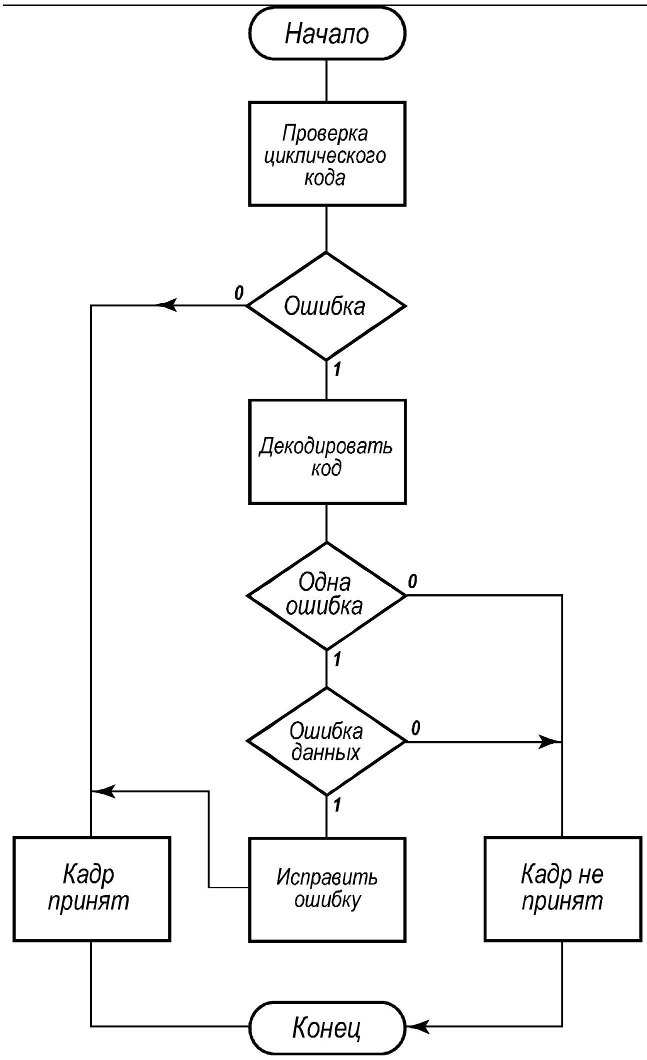



Рисунок 2 – Блок-схема корректирующего алгоритма.

Наиболее ответственной частью предлагаемой процедуры коррекции является определение позиции ошибки в кадре. Все поля кадра можно разделить на три группы:

- поле управления процессом передачи;
- поле данных пользователя;
- контрольное поле.

Попадание ошибки в поля управления резко увеличивает риск нарушения процесса передачи и поэтому, для повышения надёжности связи, более целесообразным будет повторный запрос кадра. Если же ошибка окажется в контрольном поле, то невозможно с полной уверенностью сказать, является ли она единственной, т.к. возможно такое искажение контрольной последовательности, что коррекция кадра на её основе приведёт к его разрушению уже на приёмной стороне. Таким образом, остаётся только поле данных, являющееся пассивным полем в процессе передачи, а также местом с наибольшей вероятностью появления ошибок. Если передается информационный кадр V.42 с 256-тью байтами данных и контрольным полем на 16 разрядов, то, при равномерном распределении ошибок, общая вероятность возникновения ошибки в поле данных будет в 51 раз превосходить вероятность возникновения ошибки в других полях кадра, вместе взятых.

Из вышеизложенного следует, что корректировать предложенным методом достаточно только ошибки поля данных. Это позволит сохранить надёжность передачи на должном уровне совместно с повышением пропускной способности канала передачи. Также рекомендуется сразу же переходить на контроль циклическим кодом CRC-32 – в целях повышения способностей по обнаружению ошибок и, как следствие, повышения достоверности передачи данных.

Определить наличие и положение поля данных в кадре достаточно просто. Если поле данных пользователя присутствует в кадре, то длина кадра превышает наименьшую длину блока данных при адаптивной сборке (64 байт). Справа поле данных ограничивает контрольное поле кадра, положение и размер которого заранее известны и устанавливаются в процессе согласования параметров передачи. В процессе согласования параметров передачи согласуют также и размер блока данных пользователя, что позволяет точно выявить его начало относительно контрольного поля.

Блок-схема корректирующего алгоритма отображена на рисунке 2.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Лагутенко О.И. Модемы. Справочник пользователя.– Спб.: «Лань», 1997. –368с.
2. Модемы: разработка и использование в России. Технологии электронных коммуникаций / Под ред. А. Пасковатого. – М.: «Эко-Трэндз Ко», 1996. – 76 с.
3. Блэк.Ю. Сети ЭВМ: Протоколы, стандарты, интерфейсы: Пер. с англ. – М.:Мир, 1990. – 506 с.
4. Мак-Вильямс Ф., Слоэн А. Теория кодов, исправляющих ошибки: Пер. с англ. – М.: Связь, 1979. – 743 с.


УДК 519.714.5

***Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А.***

# ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМЫ ПОЛНОСТЬЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПО СТОЛБЦАМ ЕЕ КОМПАКТНОЙ ТАБЛИЦЫ

Задача декомпозиции булевых функций является одной из важнейших задач в области логического проектирования, что делает ее объектом большого внимания со стороны многих исследователей в этой области. Как показывает не очень давний обзор [1], на данную тему написано значительное количество статей. Ряд известных методов предполагает использование карты декомпозиции, представляющей собой определенным образом построенную карту Карно для одной функции или обобщенную карту Карно – для системы функций. В работах [2, 3] показано, что представление системы полностью определенных булевых функций в виде компактной таблицы является удобным для решения задач декомпозиции этой системы. По сравнению с картами Карно компактные таблицы во многих случаях имеют заметно меньшие размеры,

***Поттосин Ю.В.*** *Институт технической кибернетики НАН Беларуси.*
***Шестаков Е.А.*** *Институт технической кибернетики НАН Беларуси.*
*Беларусь, г. Минск.*

однако, если система зависит от большого числа переменных, то размеры таблицы могут быть значительны. Обработка таких таблиц при решении задач декомпозиции может оказаться непосильной даже современным ЭВМ.

В настоящей работе предлагается метод решения «классической» задачи декомпозиции системы полностью определенных булевых функций без построения всей компактной таблицы. При этом решение задачи декомпозиции сводится к последовательному просмотру столбцов этой таблицы. В этом случае нет необходимости строить всю компактную таблицу, достаточно для выполнения очередного шага метода находить лишь очередной ее столбец. В работе предлагается способ перебора столбцов компактной таблицы, основанный на результатах работы [4].

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть система полностью определенных булевых функций $y = f(x)$, где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, задана матрицами $U$, $V$, которые являются матричным представлением системы ДНФ заданных функций [5]. Матрица $U$ является троичной матрицей размерности $l \times n$, а матрица $V$ – булевой, ее размерность $l \times m$. Столбцы матрицы $U$ помечены переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$, а строки представляют элементарные конъюнкции из заданных ДНФ. Столбцы матрицы $V$ помечены переменными $y_1, y_2, \dots, y_m$. Единицы в этих столбцах указывают элементарные конъюнкции, входящие в соответствующие ДНФ. Пусть также имеется система полностью определенных булевых функций $y = g(z, u')$, где $z = h(u)$. Векторные переменные $u$ и $u'$ составлены из переменных, входящих соответственно в подмножества $G$ и $G'$ множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, причем $G \cup G' = X$. Система $y = g(z, u')$ является декомпозицией системы $y = f(x)$, если и только если $f(x) = g(z, u')$. Декомпозиция $y = g(z, u')$ системы $y = f(x)$ является полезной, если подмножества $G$ и $G'$ удовлетворяют неравенствам $|G| < |X|$, $|G'| < |X|$ и суммарное число компонент в векторных переменных $z$, $u'$ меньше числа компонент в векторной переменной $x$.

Задача декомпозиции системы булевых функций, рассматриваемая в настоящей работе, состоит в поиске полезной декомпозиции $y = g(z, u')$ системы $y = f(x)$, в которой суммарное число переменных в векторных переменных $z$ и $u'$ минимально или близко к минимальному.

Решение данной задачи декомпозиции может быть найдено по компактной таблице [2, 3], задающей исходную систему булевых функций. Эта таблица строится по матрицам $U$, $V$ и подмножествам $G$, $G'$ множества $X$. Приведем некоторые понятия, взятые из работ [2, 3], на основе которых строится компактная таблица.

*Секционированная троичная матрица.* Положим, что строки троичной матрицы $U$ разбиты на s секций. Это разбиение задается посредством функционального отображения $\alpha : L \to S$, где $L = \{1, 2, \dots, l\}$ – множество номеров строк матрицы $U$, $S = \{1, 2, \dots, s\}$ – множество номеров секций матрицы $U$ $(s \le l)$. Для каждой строки с номером $i$ $(1 \le i \le l)$ матрицы $U$ задается номер секции $j = \alpha(i)$ $(1 \le j \le s)$, которой она принадлежит. Каждую секцию с номером $j$ матрицы $U$ можно интерпретировать как матричное представление ДНФ некоторой булевой функции $v_j(x)$. Таким образом, секционированная троичная матрица $U$ задает последовательность булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$. В дальнейшем под секционированной троичной матрицей будем понимать пару $C = (U, \alpha)$, где $U$ – троичная матрица, а $\alpha$ – отображение, задающее ее разбиение на секции.

*Покрытие секционированной троичной матрицы.* Пусть секционированная троичная матрица $C = (U, \alpha)$ задает последовательность булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$. Обозначим через $y^*$, $x^*$ значения векторных переменных $y$, $x$ соответственно, а через $t(x^*, C)$ – подмножество множества $S$, состоящее из тех номеров секций $j$, для которых $v_j(x^*) = 1$.

Покрытием $\pi$ множества $S$ назовем любую совокупность различных подмножеств множества $S$, объединение которых совпадает с множеством $S$. Элементами покрытия могут быть как пустое множество, так и само множество $S$.

Для секционированной троичной матрицы $C = (U, \alpha)$, разбитой на $s$ секций и задающей последовательность булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$, образуем покрытие $\pi$ на множестве $S$, взяв в качестве его элементов все различные элементы множества $\{t(x^*, C) \,/\, x^* \in \{0,1\}^n\}$. Для каждого блока $\pi_j$ покрытия $\pi$ зададим булеву функцию $\pi_j(x)$, положив, что для любого $x^* \in \{0,1\}^n$ выполняется $\pi_j(x^*) = 1$, если и только если $t(x^*, C) = \pi_j$, иначе $\pi_j(x^*) = 0$. Назовем $\pi$ покрытием секционированной троичной матрицы $C$ (покрытием последовательности булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$).

Формирование компактной таблицы основано на понятии произведения покрытий секционированных троичных матриц.

*Операция произведения покрытий секционированных троичных матриц.* Пусть секционированной троичной матрицей $C = (U, \alpha)$ задана последовательность булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$. Зададим каждую из булевых функций $v_i(x)$ этой последовательности, где $1 \le i \le s$, в виде конъюнкции булевых функций $v_i^1(x)$, $v_i^2(x)$ т.е. $v_i(x) = v_i^1(x) \wedge v_i^2(x)$. Таким образом, разделим рассматриваемую последовательность на последовательности $v_1^1(x), v_2^1(x), \dots, v_s^1(x)$; $v_1^2(x), v_2^2(x), \dots, v_s^2(x)$. Первая из этих последовательностей задается секционированной троичной матрицей $C^1 = (U_1, \alpha_1)$, вторая – секционированной троичной матрицей $C^2 = (U_2, \alpha_2)$. Обозначим через $\pi$, $\pi^1$, $\pi^2$ покрытия последовательностей булевых функций, заданных матрицами $C$, $C^1$, $C^2$ соответственно. Построим по покрытиям $\pi^1$, $\pi^2$ покрытие $\pi'$. Для этого сформируем множество

$$\lambda = \{\pi_i^1 \cap \pi_j^2 \,/\, \pi_i^1 \in \pi^1,\ \pi_j^2 \in \pi^2,\ \pi_i^1(x) \wedge \pi_j^2(x) \ne 0\}.$$

Для каждого элемента $\lambda_{ij} = \pi_i^1 \cap \pi_j^2$ множества $\lambda$ определим булеву функцию $\lambda_{ij}(x) = \pi_i^1(x) \wedge \pi_j^2(x)$. Блоками покрытия $\pi'$ являются все различные элементы множества $\lambda$. Для всякого блока $\pi_k'$ покрытия $\pi'$ найдем булеву функцию $\pi_k'(x)$. Эта функция получается дизъюнкцией всех булевых функций, приписанных тем элементам множества $\lambda$, которые равны блоку $\pi_k'$. В дальнейшем покрытие $\pi'$ будем называть произведением покрытий $\pi^1$, $\pi^2$ $(\pi' = \pi^1 \times \pi^2)$. Как показано в работах [2, 3], $\pi = \pi^1 \times \pi^2$.

*Представление системы полностью определенных булевых функций компактной таблицей.* Пусть система полностью определенных булевых функций $y = f(x)$ представлена троичной матрицей $U$ и булевой матрицей $V$. Будем считать матрицу $U$ тривиально-секционированной, т.е. каждая $i$-я секция матрицы $U$ содержит ровно одну строку с номером $i$ этой матрицы $(1 \le i \le l)$. Тривиально-секционированная троичная матрица $U$ задает последовательность булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots , v_l(x)$. Булева функция $v_i(x)$ этой последовательности задается строкой с номером $i$ матрицы $U$, где $1 \le i \le l$. Пусть матрица $U'$ состоит из столбцов матрицы $U$, которые помечены переменными из множества $G$, а матрица $U''$ – из столбцов матрицы $U$, которые помечены переменными из множества $G'$. Будем рассматривать каждую из этих троичных матриц как тривиально-секционированную. Положим, что матрица $U'$ задает последовательность булевых функций $v_1^1(u), v_2^1(u), \dots , v_l^1(u)$, а матрица $U''$ – последовательность булевых функций $v_1^2(u'), v_2^2(u'), \dots , v_l^2(u')$. Векторная переменная $u$ состоит из переменных, входящих в множество $G$, а векторная переменная $u'$ – из переменных, входящих в множество $G'$. Очевидно, что $v_i^1(u) \wedge v_i^2(u') = v_i(x)$, где $1 \le i \le l$. Покрытием первой из этих последовательностей является $\pi^1$, второй – $\pi^2$. Тогда покрытие $\pi = \pi^1 \times \pi^2$ является покрытием тривиально-секционированной троичной матрицы $U$. Представим это произведение в виде таблицы $M'$. Строкам таблицы припишем блоки покрытия $\pi^1$, а столбцам – блоки покрытия $\pi^2$. Положим, что элемент таблицы $\mu'_{ij}$, расположенный на пересечении $i$-й строки с $j$-м столбцом, принимает значение «–», если $\pi_i^1(u) \wedge \pi_j^2(u') = 0$, где $\pi_i^1$ – блок покрытия $\pi^1$, приписанный строке с номером $i$ таблицы, $\pi_j^2$ – блок покрытия $\pi^2$, приписанный $j$-му столбцу таблицы. Иначе $\mu'_{ij} = \pi_i^1 \cap \pi_j^2$. Элементы таблицы $M'$, отличные от значения «–», задают множество $\lambda$ (см. определение произведения покрытий). Построим по таблице $M'$ таблицу $M$ следующим образом.

1. Если элемент $\mu'_{ij}$ таблицы $M'$ принимает значение «–», то и элемент $\mu_{ij}$ таблицы $M$ принимает это значение. Если элемент $\mu'_{ij}$ таблицы $M'$ отличен от значения «–», то на пересечении $i$-й строки с $j$-м столбцом таблицы $M$ размещается булев вектор $\mu_{ij}$, который получается покомпонентной дизъюнкцией строк булевой матрицы $V$, номера которых содержатся в подмножестве $\mu'_{ij}$.

2. Если строке (столбцу) с номером $i$ таблицы $M'$ приписан блок $\pi_i^1$ $(\pi_i^2)$, то приписываем строке (столбцу) с номером $i$ таблицы $M$ булеву функцию $\pi_i^1(u)$ $(\pi_i^2(u'))$.

Как показано в работах [2, 3] построенная таким образом таблица $M$ задает систему полностью определенных булевых функций $y = f(x)$. Таблица $M$ называется компактной таблицей, задающей систему $y = f(x)$.

## 2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПО КОМПАКТНОЙ И СОКРАЩЕННОЙ КОМПАКТНОЙ ТАБЛИЦЕ

Припишем каждой строке с номером $i$ таблицы $M$ код $z_i^*$ минимальной длины $s$, являющийся значением векторной переменной $z$. Зададим систему полностью определенных булевых функций $z = h(u)$, положив, что для любого значения $u^*$ векторной переменной $u$ выполняется равенство $z_i^* = h(u^*)$, если и только если $\pi_i^1(u^*) = 1$. Положим, что число строк в таблице $M$ равно $p$, т. е. $p = |\pi^1|$. Зададим множество булевых функций $B = \{b_1(z), b_2(z), \dots , b_p(z)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Для любых $r$, $s$ $(1 \le r \le p, 1 \le s \le p, r \ne s)$ выполняется: $b_r(z) \wedge b_s(z) = 0$.

2. Для всякого значения $z^*$ векторной переменной $z$ в множестве $B$ существует булева функция $b_i(z)$, где $1 \le i \le p$, такая, что $b_i(z^*) = 1$.

3. $b_i(z_i^*) = 1$, где $1 \le i \le p$.

Построим по таблице $M$ таблицу $M''$, заменив всякую булеву функцию $\pi_i^1(u')$, приписанную строке с номером $i$ таблицы $M$, на булеву функцию $b_i(z)$, где $1 \le i \le p$.

Полученная таблица $M''$ в общем случае задает частичную систему булевых функций $g'(z, u')$. Любое доопределение ее неопределенных элементов (со значением «–») приводит к таблице, задающей искомую систему полностью определенных булевых функций $g(z, u')$. Нетрудно показать, что в этом случае имеет место равенство $f(x) = g(z, u')$. Очевидно, что построенная таким образом суперпозиция будет являться полезной декомпозицией системы $y = f(x)$, если сумма чисел булевых компонент в векторных переменных $z$, $u'$ меньше числа компонент в векторной переменной $x$.

Поиск решения задачи декомпозиции, рассматриваемой в настоящей работе, сводится, как это показано в [2, 3], к преобразованию компактной таблицы $M$ к сокращенной компактной таблице $M^T$, также задающей исходную систему $y = f(x)$ и содержащей минимальное или близкое к минимальному число строк. Поиск сокращенной компактной таблицы $M^T$ осуществляется по таблице $M$ посредством совмещения некоторых ее строк.

*Построение сокращенной компактной таблицы.* Будем говорить, что две строки компактной таблицы $M$ несовместимы по столбцу $M_i$, если и только если элементы таблицы, находящиеся на пересечении этого столбца с данными строками, не совпадают и отличны от значения «–». Две строки компактной таблицы $M$ несовместимы, если и только если в ней имеется столбец, по которому они несовместимы. Если две строки таблицы $M$ не являются несовместимыми, то они совместимы. Подмножество строк компактной таблицы совместимо, если и только если совместима любая пара строк, входящая в это подмножество. Если некоторое подмножество строк компактной таблицы совместимо, то элементы таблицы, находящиеся на пересечении этих строк с любым столбцом, можно всегда разделить не более чем на два класса. В первый класс войдут элементы, принимающие значение «–», во второй класс – элементы, отличные от этого значения. При этом все элементы, входящие во второй класс, будут равны между собой.

Найдем на множестве строк компактной таблицы $M$ разбиение $D$, каждый блок которого является совместимым подмножеством строк. Из обозримого множества вариантов таких разбиений выберем то из них, которое содержит наименьшее число блоков. Обозначим это число символом $d$.

По выбранному разбиению и компактной таблице $M$ построим новую таблицу $M^T$. Число строк в этой таблице равно $d$. Строка с номером $q$ $(1 \le q \le d)$ таблицы $M^T$ строится по блоку с номером $q$ разбиения. Элемент $\mu^T_{qj}$ этой строки принимает значение «–», если все элементы компактной таблицы $M$, находящиеся на пересечении строк, входящих в данный блок, с $j$-м столбцом, принимают значение «–». Иначе элемент $\mu^T_{qj}$ равен значению, которое принимают элементы, отличные от значения «–», находящиеся на этом пересечении.

По множеству булевых функций $\{\pi_1^1(u), \pi_2^1(u), \dots, \pi_p^1(u)\}$, приписанных $p$ строкам компактной таблицы $M$, и разбиению $D$ находим множество булевых функций $\{a_1(u), a_2(u), \dots, a_d(u)\}$, приписанных строкам сокращенной компактной таблицы $M^T$. Булева функция $a_j(u)$ $(1 \le j \le d)$ получается дизъюнкцией булевых функций из множества $\{\pi_1^1(u), \pi_2^1(u), \dots, \pi_p^1(u)\}$, номера которых входят в блок с номером $j$ разбиения $D$. Строкам сокращенной компактной таблицы $M^T$ приписываем коды минимальной длины $s$ в виде значений векторной переменной $z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$. Если $s + |G'| \ge |X|$, то рассматриваемая в настоящей работе задача декомпозиции по заданным множествам $G$, $G'$ решения не имеет. Иначе по этим кодам и множеству булевых функций $\{a_1(u), a_2(u), \dots, a_d(u)\}$ находим систему $z = h(u)$, где переменная $z$ принимает значение кода $i$-ой строки таблицы $M^T$ на тех значениях переменной $u$, на которых функция $a_i(u)$ обращается в единицу $(1 \le i \le d)$.

В работах [2, 3] показано, что полезная декомпозиция (если она существует), полученная по таблице $M^T$, является решением рассматриваемой в настоящей работе задачи декомпозиции.

*Пример* 1. Пусть система булевых функций $y = f(x)$ задана матрицами

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 0 & 0 & - \\ - & - & 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ 0 & 0 & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & 0 & 0 & - \\ 1 & - & 0 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad V = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

При этом $G = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $G' = \{x_4, x_5, x_6\}$. По подмножествам $G$, $G'$ и матрице $U$ построим матрицы

$$U' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 0 \\ - & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ - & 1 & - & 0 \\ 1 & - & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \qquad U'' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & - \\ 1 & - & 0 \\ 0 & 1 & - \\ 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & - \\ 1 & - & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Рассматривая эти матрицы, как тривиально-секционированные, найдем для каждой из них соответственно покрытия $\pi^1$, $\pi^2$, где $\pi^1 = \{\pi_1^1 = \varnothing$, $\pi_2^1 = \overline{4}$, $\pi_3^1 = \overline{2,4}$, $\pi_4^1 = \overline{5}$, $\pi_5^1 = \overline{2}$, $\pi_6^1 = \overline{1}$, $\pi_7^1 = \overline{6}$, $\pi_8^1 = \overline{3,5}\}$,
$\pi_1^1(u) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$, $\pi_2^1(u) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4$,
$\pi_3^1(u) = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4$, $\pi_4^1(u) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$,
$\pi_5^1(u) = x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$, $\pi_6^1(u) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$,
$\pi_7^1(u) = x_1\bar{x}_3 x_4$, $\pi_8^1(u) = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$, $\pi^2 = \{\pi_1^2 = \overline{1,5}$, $\pi_2^2 = \overline{3}$, $\pi_3^2 = \overline{2}$, $\pi_4^2 = \overline{4,6}\}$, $\pi_1^2(u') = \bar{x}_4\bar{x}_5$,
$\pi_2^2(u') = \bar{x}_4 x_5$, $\pi_3^2(u') = x_4\bar{x}_6$, $\pi_4^2(u') = x_4 x_6$,
$u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u' = (x_4, x_5, x_6)$. Для системы $y = f(x)$ построим таблицу $M'$ (таблица 1).

Таблица 1

| | $\pi_1^2$ | $\pi_2^2$ | $\pi_3^2$ | $\pi_4^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi_1^1$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $\pi_2^1$ | – | – | $\varnothing$ | $\overline{4}$ |
| $\pi_3^1$ | – | – | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ |
| $\pi_4^1$ | $\overline{5}$ | $\varnothing$ | – | – |
| $\pi_5^1$ | – | – | $\overline{2}$ | $\varnothing$ |
| $\pi_6^1$ | $\overline{1}$ | $\varnothing$ | – | – |
| $\pi_7^1$ | – | – | $\varnothing$ | $\overline{6}$ |
| $\pi_8^1$ | $\overline{5}$ | $\overline{3}$ | – | – |

Таблица 2

| | $\pi_1^2(u')$ | $\pi_2^2(u')$ | $\pi_3^2(u')$ | $\pi_4^2(u')$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_1^1(u)$ | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) | 1 |
| $\pi_2^1(u)$ | – | – | (0,0) | (1,1) | 2 |
| $\pi_3^1(u)$ | – | – | (0,1) | (1,1) | 3 |
| $\pi_4^1(u)$ | (1,0) | (0,0) | – | – | 4 |
| $\pi_5^1(u)$ | – | – | (0,1) | (0,0) | 5 |
| $\pi_6^1(u)$ | (0,1) | (0,0) | – | – | 6 |
| $\pi_7^1(u)$ | – | – | (0,0) | (1,1) | 7 |
| $\pi_8^1(u)$ | (1,0) | (1,0) | – | – | 8 |

Нетрудно проверить, что элементы таблицы $M'$, отличные от значения «–», задают множество $\lambda$ (см. определение произведения покрытий). По таблице $M'$ построим компактную таблицу $M$ (табл. 2). Граф несовместимости строк таблицы $M$ состоит из следующих ребер: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,3), (2,5), (3,5), (3,7), (4,6), (4,8), (5,7), (6,8). Раскраска его вершин дает следующее разбиение на множестве номеров строк таблицы $M$: $\{\overline{1};\ \overline{2,4,7};\ \overline{3,6};\ \overline{5,8}\}$. Каждый блок разбиения содержит номера совместимых строк. По этому разбиению построим сокращенную компактную таблицу $M^T$ (таблица 3). В этой таблице
$a_1(u) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$,
$a_2(u) = \bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$,
$a_3(u) = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$,
$a_4(u) = x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$. Припишем строкам этой таблицы соответственно коды $z_1^* = (0,0)$, $z_2^* = (0,1)$, $z_3^* = (1,0)$, $z_4^* = (1,1)$, являющиеся значениями векторной переменной $z = (z_1, z_2)$.

Таблица 3

| | $\pi_1^2(u')$ | $\pi_2^2(u')$ | $\pi_3^2(u')$ | $\pi_4^2(u')$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1(u)$ | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) |
| $a_2(u)$ | (1,0) | (0,0) | (0,0) | (1,1) |
| $a_3(u)$ | (0,1) | (0,0) | (0,1) | (1,1) |
| $a_4(u)$ | (1,0) | (1,0) | (0,1) | (0,0) |

Таблица 4

| | $\pi_1^2(u')$ | $\pi_2^2(u')$ | $\pi_3^2(u')$ | $\pi_4^2(u')$ |
|---|---|---|---|---|
| $b_1(z)$ | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (0,0) |
| $b_2(z)$ | (1,0) | (0,0) | (0,0) | (1,1) |
| $b_3(z)$ | (0,1) | (0,0) | (0,1) | (1,1) |
| $b_4(z)$ | (1,0) | (1,0) | (0,1) | (0,0) |

Система полностью определенных булевых функций $z=h(u)$ задается матрицами

$$U_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 1 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & - & 0 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad V_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} z_1 & z_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Положим, что $b_1(z) = \bar{z}_1\bar{z}_2$, $b_2(z) = \bar{z}_1 z_2$, $b_3(z) = z_1\bar{z}_2$, $b_4(z) = z_1 z_2$. Тогда система булевых функций $g(z,u')$ будет задана таблицей $M''$ (таблица 4). По этой таблице легко находится матричное представление этой системы.

## 3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПО СТОЛБЦАМ КОМПАКТНОЙ ТАБЛИЦЫ

Как было показано выше декомпозиция системы $y = f(x)$ предлагаемым методом выполняется в два этапа. Вначале по троичной матрице $U$ и подмножествам $G$, $G'$, удовлетворяющим неравенствам $|G| < |X|$, $|G'| < |X|$, строится компактная таблица $M$, задающая систему $f(x)$. Затем по таблице $M$ строится сокращенная компактная таблица $M^T$, по которой и находится искомая декомпозиция, если она существует. При этом таблица $M$ нужна только для того, чтобы определить какие неупорядоченные пары строк этой таблицы являются совместимыми или не совместимыми. На основании этой информации находится разбиение множества строк компактной таблицы, по которому строится сокращенная компактная таблица. Нахождение множества несовместимых пар строк компактной таблицы $M$, которое обозначим $K$, можно осуществить без построения самой таблицы, например, следующим образом.

1. Полагаем, что $K = \varnothing$. Переходим в пункт 2.
2. Последовательно перебираем блоки покрытия $\pi^2$. По очередному блоку $\pi_j^2$ покрытия $\pi^2$, а также покрытию $\pi^1$ строится один столбец $M_j$ компактной таблицы $M$. Построение этого столбца выполняется по тому же методу, что и построение компактной таблицы. Только вместо покрытия $\pi^2$ рассматривается один блок $\pi_j^2$. Находим множество $K_j$ неупорядоченных пар строк матрицы $M$, несовместимых по столбцу $M_j$. Добавляем в множество $K$ все пары из множества $K_j$. Если все блоки покрытия $\pi^2$ перебраны, то переходим в пункт 3.
3. Множество $K$ содержит несовместимые пары строк компактной таблицы $M$.

*Пример* 2. Вычислим множество $K$ для системы булевых функций, рассматриваемой в примере 1. Выбираем первый блок $\pi_1^2$ из покрытия $\pi^2$. По нему строим столбец $M_1$ компактной таблицы $M$. Находим, что $K_1 = \{(1,4), (1,6), (1,8), (4,6), (6,8)\}$, $K = K_1$. Выбираем второй блок $\pi_2^2$ из покрытия $\pi^2$. По нему строим столбец $M_2$ компактной таблицы $M$, $K_2 = \{(1,8), (4,8), (6,8)\}$, $K = K_1 \cup K_2$. Аналогично находим множества $K_3 = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,7), (5,7)\}$, $K_4 = \{(1,2), (1,3), (1,7), (2,5), (3,5), (5,7)\}$, $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$.

После вычисления множества $K$ выполнение декомпозиции осуществляется следующим образом.

Множество $K$ можно интерпретировать как задание некоторого графа перечислением его ребер. Тогда с помощью раскраски [6] по множеству $K$ находится разбиение $D$ строк компактной таблицы, состоящее из наименьшего числа $d$ блоков. Так же, как показано выше, по множеству булевых функций $\{\pi_1^1(u), \pi_2^1(u), \dots, \pi_p^1(u)\}$, приписанных $p$ строкам компактной таблицы $M$, и разбиению $D$ находим множество булевых функций $\{a_1(u), a_2(u), \dots, a_a(u)\}$, приписанных строкам сокращенной компактной таблицы $M^T$, и так же определяем векторную функцию $z = h(u)$. Далее по заданным кодам находим булевы функции $\{b_1(z), b_2(z), \dots, b_a(z)\}$, удовлетворяющие выше приведенным условиям. Тем самым будут найдены булевы функции, приписанные строкам таблицы $M''$, которая задает систему $g(z, u')$. Для записи этой системы в матричном виде надо иметь таблицу $M''$. Однако нет необходимости строить ее всю. Можно, как и в случае формирования множества $K$, ограничится лишь перебором столбцов этой матрицы.

Обозначим через $W$ и $Q$ матрицы, которыми должна быть задана искомая система $g(z, u')$. Матрица $W$ – троичная, а $Q$ – булева. Их построение осуществляется следующим образом. Вначале полагаем, что матрицы $W$, $Q$ пусты, то есть они не содержат ни одной строки.

Выбираем любой один блок $\pi_j^2$ из покрытия $\pi^2$. По этому блоку, а также покрытию $\pi^1$ строится один столбец $M_j$ компактной таблицы $M$. Построение этого столбца выполняется также как и при формировании множества $K$.

По столбцу $M_j$ и разбиению $D$ строим столбец $M_j^T$ сокращенной компактной таблицы $M^T$. Это построение выполняется так же, как и построение сокращенной компактной таблицы $M^T$ по разбиению $D$ и компактной таблице $M$.

Обозначим через $Y_j^*$ множество различных отличных от значения «–» ненулевых элементов столбца $M_j^T$ (нулевым считаем булев вектор, все компоненты которого состоят из нулей). Для каждого элемента $y_k^*$ из множества $Y_j^*$ построим подмножество $\beta_k$ множества булевых функций $\{b_1(z), b_2(z), \dots, b_d(z)\}$. Булева функция $b_i(z)$ $(1 \le i \le a)$ включается в подмножество $\beta_k$, если и только если элемент множества $Y_j^*$, расположенный в $i$ строке столбца $M_j^T$, равен $y_k^*$. В множество $\beta_k$ можно включить и булеву функцию $b_i(z)$, если элемент множества $Y_j^*$ принимает значение «–».

Для очередного множества $\beta_k$ находим булеву функцию $\eta_k(z)$, равную дизъюнкции входящих в него булевых функций. Представим в виде троичной матрицы $T_k$ булеву функцию $\eta_k(z) \wedge \pi_j^2(u')$. Положим, что эта матрица состоит из $t$ строк. Строки троичной матрицы $T_k$ добавляем в матрицу $W$. В матрицу $Q$ добавляем в качестве строк $t$ булевых векторов $y_k^*$. Этот процесс повторяем для всех значений $y_k^*$ из множества $Y_j^*$.

После перебора всех векторов $y_k^*$ из $Y_j^*$ процесс формирования матриц $W$, $Q$ по элементу $\pi_j^2$ покрытия $\pi^2$ завершается. Выбираем из покрытия $\pi^2$ следующий блок из тех, что не были рассмотрены ранее. Для этого блока повторяем всю вышеописанную процедуру формирования матриц $W$, $Q$. Процесс формирования этих матриц завершаем после просмотра всех блоков покрытия $\pi^2$. Очевидно, что построенные матрицы $W$, $Q$ задают систему $g(z, u')$ искомой декомпозиции.

При построении матриц $W$, $Q$ также как и множества $K$ нет необходимости хранить все покрытие $\pi^2$. Достаточно перебирать его по блокам.

*Пример* 3. Рассмотрим процесс построения матриц $W$, $Q$, задающих систему $g(z, u')$, которая задана табл. 4. Начнем процесс последовательного перебора блоков из покрытия $\pi^2$. Выберем блок $\pi_1^2$. По этому блоку, покрытию $\pi^1$ и разбиению строк компактной таблицы найдем первый столбец табл. 4. Для этого столбца получим $y_1^* = (1,0)$, $y_2^* = (0,1)$. Построим для этих векторов $\beta_1 = \{b_2(u), b_4(u)\}$, $\beta_2 = \{b_3(u)\}$, $\eta_1(z) = z_2$, $\eta_2(z) = z_1\bar{z}_2$, $\eta_1(z) \wedge \pi_1^2(u') = z_2\bar{x}_4\bar{x}_5$, $\eta_2(z) \wedge \pi_1^2(u') = z_1\bar{z}_2\bar{x}_4\bar{x}_5$. Матрицы $T_1$ и $T_2$ состоят из одной строки. Матрица $T_1$ состоит из строки (**– 1 0 0 –**), а матрица $T_2$ – из строки (**1 0 0 0 –**). Соответственно найдем

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array}, \quad Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Из покрытия $\pi^2$ выберем блок $\pi_1^2$, и т. д. Окончательно получим

$$W = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & - \\ 1 & 1 & 0 & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 0 \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & 0 & 1 & - & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

## 4. МЕТОД ПЕРЕБОРА ПО БЛОКАМ ПОКРЫТИЯ СЕКЦИОНИРОВАННОЙ ТРОИЧНОЙ МАТРИЦЫ

При реализации данного метода декомпозиции также нет необходимости хранить все покрытие $\pi^2$. Достаточно уметь для выполнения очередного шага метода вычислять очередной блок этого покрытия.

Пусть секционированная троичная матрица $C = (U, \alpha)$ задает последовательность булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$. Обозначим через $F$ множество булевых функций, входящих в эту последовательность. Положим, что $\pi$ является покрытием матрицы $C$. Обозначим через $P$ некоторое подмножество блоков покрытия $\pi$, а через $P(x)$ – булеву функцию, полученную дизъюнкцией булевых функций, приписанных блокам, входящим в подмножество $P$. По последовательности булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$ и подмножеству $P$ построим новую последовательность булевых функций $\delta_1(x) = v_1(x) \wedge \overline{P(x)}$, $\delta_2(x) = v_2(x) \wedge \overline{P(x)}$, …, $\delta_s(x) = v_s(x) \wedge \overline{P(x)}$.

По покрытию $\pi$ построим покрытие $\pi'$. Для этого положим, что всякий блок $\pi_j$ покрытия $\pi$, отличный от пустого блока и не входящий в подмножество $P$, включается в покрытие $\pi'$. Пусть в покрытии $\pi$ блок $\pi_r$ является пустым, т.е. $\pi_r = \varnothing$. Тогда в покрытие $\pi'$ добавляем пустой блок, которому приписываем булеву функцию $\pi_r(x) \vee P(x)$. Если в покрытии $\pi$ нет пустого блока, то в покрытие $\pi'$ добавляем пустой блок, которому приписываем булеву функцию $P(x)$.

Рассмотрим несколько усиленное утверждение, взятое из работы [4]. Доказательство этого утверждения точно такое же, как и доказательство аналогичного утверждения из указанной работы.

*Утверждение* 1. Покрытие $\pi'$ является покрытием последовательности булевых функций $\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_s(x)$.

Назовем блок $\pi_i$ покрытия $\pi$ максимальным, если и только если в покрытии π не существует блока $\pi_j$ $(i \neq j)$ такого, что $\pi_i \subset \pi_j$.

Некоторое подмножество $F' \subseteq F = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)\}$ булевых функций назовем совместимым, если и только если конъюнкция булевых функций, входящих в это подмножество, не равна нулю. Иначе подмножество $F'$ называется не совместимым. Подмножество совместимых булевых функций $F'$ назовем максимальным, если и только если добавление в это подмножество любой булевой функции из $F$, не входящей в $F'$, делает его несовместимым.

Каждому блоку $\pi_i$ покрытия $\pi$ соответствует некоторое подмножество $F_i$ множества $F$ булевых функций. Булева функция $v_j(x) \in F$ включается в подмножество $F_i$, если и только если $j \in \pi_i$.

Обозначим через $R$ некоторое подмножество множества $F$. Положим, что $I(R) = \{i \,/\, v_i(x) \in R\}$. Обозначим через $R(x)$ булеву функцию, равную конъюнкции булевых функций, входящих в множество $R$.

*Утверждение* 2. Подмножество $R$ является совместимым и максимальным подмножеством множества $F$, если и только если в покрытии $\pi$ существует максимальный блок $\pi_j$ такой, что $F_j = R$ и $\pi_j(x) = R(x)$.

*Доказательство. Необходимость.* Положим, что подмножество $P$ является совместимым и максимальным подмножеством множества $F$. Докажем, что в покрытии $\pi$ существует максимальный блок $\pi_j$ такой, что $F_j = R$ и

$\pi_j(x) = R(x)$. Множество $R$ совместимо, поэтому существует хотя бы одно значение $x^*$ векторной переменной $x$ такое, что $R(x^*) = 1$. Множество $R$ максимально, поэтому $I(R) = t(x^*, C)$, где $C = (U, \alpha)$ является секционированной троичной матрицей, задающей последовательность булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$. Следовательно, существует блок $\pi_j = t(x^*, C)$ покрытия $\pi$, удовлетворяющий условиям утверждения.

*Достаточность*. Пусть в покрытии $\pi$ блок $\pi_j$ является максимальным. Докажем, что подмножество $F_j$ является совместимым и максимальным. Рассмотрим некоторое значение $x^*$ векторной переменной $x$ такое, что $\pi_i(x^*) = 1$. По определению блока $\pi_i$ покрытия $\pi$ для всякой булевой функции $v_j(x) \in F_i$ выполняется равенство $v_j(x^*) = 1$. Это означает что, подмножество $F_i$ совместимо. Если блок $\pi_i$ максимальный, то не существует другого блока $\pi_j$ $(i \neq j)$ покрытия $\pi$ такого, что $\pi_i \subset \pi_j$. Следовательно, не существует другого совместимого подмножества $F_j$ множества $F$, такого, что $F_i \subset F_j$.

На основании утверждений 1 и 3 можно предложить следующий простой метод перебора по блокам покрытия секционированной троичной матрицы.

Находим одно любое совместимое максимальное подмножество $R$ булевых функций из множества $F$. Согласно утверждению 2 этому подмножеству соответствует максимальный блок $\pi_j = I(R)$ покрытия $\pi$, причем $\pi_j(x) = R(x)$. Первый блок покрытия $\pi$ найден. Полагаем, что $P = \{\pi_j\}$ и по утверждению 1 строим по последовательности булевых функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)$ последовательность $\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_s(x)$. Из этой последовательности удаляем булевы функции равные нулю. Если после этого последовательность окажется пустой, то процесс перебора блоков покрытия $\pi$ завершен. Иначе полагаем, что $F_1 = \{\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_s(x)\}$. В множестве $F_1$ находим одно любое совместимое максимальное подмножество $R_1$ булевых функций, и по нему вычисляем второй блок покрытия $\pi$, равный $I(R_1)$. Булева функция, приписанная этому блоку, равняется $R'(x)$. Полагаем, что $P = \{I(R_1)\}$. По последовательности булевых функций $\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_s(x)$ строим новую последовательность булевых функций и т. д. Процесс перебора завершается после того, как очередная построенная последовательность булевых функций окажется пустой.

Таким образом, будут перебраны все блоки покрытия $\pi$, отличные от пустого. Проверка того, что покрытие $\pi$ содержит пустой блок, выполняется отдельно. Очевидно, что если троичная матрица $U$, входящая в секционированную троичную матрицу $C = (U, \alpha)$, задает булеву функцию, тождественно равную единице, то пустое множество не является блоком покрытия $\pi$. Иначе пустое множество является блоком $\pi_c$ покрытия $\pi$ и булева функция $\pi_c(x)$ равна инверсии булевой функции, заданной матрицей $U$.

Рассмотрим способ построения максимального совместимого подмножества булевых функций. Сформируем подмножество $R$ множества $F = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_s(x)\}$ следующим образом.

Выбираем любую булеву функцию $v_k(x)$ $(1 \le k \le s)$ из множества $F$, и полагаем, что $R = \varnothing$, $R(x) = v_k(x)$. Последовательно перебираем булевы функции из множества $F$. Для очередной булевой функции $v_i(x)$ находим произведение $v_i(x) \wedge R(x)$. Если это произведение равно нулю, то выбираем следующую булеву функцию из $F$. Иначе включаем $v_i(x)$ в множество $R$. Полагаем, что $R(x)$ равно произведению булевых функций, включенных $R$. Выбираем следующую булеву функцию из $F$, и т. д. Процесс завершаем, если все булевы функции из $F$ перебраны.

*Утверждение* 3. Подмножество $R$ множества $F$, сформированное вышеописанным способом, является совместимым и максимальным.

*Доказательство*. Непосредственно из способа построения подмножества $R$ следует, что оно не может быть пустым, если не пусто множество $F$, и оно совместимо. Положим, что подмножество $R$ не является максимальным. Тогда в $F$ имеется булева функция $v_j(x)$, не входящая в $R$, такая, что $v_j(x) \wedge R(x) = 1$. В этом случае произведение этой булевой функции с любым подмножеством булевых функций из $R$ также равно единице. Однако при формировании подмножества $R$ эта булева функция не была включена в него, так как произведение этой булевой функции с некоторым подмножеством булевых функций из $R$ оказалось равным нулю. Следовательно, подмножество $R$ является максимальным.

*Пример* 4. Проведем последовательный перебор блоков покрытия $\pi^2$ из примера 1. Тривиально-секционированная матрица $U''$ задает последовательность булевых функций $v_1^2(x) = \bar{x}_4\bar{x}_5$, $v_2^2(x) = x_4\bar{x}_6$, $v_3^2(x) = \bar{x}_4 x_5$, $v_4^2(x) = x_4 x_6$, $v_5^2(x) = \bar{x}_4\bar{x}_5$, $v_6^2(x) = x_4 x_6$, покрытием которой и является $\pi^2$. Вычислим первый максимальный блок этого покрытия. Для этого выделим по приведенному выше методу в множестве $F = \{v_1^2(x), v_2^2(x), \dots, v_6^2(x)\}$ максимально совместимое подмножество $R$. Положим, что $R = \varnothing$ и $R(x) = v_1^2(x)$. Последовательно перебирая элементы множества $F$, убедимся, что $R(x) \wedge v_1^2(x) \neq 0$. Добавим в $R$ функцию $v_1^2(x)$, тогда $R(x) = v_1^2(x)$. Продолжая перебор элементов множества $F$, установим, что $R(x) \wedge v_2^2(x) = 0$, $R(x) \wedge v_3^2(x) = 0$, $R(x) \wedge v_4^2(x) = 0$, $R(x) \wedge v_5^2(x) \neq 0$. Добавим в $R$ функцию $v_5^2(x)$, $R(x) = v_1^2(x) \wedge v_5^2(x)$. Заканчивая перебор, найдем, что $R(x) \wedge v_6^2(x) = 0$. Таким образом, $R = \{v_1^2(x), v_5^2(x)\}$. Следовательно, найден максимальный блок $\pi_1^2 = \{1,5\}$ покрытия $\pi^2$. При этом $\pi_1^2(x) = v_1^2(x) \wedge v_5^2(x) = \bar{x}_4\bar{x}_5$. Построим последовательность булевых функций $\delta_1(x) = 0$, $\delta_2(x) = x_4\bar{x}_6$, $\delta_3(x) = \bar{x}_4 x_5$, $\delta_4(x) = x_4 x_6$, $\delta_5(x) = 0$, $\delta_6(x) = x_4 x_6$. Из этой последовательности удалим функции $\delta_1(x)$, $\delta_5(x)$ так как они равны нулю. По полученной последовательности $\delta_2(x)$, $\delta_3(x)$, $\delta_4(x)$, $\delta_6(x)$ найдем следующий максимальный блок покрытия $\pi^2$ и т. д.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Perkowski M.A., Grygiel S., et al. A Survey of Literature on Function Decomposition. Version IV // Portland State Univ. Report, Nov. 1995.

2. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. Компактные таблицы и их использование при декомпозиции систем полностью определенных булевых функций // Идентификация образов. Вып.2. – Минск: Ин-т техн. Кибернетики НАН Беларуси, 2001. – С. 107-120.
3. Pottosin Yu., Shestakov E. Decomposition of systems of completely specified Boolean functions using their compact table representation // Boolean Problems. 4th International Workshop. – Freiberg (Sachen), 2000. – P. 135-142
4. Поттосин Ю.В., Шестаков Е.А. Ортогонализация системы полностью определенных булевых функций // Логическое проектирование. Вып.5. – Минск: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 2000. – С. 107-115.
5. Закревский А.Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
6. Шнейдер А.А. Классификация и анализ эвристических алгоритмов раскраски вершин графа // Кибернетика. – 1984. – № 4. – С. 15-22.

УДК 681.3

***Головко В.А., Трики Ч., Савицкий Ю.В.***

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

## ВВЕДЕНИЕ

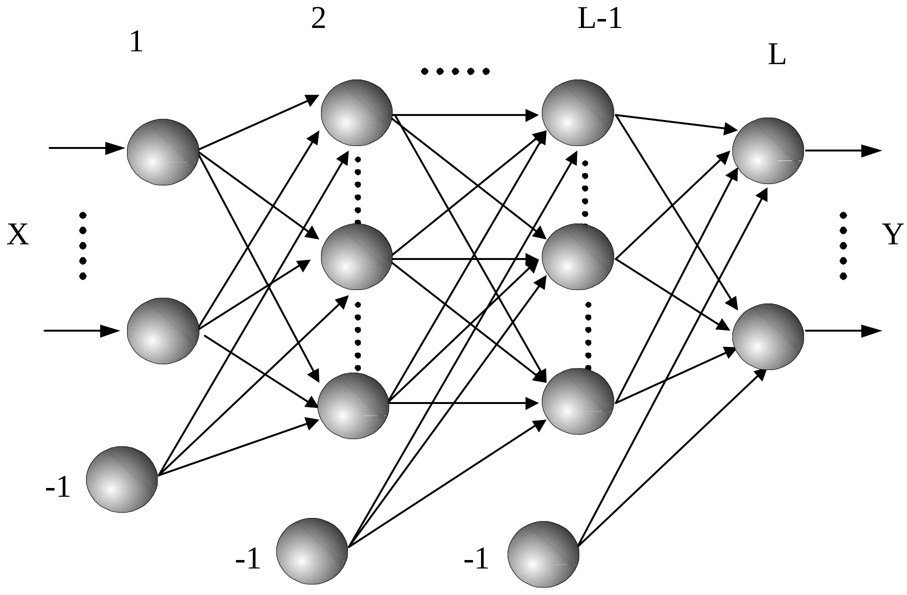
Один из основных факторов, определяющих увеличение темпов развития и эффективности практического использования интеллектуальных систем обработки информации в различных областях знаний, является наличие высокопроизводительных вычислительных средств и соответствующих алгоритмов обработки, позволяющих сократить временную сложность процессов обработки. Общий метод увеличения производительности – организация параллельной обработки, т.е. одновременное решение задач или совмещение во времени этапов решения одной задачи. Реализация метода возможна только при наличии нескольких обрабатывающих устройств в составе вычислительной системы, способных функционировать параллельно. При этом используются те или иные особенности задач или потоков задач, что позволяет осуществить тот или иной параллелелизм.

Многослойные нейронные сети с прямым распространением информации (Multilayer Perceptron, MLP) представляют собой регулярную структуру, состоящую из соединенных между собой синаптическими связями нейронных элементов, которые функционируют по единому алгоритму вычисления выходной активности вектора сигналов, поступающих на вход сети. Процесс обучения MLP по методу обратного распространения ошибки (Back Propagation Error, BPE [1]) также состоит из выполнения совокупности однотипных итерационных процедур модификации синаптических связей каждого нейроэлемента сети. Следует также отметить, что серьезным ограничением нейросетевых технологий является высокая вычислительная и временная сложность градиентных процедур обучения, зависящая как от размеров обучающих множеств, так и от количества нейронных элементов сети [1].

Очевидно, что исходя из структуры, функционирования и обучения существуют необходимость и условия для проектирования параллельных нейросетевых алгоритмов для многокомпонентных вычислительных архитектур.

## 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПАРАЛЛЕЛИЗАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Одним из наиболее распространенных типов параллелелизма является *параллелелизм независимых ветвей*. Суть его заключается в том, что при решении большой задачи могут быть выделены отдельные независимые части (ветви про-




***Головко Владимир Адамович.*** *К.т.н., профессор каф. ЭВМ и систем Брестского государственного технического университета,зав. лабораторией Искусственных нейронных сетей.*
***Трики Чефи.*** *Профессор университета г. Калабрии (Италия), факультет Электроники, информатики и систем.*
***Савицкий Юрий Викторович.*** *К.т.н., доцент кафедры ЭВМ и систем Брестского государственного технического университета.*