В целом, реализация приведенного выше алгоритма значительно расширяет возможности анализа динамических параметров диагностируемой передачи зацеплением и передаточных функций механической системы, размещенной между источником колебаний и пьезоэлектрическим датчиком, на основе учета влияния скоростных и нагрузочных режимов работы зубчатых колес на коэффициенты $k_T$, $k_W$, $k_u$ и $k_\delta$.

Полученные результаты показали возможность использования вибромониторинга со съемом измерительной информации в режиме «осциллографа» и ее анализом с учетом реального масштаба времени и использованием методов математической статистистики для определения по усредненным амплитудным виброускорениям, зафиксированным на подшипниковых опорах внутренней динамической нагруженности отдельных пар зубьев испытуемой зубчатой передачи, их точностных параметров, в частности погрешности шага зацепления, или связанной с изменением шага зацепления степени износа.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**


1. Басинюк Я.В. Создание программного обеспечения для ускоренных стендовых испытаний динамически нагруженных передач с использованием микропроцессорных средств безразборной диагностики/ Сборник тезисов докладов международного симпозиума. – Теория реальных передач зацепления. – Курган. – 1997.
2. Басинюк Я.В. Построение программного обеспечения на основе экспертных систем при обработке результатов стендовых испытаний/ Тезисы докладов международной научно-технической конференции. – Надежность и безопасность технических систем. – Мн. – 1997.
3. Берестнев О.В., Басинюк Я.В. Многопараметрические системы контроля процессов с динамически изменяющимися параметрами/ Сборник трудов международной конференции. – Математика в индустрии. – Таганрог. – 1998.
4. Петрусевич А.И., Генкин М.Д., Гринкевич В.К. Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колесами. - М.: Изд-во АН СССР. – 1956. – С. 134.
5. Надежность машин. Учебное пособие для машиностроительных специальностей ВУЗов/ Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев. – Под ред. Д.Н. Решетова. – М.: Высш. шк. – С.:ил. 238.


УДК 531.26.262

***Веремейчик А.И., Хвисевич В.М.***

# МЕТОД ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Потребности современной техники во многих случаях требуют исследования напряженного и деформированного состояния конструкций, которые подвергаются воздействию механических нагрузок и изменяющихся во времени температур. Сложность геометрических форм конструктивных элементов наряду со сложным характером упомянутых воздействий требуют разработки новых средств и методов расчета на прочность и жесткость для получения данных об их поведении при эксплуатации еще на этапе проектирования. Вопрос о нестационарных тепловых воздействиях актуален еще и потому, что на практике механизмы, машины и строительные конструкции эксплуатируются в условиях неравномерного нагрева, который вызывает значительные температурные напряжения и в сочетании с напряжениями, вызванными действием механических нагрузок, часто становятся причиной частичного или полного вывода элементов из строя. При резко нестационарных процессах теплообмена возникает также большая неравномерность температуры и напряжений. Все это требует развития исследований нестационарных задач термоупругости, связанных со строгим удовлетворением граничных условий по всей границе области при произвольном распределении в ней температуры. При этом очень часто бывает достаточным ограничиться рассмотрением плоской области.

Решение задачи термоупругости проводится в 2 этапа. На первом этапе решается задача теплопроводности, при решении которой согласно [1] используется дифференциальное уравнение (ДУ)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T \tag{1}$$

при соответствующих начальных и граничных условиях задачи. Здесь $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности, $\lambda$ - коэффициент теплопроводности, $\rho$ - плотность материала, $c$ - удельная теплоемкость. Следует заметить, что задача определения температурных полей играет вспомогательную роль для решения задачи термоупругости. Самостоятельный интерес она представляет прежде всего потому, что именно метод потенциала для решения ДУ (1) является перспективным в случае исследования областей с произвольной геометрией границы и краевыми условиями.

Для решения ДУ теплопроводности применим метод тепловых потенциалов. Основными преимуществами применяемого метода по сравнению с другими существующими (конечных элементов, конечных разностей и т.д.) является необходимость дискретизации только границы области, при этом сохраняется высокая точность решения при относительно небольших затратах машинного времени [2].

Решение ДУ (1) разыскивается в виде потенциалов простого (2) или двойного (3) слоев [3]

$$V(P_0,t) = \int_0^t a\,d\tau \left[\int_L T(P_0,t,P,\tau)\nu(P,t)\right] dl, \tag{2}$$

$$W(P_0,t) = \int_0^t a\,d\tau \left[\int_L \frac{dT}{dn}\mu(P,\tau)\right] dl. \tag{3}$$

В выражениях (2) и (3) функция $T$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности [4]

***Хвисевич Виталий Михайлович****. К.т.н., доцент, зав. каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
*Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.*

$$T(P_0,t,P,\tau)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}, \quad (4)$$

где $r$ - расстояние между точками $P_0(x_0,y_0)$ и $P(x,y)$. Выражение (3) используется в случае рассмотрения задачи Дирихле с граничными условиями первого рода.

Для упрощения решения произведем переход к полярным координатам. Особенно эффективен данный переход в случае рассмотрения осесимметричной задачи. Расстояние между параметрической точкой $P_0(\rho_0,\theta_0)$ и переменной точкой интегрирования $P(\rho,\theta)$ в выражении (3) запишется в виде:

$$r=\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\theta}. \quad (5)$$

Выделим на границе области элемент длиной $dl=\rho d\theta$, $\rho=\rho(\theta)$. Выражение для теплового потенциала двойного слоя в случае двухмерной задачи в полярных координатах представляется в виде:

$$W(P_0,t)=a\int_0^t d\tau\int_0^{2\pi}\rho\mu(\rho,\tau)\frac{dT}{dn}d\theta. \quad (6)$$

Производная функции $T$ по направлению нормали к замкнутому контуру

$$\frac{\partial T}{\partial n}=-\frac{1}{[4a\pi(t-\tau)]^{3/2}}e^{\left(-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}\right)}\frac{r}{2a(t-\tau)}\cos\varphi, \quad (7)$$

где $\cos\varphi=\frac{dr}{dn}$ можно выразить через направляющие косинусы: $\cos\varphi=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dn}$.

В полярной системе координат получаем

$$\cos\varphi=\beta_\rho\alpha_\rho+\beta_\theta\alpha_\theta, \quad (8)$$

где $\beta_\rho=\frac{\partial r}{\partial\rho}=\frac{\rho-\rho_0\cos\theta}{r}$, $\beta_\theta=\frac{\partial r}{\partial\theta}=\frac{\rho\rho_0\sin\theta}{r}$.

Учитывая выражение (5) для $r$ и (8) для $\cos\varphi$, получаем окончательно для теплового потенциала двойного слоя

$$W(P_0,t)=\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\rho,\rho_0,\tau)}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}[I_2-I_1]d\tau, \quad (9)$$

где

$$I_1=\int_0^{2\pi}b(\rho,\rho_{0,\theta})f(\rho,\rho_0,\theta,t-\tau)d\theta,$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}c(\rho,\rho_{0,\theta})f(\rho,\rho_0,\theta,t-\tau)d\theta,$$

$$f(\rho,\rho_0,\theta,t-\tau)=e^{-\frac{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\theta}{4a(t-\tau)}},$$

$$b=(\rho-\rho_0\cos\theta)\alpha_\rho,\ c=\rho\rho_0\sin\theta\alpha_\theta.$$

При задании на поверхности тела граничных условий $F=F(P,t)$ получено интегральное уравнение для определения плотности теплового потока двойного слоя $\mu(P,\tau)$

$$\pm\frac{1}{2}\mu(P_0,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(P,\tau)}{\left(\sqrt{2a(t-\tau)}\right)^5}[I_2-I_1]d\tau=$$
$$=F(P,t). \quad (10)$$

Очевидно, что ядро интегрального уравнения (10) имеет достаточно сложный вид. Задача значительно упрощается в случае рассмотрения круглой области, т.е. когда $\rho=const$. Функция $f$, а также одно из слагаемых в выражении для $b$, не зависят от угла $\theta$ и вынесение их из-под знака интеграла значительно упрощает объем вычислительных операций. Знак "+" в (10) применяется при решении внешней задачи, знак "-"- для внутренней задачи Дирихле.

Уравнение (10) является линейным интегральным уравнением второго рода. В результате решения этого уравнения будет найдена плотность $\mu$ потенциала двойного слоя, что даст возможность найти распределение температуры в любой точке рассматриваемой области $L$ в данный момент времени путем подстановки данной плотности в выражение (3) потенциала двойного слоя, т.е.

$$T(\rho_0,t)=W(P_0,t). \quad (11)$$

Наличие двойных интегралов в уравнении (10) значительно усложняет решение нестационарной задачи теплопроводности. В случае, когда функция $r(\theta)$ имеет сложный вид, для определения значений интегралов можно воспользоваться формулами приближенного интегрирования функций (квадратурные формулы Гаусса, Ньютона - Котеса, Симпсона и др.). Применяется численное решение задачи с использованием современных достижений ПЭВМ. Область интегрирования разбивается по времени $t$ на $n$ не обязательно равных между собой частей. Принимается также условие, что на каждом интервале $(t_{j-1},t_j)$ неизвестная плотность $\mu(P,\tau)$ является постоянной. Для задачи Дирихле получаем следующее интегральное уравнение

$$\pm\frac{1}{2}\mu(P_0,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(I_2-I_1)}{\left(\sqrt{2a(t-\tau)}\right)^5}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}\mu(P,\tau_j)d\tau=F(P,t). \quad (12)$$

где $k=1$ - для внутренней задачи, $k=-1$ - для внешней задачи, $t_{j-1}\le\tau_j\le t_j$.

Значение плотностей $\mu(P,t)$ в заданный момент времени $t_n=t$ можно определить лишь посредством значений этих плотностей во все предыдущие моменты времени в этих же точках, т.к. с течением времени меняется правая часть уравнения (12).

После определения температурного поля на втором этапе определяется соответствующее ему напряженно-деформированное состояние. Необходимо найти решение дифференциальных уравнений равновесия [5] при отсутствии массовых сил

$$\Delta u_i+\frac{1}{1-2\nu}graddivu_i=\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha grad(T-T_0), \quad (13)$$

при граничных условиях на контуре области

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\nu}{1-2\nu}\theta\delta_{ij}\right]n_j = = \frac{1+\nu}{E}q_i(x_L)+\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T\cdot n_i, \qquad (14)$$

которые совместно с уравнением теплопроводности (1) при определенных начальных и граничных условиях описывают изменение в пространстве и во времени поля перемещений и температурного поля. В выражениях (13) и (14) $\theta=\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, $\alpha -$ коэффициент линейного расширения, $\nu -$ коэффициент Пуассона, $n_j -$ вектор внешней нормали к контуру $L$ тела, $q_i(x_L)$ - вектор поверхностных сил.

Аналитическое решение уравнения (13) для любой геометрии области чрезвычайно сложно. С помощью теории потенциала дифференциальные уравнения в частных производных заменяются интегральными уравнениями, которые удобны для численной реализации. Краевая задача в виде (13) сводится к задаче изотермической теории упругости.

Влияние неравномерности температуры по области $L^{\pm}$ может быть учтено в уравнениях изотермической теории упругости в перемещениях как действие поверхностных сил с потенциалом

$$n=\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha_T(T-T_0), \qquad (15)$$

что свидетельствует о том, что нагревание области до температуры $T$ создает в теле такие же перемещения, что и распределение нагрузки на границе области с интенсивностью $\phi=\Pi$.

Решение упругой задачи для плоских областей достаточно хорошо исследовано и не представляет особого интереса. Основной проблемой является нахождение температурных добавок перемещений и напряжений. Для определения эквивалентных нестационарным температурам поверхностных нагрузок необходимо определить $grad\ T$. В случае полярных координат вычисляется величина

$$\chi=\frac{\partial T}{\partial\rho} \qquad (16)$$

с учетом соотношения (11). Учитывая, что потенциал двойного слоя зависит только от расположения параметрической точки $P_0$, производную (16) можно вычислять только по координатам точки $P_0$, и величина $\chi$ определяется как частная производная потенциала двойного слоя по координате $\rho_0$

$$\chi=\frac{\partial W(P_0,t)}{\partial\rho_0}. \qquad (17)$$

В результате решение системы ДУ задачи термоупругости (13) можно представить как сумму общего решения однородного ДУ $u_i^u$ и частного решения $u_i^T$

$$u_i=u_i^u+u_i^T, \qquad (18)$$

причем частное решение в форме предложенной Гудьером [6], определяется как градиент некоторой бигармонической функции $W$

$$u^T=gradW. \qquad (19)$$

Тогда напряжения задачи (13) определяются как

$$\sigma_{ij}^0=\sigma_{ij}^u+\sigma_{ij}^T. \qquad (20)$$

Здесь тензор $\sigma_{ij}^u$ соответствует $u_i^u$, а $\sigma_{ij}^T$ - вектору $u_i^T$.

Следует также отметить, что решение задачи термоупругости производится одинаково независимо от граничных условий задачи теплопроводности, что делает используемый метод для определения напряжений и деформаций универсальным и позволяет проводить решение (1) и (13) независимо друг от друга.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. - 1967.
2. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т.Круза и Ф.Риццо. - М.: Мир. - 1978.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности: Уч. пособие для вузов. – М.: Высшая школа. - 1978.
4. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики М.:Наука. – 1966.
5. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир. - 1975. – С. 872.
6. Хвисевич В.М. Интегральные уравнения плоской краевой задачи нестационарной термоупругости методом потенциала.// Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. – № 2. – С.48-51.


УДК 536.212: 519.6

***Веремейчик А.И.***

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА “МАТЕМАТИКА”

В инженерной практике часто встречаются задачи, когда необходимо определить распределение температурных полей в случае зависимости распространения теплоты как от координат, так и от времени. Для этого необходимо решить задачу теплопроводности [1]

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\nabla^2 T, \qquad (1)$$

при определенного рода начальных и граничных условиях задачи. Здесь $a=\frac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности, $\lambda$ - коэффициент теплопроводности, $\rho$ - плотность материала, $c$ - удельная теплоемкость. При этом иногда достаточно ограничиться рассмотрением плоской области. Для областей с несложной геометрией границы удобным является использование метода разделения переменных при решении уравнения (1). Широко распространенной задачей в технике