

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right] n_j = \frac{1+\nu}{E} q_i(x_L) + \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \cdot n_i, \quad (14)$$

которые совместно с уравнением теплопроводности (1) при определенных начальных и граничных условиях описывают изменение в пространстве и во времени поля перемещений и температурного поля. В выражениях (13) и (14)  $\theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ ,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $n_j$  – вектор внешней нормали к контуру  $L$  тела,  $q_i(x_L)$  – вектор поверхностных сил.

Аналитическое решение уравнения (13) для любой геометрии области чрезвычайно сложно. С помощью теории потенциала дифференциальные уравнения в частных производных заменяются интегральными уравнениями, которые удобны для численной реализации. Краевая задача в виде (13) сводится к задаче изотермической теории упругости.

Влияние неравномерности температуры по области  $L^\pm$  может быть учтено в уравнениях изотермической теории упругости в перемещениях как действие поверхностных сил с потенциалом

$$n = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T (T - T_0), \quad (15)$$

что свидетельствует о том, что нагревание области до температуры  $T$  создает в теле такие же перемещения, что и распределение нагрузки на границе области с интенсивностью  $\phi = \Pi$ .

Решение упругой задачи для плоских областей достаточно хорошо исследовано и не представляет особого интереса. Основной проблемой является нахождение температурных добавок перемещений и напряжений. Для определения эквивалентных нестационарным температурам поверхностных нагрузок необходимо определить  $grad T$ . В случае полярных координат вычисляется величина

$$\chi = \frac{\partial T}{\partial \rho} \quad (16)$$

с учетом соотношения (11). Учитывая, что потенциал двойного слоя зависит только от расположения параметрической

УДК 536.212: 519.6

**Веремейчик А.И.**

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА “МАТЕМАТИКА”

В инженерной практике часто встречаются задачи, когда необходимо определить распределение температурных полей в случае зависимости распространения теплоты как от координат, так и от времени. Для этого необходимо решить задачу теплопроводности [1]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T, \quad (1)$$

точки  $P_0$ , производную (16) можно вычислять только по координатам точки  $P_0$ , и величина  $\chi$  определяется как частная производная потенциала двойного слоя по координате  $\rho_0$

$$\chi = \frac{\partial W(P_0, t)}{\partial \rho_0}. \quad (17)$$

В результате решение системы ДУ задачи термоупругости (13) можно представить как сумму общего решения однородного ДУ  $u_i^u$  и частного решения  $u_i^T$

$$u_i = u_i^u + u_i^T, \quad (18)$$

причем частное решение в форме предложенной Гудьером [6], определяется как градиент некоторой бигармонической функции  $W$

$$u^T = grad W. \quad (19)$$

Тогда напряжения задачи (13) определяются как

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^u + \sigma_{ij}^T. \quad (20)$$

Здесь тензор  $\sigma_{ij}^u$  соответствует  $u_i^u$ , а  $\sigma_{ij}^T$  – вектору  $u_i^T$ .

Следует также отметить, что решение задачи термоупругости производится одинаково независимо от граничных условий задачи теплопроводности, что делает используемый метод для определения напряжений и деформаций универсальным и позволяет проводить решение (1) и (13) независимо друг от друга.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. - 1967.
2. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т.Круза и Ф.Риццо. - М.: Мир. - 1978.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности: Уч. пособие для вузов. – М.: Высшая школа. - 1978.
4. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики М.:Наука. – 1966.
5. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир. - 1975. – С. 872.
6. Хвисевич В.М. Интегральные уравнения плоской краевой задачи нестационарной термоупругости методом потенциала.// Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. – № 2. – С.48-51.

является определение температуры для областей прямоугольной формы. Рассмотрим решение краевой задачи для прямоугольной пластины размерами  $b \times h$ . Математически задача формулируется в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad t > 0, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < h. \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = f(x, y),$$

$$T(0, y, t) = T_1, \quad T(b, y, t) = T_2, \quad T(x, 0, t) = T_1,$$

$$T(x, h, t) = T_1.$$

Решение такой краевой задачи удобно проводить аналитически с использованием метода Фурье.

Т.к. на левой и правой гранях области температуры различны, то вдоль горизонтальной оси будет происходить распределение температуры и решение (2) можно разыскивать в виде:

$$T(x, y, t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b} x + \varphi(x, y, t), \quad (3)$$

где  $\varphi(x, y, t)$  - некоторая неизвестная функция.

Выражение (3) удовлетворяет одновременно и граничным условиям задачи, и ДУ (1). Дифференцируя (3) по координатам и времени и подставляя полученные производные в (2), получаем ДУ для определения  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

Решение (4) в соответствии с методом Фурье ищем в виде произведения 2-х функций, одна из которых  $P(t)$  зависит только от времени, другая  $F(x, y)$  - только от координат:

$$\varphi = P(t) F(x, y). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и разделяя переменные, получаем:

- для функции  $T(t)$ :

$$P' + a\lambda^2 P = 0, \quad P(0) = T_c. \quad (6)$$

- для функции  $F(x, y)$  задачу в виде уравнения Поля:

$$\nabla^2 F + \lambda^2 F = 0 \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$F(0, y) = 0, \quad F(h, y) = 0, \quad F(x, 0) = 0, \quad F(x, h) = 0. \quad (8)$$

В уравнениях (7) и (8)  $\lambda$  - некоторая постоянная, которая определяется из граничных условий ( $\lambda > 0$ ).

Таким образом, решение задачи теплопроводности с ненулевыми граничными условиями сводится к решению двух однородных ДУ и определяется геометрической формой тела, начальным распределением температуры и условиями теплообмена тела с окружающей средой.

Решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$P(t) = Ce^{-a\lambda^2 t}, \quad (9)$$

где  $C$  - неизвестная постоянная, которая зависит от начальных условий задачи.

Для решения краевой задачи (7, 8) применяем разделение переменных  $x$  и  $y$ , т.е. ДУ в частных производных

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda^2 F = 0$$

представляется произведением

двух функций  $X(x)$  и  $Y(y)$ . Дифференцируя  $F(x, y) = X(x)Y(y)$  и подставляя полученные произ-

водные в (5), сводим рассматриваемую краевую задачу к решению двух ДУ

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad (11)$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0$$

с нулевыми граничными условиями  $Y(0) = 0, Y(h) = 0, X(0) = 0, X(b) = 0$ . Необходимо

также учитывать, что  $\mu^2 + \nu^2 = \lambda^2$ .

Общее решение ДУ (9) при положительных  $\mu$  можно записать в виде:

$$X(x) = A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x, \quad (13)$$

$$Y(y) = B_1 \cos \nu y + B_2 \sin \nu y,$$

где  $A_1, A_2, B_1$  и  $B_2$  - неизвестные константы, которые определяются из граничных условий. Очевидно, из условия  $X(0) = 0$ :  $A_1 = 0$ . При  $X(b) = 0$  имеем:

$A_2 \sin \mu x = 0$ . Т.к.  $A_2 \neq 0$ , то  $\sin \mu x = 0$ . Поэтому нетривиальные решения (11) возможны лишь при значениях

$$\mu = \mu_n = \frac{\pi n}{b}, \quad (14)$$

где  $n$  - любое целое число. Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n = A_n \sin \frac{\pi n}{b} x, \quad (15)$$

где  $A_n$  - произвольная постоянная.

Аналогичный подход позволяет определить собственные функции второго уравнения (13):

$$Y_m = B_m \sin \frac{\pi m}{h} y, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Окончательно получаем выражение для  $\varphi$ :

$$\varphi = C_{n,m} e^{-\lambda_{n,m}^2 a t} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{h} y, \quad (17)$$

$$\text{где } \lambda_{n,m}^2 = \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{h} \right)^2.$$

Неизвестные коэффициенты ряда Фурье (17) определяют с применением конечного синус - преобразования Фурье [2]:

$$C_{n,m} = \frac{4}{bh} \int_0^b \int_0^h f(x, y) \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{h} y dx dy. \quad (18)$$

Решение интегрального уравнения (18) при постоянном начальном распределении температуры  $f(x, y) = T_0$  имеет следующий вид:

$$C_{n,m} = \frac{16T_0}{\pi^2 nm}, \quad n, m = 1, 3, 5, \dots \quad (19)$$

Так как  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} C_{n,m} = 0$ , то бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16T_0}{\pi^2 nm} e^{-\pi^2 \left( \frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{h^2} \right) a t} \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{h} y \quad (20)$$

равномерно сходится в области  $t \geq 0, 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h$  согласно признаку Дирихле.

Таблица 1 – Термические свойства некоторых металлов

Вещество	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Удельная теплоемкость $c$ , Дж/(кг·°C)	Коэффициент теплопроводности $\lambda$ , Вт/(м·°C)	Коэффициент температуропроводности $a \cdot 10^5$ , м <sup>2</sup> /с
Сталь	7850	494	45,4	1,17
Алюминий	2700	862,5	209,3	8,98
Серебро	10490	233,8	418,7	17,07
Медь	8940	382,7	386,6	11,3
Золото	19300	129	312,8	12,56
Чугун	7400	569,4	62,8	1,49
Магний	1740	1004,8	159,1	9,1
Олово	7300	223,6	62,8	3,85
Цинк	7140	383,9	113	4,12
Латунь	8500	376,8	104,7	3,27
Платина	21460	131,9	71,2	2,52
Свинец	11340	126,4	35,2	2,46

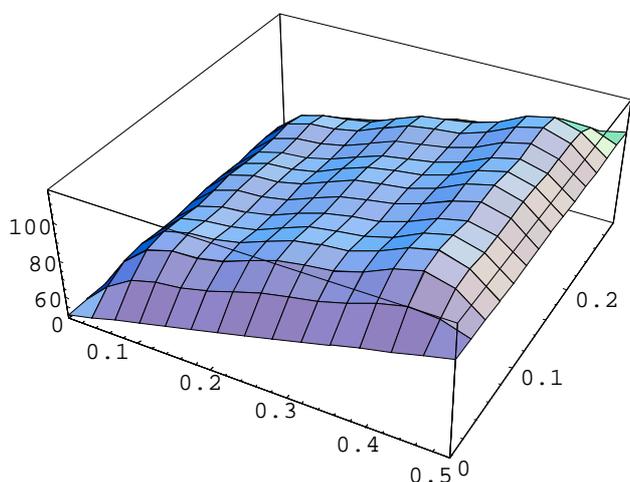


Рисунок 1 – Распределение температуры в пластине в момент времени  $t = 5$  с.

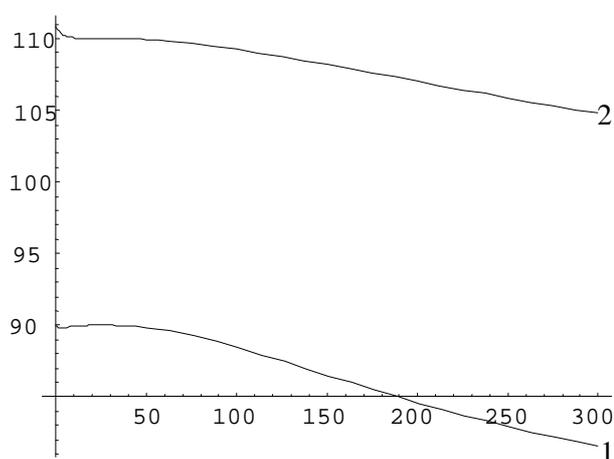


Рисунок 2 – Зависимость температуры от времени в различных точках области:

- 1 - (0,2, 0,2), м,
- 2 - (0,4, 0,2), м.

Распределение температуры  $T(x, y, t)$  можно представить как сумму общего и частного решения, т.е.

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{b} x + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16T_0}{\pi^2 nm} e^{-\pi^2 \left( \frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{h^2} \right) at} \times \sin \frac{\pi n}{b} x \sin \frac{\pi m}{h} y, n, m = 1, 3, 5, \dots \quad (21)$$

Разработанная процедура для вычисления коэффициентов ряда Фурье позволяет по формуле (18) определять  $C_{n,m}$  при неравномерном начальном распределении температуры.

Для решения краевой задачи (2) необходимо знать тепловые характеристики различных материалов. На основании значений термических коэффициентов некоторых металлов [5] для них произведен расчет коэффициента температуропроводности. Результаты расчета сведены в таблицу 1.

Проанализировав полученные значения коэффициента  $a$ , можно сделать вывод, что наибольшие значения коэффициентов температуропроводности имеют золото, серебро и медь, что объясняется в первую очередь их высокими коэффициен-

тами теплопроводности. Увеличение коэффициента температуропроводности приводит к уменьшению суммы ряда (20) и снижению ее влияния на окончательное значение температуры  $T$  (21).

Необходимо также учитывать, что данные значения коэффициента  $a$  справедливы только для определенного интервала тепловых воздействий (в данном случае для невысоких температур). При более высоких температурах величины  $\lambda$  и  $c$  принимают иные значения [3], что требует пересчета коэффициента температуропроводности.

Решение будем разыскивать для стальной пластины, для которой коэффициент температуропроводности  $a = 1,17 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сек. На границах заданы температуры  $T_1 = 50^\circ C, T_2 = 100^\circ C$ , начальная температура  $T_0 = 20^\circ C$ . Размеры пластины:  $b = 0,5$  м,  $h = 0,3$  м.

Пакет “Математика” позволяет проводить расчет полей температур при различных исходных данных. Для этого разработан ряд соответствующих программ, с помощью которых можно получать:

1. зависимость теплового поля от координат в определенный момент времени;
2. распределение температуры в рассматриваемой области в заданный момент времени;
3. значение температуры в произвольной точке области в произвольный момент времени;
4. зависимость температурного поля от времени для произвольной точки внутри области.

Полученные результаты можно кратко представить в виде рисунков 1 и 2.

Анализируя расчеты, проведенные для различных материалов, температур и точек области, можно сделать следующие выводы:

1. при увеличении времени  $t$  влияние начальных условий на распределение температуры заметно ослабевает из-за экспоненциальной зависимости в (20), что приводит к установлению стационарного температурного режима; этим же объясняется и снижение температур на рисунке 2;
2. увеличение числа членов ряда, входящего в выражение (20), приводит к спрямлению поверхности температур на рисунке 1, что непосредственно вытекает также и из условия сходимости данного ряда;
3. при достижении стационарного режима формируется поле температур для каждой точки, которое остается постоянным на протяжении всего процесса нагревания.

Разработан алгоритм решения данной задачи численным методом для сравнения полученных значений температуры на основе рекомендаций [4]. Из ДУ теплопроводности (1) можно получить для произвольной точки внутри области уравнение в конечных разностях, которое в случае двумерной задачи представляется в следующем виде:

$$\frac{T_1 + T_3 - 2T'}{(\Delta x)^2} + \frac{T_2 + T_4 - 2T'}{(\Delta y)^2} = \frac{T'' - T'}{a\Delta t}, \quad (22)$$

где  $T'$  - температура в данный момент времени  $t$  в точке  $O$ ,  $T''$  температура в этой же точке в момент времени  $t + \Delta t$ ,  $T_1, T_2, T_3$  и  $T_4$  - температуры в точках 1, 2, 3 и 4, удаленных на расстоянии  $\Delta x$  или  $\Delta y$  от рассматриваемой (см рисунок 3).

Принимая  $\Delta x = \Delta y = \delta$  и проводя соответствующие преобразования, можно получить следующее выражение для определения  $T''$ :

$$T'' = \frac{a\Delta t}{\delta^2} \left[ (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + \left( \frac{\delta^2}{a\Delta t} - 4 \right) T' \right]. \quad (23)$$

Данная формула позволяет по известной температуре  $T'$  определить значение температуры  $T''$  в той же точке в момент времени  $t + \Delta t$ . Для определения температуры  $T'''$  в момент времени  $t + 2\Delta t$  необходимо повторить расчет по формуле (23) с учетом того, что в качестве исходного будет использоваться значение  $T''$ , полученное на предыдущем этапе решения. По условию устойчивости данной вычислительной схемы можно принять значения  $\delta$  и  $\Delta t$ :

$$\frac{\delta^2}{a\Delta t} \geq 2. \quad (24)$$

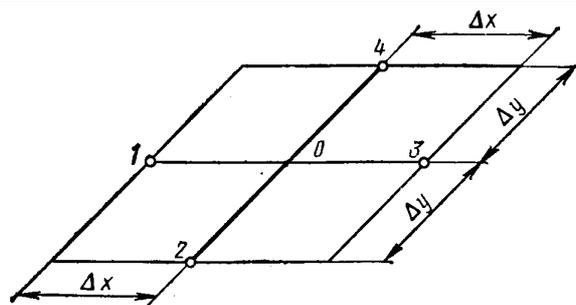


Рисунок 3 – Схема расположения узлов плоской решетки.

В нашем случае приняты:  $\delta = 0,01$  см,  $\Delta t = 0,1^0$  С. Очевидно, что чем меньше интервал разбиения, тем выше точность получаемых результатов.

Разработана программа решения данной задачи. Совместное решение, при котором определение температуры в узлах точки в момент времени  $t$  производится аналитически, а определение температуры в необходимый момент времени  $t + i\Delta t$ , где  $i$  - целое число, численно по формуле (23), указывает на высокую точность численного решения. Удовлетворительное совпадение аналитического и численного решения свидетельствуют о пригодности данных методов для решения такого рода задач. Высокая точность обеспечивается благодаря широким возможностям используемого программного обеспечения.

Приведенные выше методы решения можно развить и на области более сложной геометрической формы. Задача Дирихле на области с угловыми точками сводится по методу ГИУ к граничному интегральному уравнению [6], численное решение которого благодаря теории потенциала можно привести к решению системы алгебраических уравнений для определения плотности потенциала двойного слоя. Зная плотность потенциала, легко определяется температурное распределение в любой точке области с помощью выражения потенциала [7].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа. 1967 г.
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики М.: Наука, 1966 г.
3. Таблицы физических величин. Справочник. Под. ред. И.М. Кикоина, 1976
4. Б.Н. Юдаев. Теплопередача. - М.: Высшая школа, 1981 - 319 с.
5. Н.И. Кошкин, М.Г. Ширкевич. Справочник по элементарной физике. - М.: Наука, 1976.
6. Аршунян И.О. Применение метода граничных интегральных уравнений для численного решения задачи Дирихле в областях с угловыми точками. // МГУ - Вычислительные методы и программирование, т. 1, 2000. - с. 1-7.
7. Веремейчик А.И. Применение интегрального преобразования Лапласа к исследованию нестационарных тепловых процессов. // "Вестник БГТУ.- Математика, физика, химия.", №5, 2000. - с.49-50