18.
3. Я.В. Басинюк. Повышение эффективности диагностирования передач зацеплением на основе применения современных информационных технологий при анализе изменений характеристик их динамических структур // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. ИНДМАШ НАН Беларуси. Минск. – 2002. – 203 с.
4. О.В. Берестнев, В.Л. Басинюк, В.Б. Чемисов. Зубчатые колеса пониженной виброактивности – Новополоцк: Изд. ПГУ, 1997. – 122 с.
5. Пат. 4872337 США, МКИ G 01 M 13/02. Nondestructive Testing of Gear / Robert J. Watts (США).– № 150114, Заявл. 29.01.1988; Оpubл. 10.10.1989; НКИ 73/162. – 12 с.
6. Пат. 4261 С2 BY, МПК G 01 M 13/02. Способ вибрационной диагностики нагруженности зубьев зубчатых передач при испытаниях / О.В. Берестнев, Н.Н. Ишин, В.Л. Басинюк, Я.О. Берестнев, Я.В. Басинюк. – № а 19980960; Заявл. 21.10.1998; Оpubл. 30.12.2001 // Афіцыйны бюлетэнь / Дзярж. пат. камітэт Рэсп. Беларусь. – 2001. – №4. – С. 171 – 172.
7. Пат. 2224223 С1 RU, МПК G 01 H 17/00, G 01 M 13/02. Устройство для виброакустической диагностики передач зацеплением/Я.В. Басинюк. – № 2002123956; Заявл. 09.09.2002; Оpubл. 20.02.2004. Бюл. № 5.
8. Пат. 2224232 С1 RU, МПК G 01 M 13/02. Способ виброакустической диагностики передач зацеплением. / Я.В. Басинюк, Н.Н. Ишин, В.Л. Басинюк, Е.И. Мардосевич. – № 2002113404; Заявл. 22.05.2002; Оpubл. 20.02.2004. Бюл. № 5.
9. Пат. 2231768 С2 RU, МПК G 01 M 13/02. Способ вибродиагностики передач зацеплением. / Я.В. Басинюк. – № 2002125140; Заявл.19.09.2002; Оpubл. 27.06.2004. Бюл. № 18.

УДК 62-587.5

**Басинюк В.Л., Драган А.В., Басинюк Я.В.,  
Мардосевич Е.И., Усс И.Н.**

## ВЛИЯНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМОЗУБЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ НА ДИНАМИЧЕСКУЮ НАГРУЖЕННОСТЬ ЗУБЬЕВ

#### ВВЕДЕНИЕ

Зубчатые передачи механических трансмиссий до настоящего времени остаются одним из наиболее широко используемых элементов, что связано с их относительно малой стоимостью и, в большинстве случаев, высокой надежностью. Вместе с тем они, как правило, являются основным источником повышенной виброакустической активности привода вследствие динамических процессов, возникающих при взаимодействии зубьев в зацеплении.

Динамическая нагруженность зубьев прямозубых зубчатых передач в основном связана с тремя факторами, характеризующими процесс их взаимодействия:

- кромочными и срединными ударами при входе и выходе зубьев из зацепления, обусловленными погрешностями

их изготовления по шагу и деформациями при нагружении и вызывающими собственные колебания механической системы [1];

- периодическими изменениями жесткости по фазе зацепления, связанными с изменениями как самой жесткости зубьев при перемещении зоны контакта вдоль линии зацепления, так и переходу от однопарного к двухпарному зацеплению и наоборот, что в целом вызывает вынужденные колебания механической системы с зубцовой частотой [2];
- вынужденными крутильными колебаниями, возникающими вследствие кинематической погрешности зубчатых колес и передач при определенных режимах функциони-