

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. S.Thrun. *An approach to learning mobile robot navigation*. // Robotics and Autonomous Systems. 1995, V.15, N.4, pp.301-319.
2. Головкин В.А. *Нейронные сети: организация, обучение и применение*. // Москва: Радиотехника, 2001. – 320 с.
3. Ron Sun. *Autonomous learning of sequential tasks: Experiments and analyzes*. // IEEE transactions on Neural networks. 1998, V.9, N.6, pp.1217-1233.
4. Jose del R.Millan. Reinforcement learning of goal-directed obstacle avoiding reaction strategies in an autonomous mobile robot. // Robotics and Autonomous Systems. 1995, V.15, N.4, pp. 275-299.

5. V.Golovko, K.Schilling, H.Roth, R.Sadykhov, P.Albertos, V.Dimakov. *The architecture of the neural system for control of a mobile robot*. // Proceedings of the ICNNAI'99, Brest, Belarus, 1999, pp. 57-61.
6. V. Golovko and V. Dimakov. *Architecture of Neural System for Control of Autonomous Vehicles* // Preprints of the 3rd IFAC Symposium of Intelligent Autonomous Vehicles, Madrid, Spain, 1998– Oxford UK: Elsevier Science Ltd, 1998, v. 1.
7. Головкин В., Игнатюк О.Н., Садыхов Р. *Нейросетевой подход к реактивному управлению мобильным роботом* // Датчики и системы. - 2002. - №7 (38). - С. 41 - 43.

УДК 681.324

Головкин В.А., Чумерин Н.Ю., Савицкий Ю.В.

НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СПЕКТРА ЛЯПУНОВА ПО НАБЛЮДАЕМЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ

ЭКСПОНЕНТА ЛЯПУНОВА

Одним из условий хаотичности динамической системы является чувствительность к значениям начальных условий. В качестве количественной меры этого понятия обычно рассматривают старший показатель Ляпунова (экспоненту Ляпунова).

Рассмотрим точку $\mathbf{x}(t_0)$, принадлежащую аттрактору некоторой динамической системы в начальный момент времени t_0 . Задавшись некоторым малым положительным числом $\varepsilon(t_0)$, выберем на аттракторе ещё одну точку $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ так, чтобы $\|\tilde{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| = \varepsilon(t_0)$. Через промежуток времени Δt точки $\mathbf{x}(t_0)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ эволюционируют соответственно в $\mathbf{x}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, расстояние между ними обозначим через $\varepsilon(t)$, где $t = t_0 + \Delta t$ (см. рис. 1).

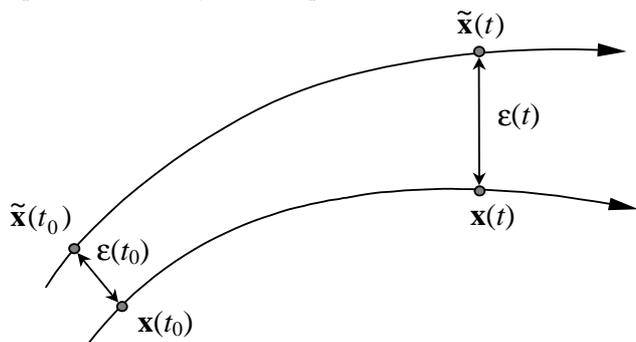


Рисунок 1 – Эволюция двух близких точек динамической системы (к определению понятия экспоненты Ляпунова).

Очевидно, что $\varepsilon(t)$ зависит от положения точек $\mathbf{x}(t_0)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$, промежутка времени Δt и, конечно, свойств самой динамической системы. Однако, упрощённо, можно считать, что

$$\varepsilon(t) \cong \varepsilon(t_0) e^{\lambda \Delta t}, \quad (1)$$

где λ – параметр, характеризующий динамическую систему и называемый старшим показателем Ляпунова или экспонентой Ляпунова.

После элементарных преобразований получим:

$$\lambda \cong \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)}, \quad (2)$$

Сразу необходимо сделать два замечания:

- во-первых, в последнем соотношении, в силу ограниченности аттрактора (а значит ограниченности $\varepsilon(t)$) Δt должно возрастать до тех пор, пока $\varepsilon(t)$ существенно меньше размеров аттрактора, иначе λ будет равен нулю, при $\Delta t \rightarrow \infty$;
- во-вторых, вычисленное в соответствии с (2) значение λ следует рассматривать как усредненное по всем начальным точкам $\mathbf{x}(t_0)$ аттрактора системы.

С учётом этих замечаний можно строго определить старший показатель Ляпунова соотношением:

$$\lambda = E_{\mathbf{x}(t_0) \in A} \left\{ \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow \infty \\ \varepsilon(t) < \text{diam} A}} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)} \right\}, \quad (3)$$

где A – аттрактор системы, $\text{diam} A$ – его диаметр, а $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание.

Старший показатель Ляпунова характеризует степень экспоненциального расхождения близких траекторий. Наличие у системы положительной экспоненты Ляпунова свидетельствует о том, что любые две близкие траектории быстро расходятся с течением времени, то есть имеет место чувствительность к значениям начальных условий. Поэтому определение экспоненты Ляпунова позволяет идентифицировать динамическую систему с точки зрения присутствия в ней хаотического поведения.

Гораздо более тонко динамику системы отражает понятие, обобщающее понятие экспоненты Ляпунова – спектр Ляпунова. Спектр Ляпунова позволяет оценить скорость расхождения (сближения) траекторий вдоль разных координатных направлений.

Головкин Владимир Адамович. К.т.н., профессор каф. ЭВМ и С Брестского государственного технического университета.
Чумерин Николай Юрьевич. Аспирант каф. ЭВМ и С Брестского государственного технического университета.
Савицкий Юрий Викторович. К.т.н., доцент каф. ЭВМ и С Брестского государственного технического университета.
 Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

СПЕКТР ЛЯПУНОВА

Рассмотрим геометрический – наиболее простой и наглядный подход к определению понятия спектра Ляпунова.

Пусть дана динамическая система, имеющая n -мерное фазовое пространство. Зафиксируем малое положительное число ϵ , и рассмотрим в фазовом пространстве n -мерную сферу, имеющую радиус ϵ . Через некоторый небольшой промежуток времени Δt данная сфера эволюционирует в n -мерный эллипсоид (см. рис. 2).

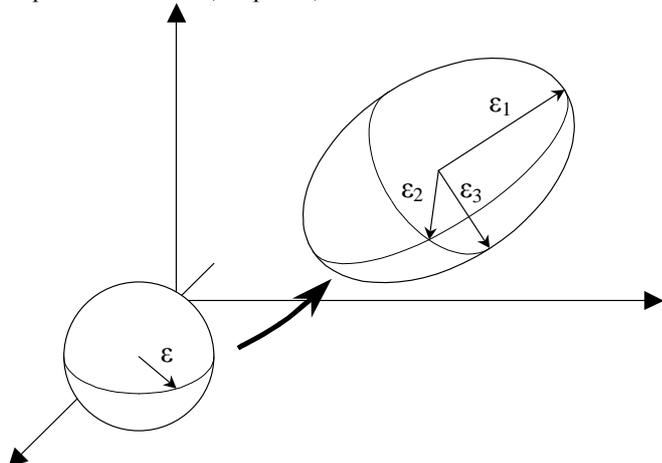


Рисунок 2 – К определению понятия спектра Ляпунова (случай трёхмерного фазового пространства).

Обозначим главные полуоси полученного эллипсоида через $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$. Для определённости будем считать, что $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \dots \geq \epsilon_n$. Далее, аналогично введённому выше, понятие экспоненты Ляпунова, можно определить показатели экспоненциального изменения полуосей эллипсоида с помощью соотношения:

$$\lambda_i \cong \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\epsilon_i}{\epsilon}, \quad (4)$$

где $i=1, 2, \dots, n$.

В данном случае необходимо иметь в виду замечания, приведённые выше, при определении понятия экспоненты Ляпунова. Нетрудно заметить, что наибольшее значение в спектре Ляпунова совпадает с экспонентой Ляпунова. Таким образом, определение спектра Ляпунова – задача более общая, по сравнению с задачей определения экспоненты Ляпунова.

АЛГОРИТМ БЕНЕТТИНА

Для оценки старшего показателя Ляпунова наиболее часто используют алгоритм Бенеттина [1].

Пусть имеется \mathbf{X}_0 – точка, принадлежащая аттрактору A исследуемой динамической системы. Траекторию эволюции точки \mathbf{X}_0 будем называть *опорной траекторией*. Зададимся положительной величиной ϵ , удовлетворяющей условию $\epsilon \ll \text{diam } A$ и выберем произвольным образом такую *точку возмущения* $\tilde{\mathbf{X}}_0$, чтобы выполнялось равенство $\|\tilde{\mathbf{X}}_0 - \mathbf{X}_0\| = \epsilon$. Рассмотрим эволюцию выбранных точек \mathbf{X}_0 и $\tilde{\mathbf{X}}_0$ в течении небольшого интервала времени T , и обозначим полученные точки через \mathbf{X}_1 и $\tilde{\mathbf{X}}_1$ соответственно. Вектор $\Delta \mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{X}}_1 - \mathbf{X}_1$ назовём *вектором возмущения*, а его

длину $\|\Delta \mathbf{x}_1\|$ – *амплитудой возмущения*. Уже на данном этапе можно произвести первую оценку величины λ :

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}_1\|}{\epsilon} \quad (5)$$

Временной интервал T необходимо брать таким, чтобы амплитуда возмущения была меньше линейных размеров неоднородностей фазового пространства и, тем более, размеров самого аттрактора. Рассмотрим перенормированный вектор возмущения $\Delta \mathbf{x}'_1 = \frac{\Delta \mathbf{x}_1}{\|\Delta \mathbf{x}_1\|} \epsilon$, и соответствующую ему

новую точку возмущения $\tilde{\mathbf{X}}'_1 = \mathbf{X}_1 + \Delta \mathbf{x}'_1$. Далее, продолжим описанную процедуру, рассматривая вместо точек \mathbf{X}_0 и $\tilde{\mathbf{X}}_0$ точки \mathbf{X}_1 и $\tilde{\mathbf{X}}'_1$ соответственно (см. рис. 3).



Рисунок 3 – К оценке экспоненты Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина.

Повторив данную процедуру M раз можно оценить λ как среднее арифметическое величин $\tilde{\lambda}_i$, полученных на каждом шаге вычислений:

$$\lambda \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{\lambda}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{T} \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}_i\|}{\epsilon} = \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^M \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}_i\|}{\epsilon} \quad (6)$$

Очевидно, что для более точной оценки следует брать значение M как можно большим, и проводить расчёты для разных начальных точек \mathbf{X}_0 .

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ СПЕКТРА ЛЯПУНОВА

Для численного расчёта спектра Ляпунова используют подход, обобщающий алгоритм Бенеттина [2]. В данном случае, кроме просчёта опорной траектории, необходимо также отслеживать эволюцию не одной, а нескольких возмущённых точек. Количество просчитываемых возмущённых траекторий равно размерности фазового пространства. Поскольку старший показатель Ляпунова оказывает существенное влияние на эволюцию *всех* возмущённых траекторий, то на каждом этапе алгоритма кроме перенормировки векторов возмущения необходимо дополнительно выполнять их ортогонализацию.

Пусть, для простоты изложения, фазовое пространство исследуемой динамической системы трёхмерно.

Пусть \mathbf{r}_0 – некоторая точка аттрактора системы. Зафиксировав некоторое небольшое, по сравнению с линейными размерами аттрактора, положительное число ϵ , выберем возмущённые точки $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$ и \mathbf{Z}_0 так, чтобы векторы возмущений $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{y}_0 = \mathbf{Y}_0 - \mathbf{r}_0$ и $\Delta \mathbf{z}_0 = \mathbf{Z}_0 - \mathbf{r}_0$ имели длину ϵ , и были взаимно ортогональны. Через некоторый небольшой

промежутков времени T точки $\mathbf{r}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ и \mathbf{z}_0 эволюционируют в точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$ и \mathbf{z}_1 соответственно. Рассмотрим новые векторы возмущений $\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_1, \Delta \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{r}_1$ и $\Delta \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1 - \mathbf{r}_1$. Ортогонализуем их, используя известный из линейной алгебры метод Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}'_1 &= \Delta \mathbf{x}_1, \quad \Delta \mathbf{x}''_1 = \frac{\Delta \mathbf{x}'_1}{\|\Delta \mathbf{x}'_1\|}, \\ \Delta \mathbf{y}'_1 &= \Delta \mathbf{y}_1 - (\Delta \mathbf{y}_1, \Delta \mathbf{x}''_1) \Delta \mathbf{x}''_1, \quad \Delta \mathbf{y}''_1 = \frac{\Delta \mathbf{y}'_1}{\|\Delta \mathbf{y}'_1\|}, \\ \Delta \mathbf{z}'_1 &= \Delta \mathbf{z}_1 - (\Delta \mathbf{z}_1, \Delta \mathbf{x}''_1) \Delta \mathbf{x}''_1 - (\Delta \mathbf{z}_1, \Delta \mathbf{y}''_1) \Delta \mathbf{y}''_1, \quad \Delta \mathbf{z}''_1 = \frac{\Delta \mathbf{z}'_1}{\|\Delta \mathbf{z}'_1\|}. \end{aligned} \quad (7)$$

После такой ортогонализации полученные векторы возмущения будут ортонормированными (то есть будут взаимно ортогональны и иметь единичную длину). Теперь перенормируем ортогонализированные векторы возмущений так, чтобы их длины были равны ε :

$$\Delta \mathbf{x}'''_1 = \Delta \mathbf{x}''_1 \cdot \varepsilon, \quad \Delta \mathbf{y}'''_1 = \Delta \mathbf{y}''_1 \cdot \varepsilon, \quad \Delta \mathbf{z}'''_1 = \Delta \mathbf{z}''_1 \cdot \varepsilon. \quad (8)$$

Рассмотрим новый набор возмущённых точек:

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \Delta \mathbf{x}'''_1, \quad \mathbf{y}'_1 = \mathbf{y}_1 + \Delta \mathbf{y}'''_1, \quad \mathbf{z}'_1 = \mathbf{z}_1 + \Delta \mathbf{z}'''_1. \quad (9)$$

Далее процесс повторяется, но вместо точек $\mathbf{r}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ и \mathbf{z}_0 рассматриваются точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1$ и \mathbf{z}'_1 соответственно.

Повторив описанную процедуру M раз, вычисляем суммы:

$$S_1 = \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}'_k\|}{\varepsilon}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\Delta \mathbf{y}'_k\|}{\varepsilon}, \quad S_3 = \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\Delta \mathbf{z}'_k\|}{\varepsilon}. \quad (10)$$

Откуда спектр Ляпунова $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ вычисляется по формуле:

$$\lambda_i = \frac{S_i}{MT}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

В данном методе необходимо особое внимание уделить выбору временного промежутка T . Действительно, если взять слишком большой промежуток, то все возмущенные траектории будут отклоняться в направлении, соответствующем максимальному показателю Ляпунова, и результаты вычисления будут искажены.

Описанный метод можно применять только в том случае, если известны уравнения эволюции системы. Но для экспериментальных данных эти уравнения, как правило, неизвестны. Далее рассмотрим методы численной оценки спектра Ляпунова, которые не требуют знания уравнений эволюции системы.

ОЦЕНКА СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ПО ВЫБОРКЕ ИЗ ОДНОЙ НАБЛЮДАЕМОЙ КООРДИНАТЫ

Часто возникает ситуация, когда уравнения эволюции системы неизвестны, и, более того, измерить все фазовые координаты системы невозможно. В таких случаях для оценки старшего показателя Ляпунова хаотической системы используют метод, основанный на обработке измерений одной координаты рассматриваемой системы. Этот метод был впервые предложен Вольфом в 1985 году [3] и основан на теореме Такенса [4] и, уже рассмотренном, алгоритме Бенеттина.

Такенс доказал [4], что система, реконструированная методом временных задержек, из одной фазовой координаты другой системы, сохраняет важнейшие динамические и геометрические свойства исходной, если выполняется неравенство:

$$m \geq 2[d] + 1, \quad (12)$$

где m – размерность пространства вложения, d – фрактальная размерность аттрактора исходной системы, $[\cdot]$ – целая часть. В данном утверждении под фразой *важнейшие динамические свойства* следует понимать диссипативность и хаотичность системы, а под *важнейшими геометрическими свойствами* – топологический инвариант аттрактора – фрактальную размерность.

Выполнение неравенства 12) гарантирует сохранения указанных свойств, однако эксперименты показывают, что данная нижняя оценка размерности пространства вложения является несколько завышенной. Для некоторых простых хаотических систем сохранение упомянутых свойств наблюдается даже при $m = [d + 1]$.

Пусть имеется временной ряд $x(t), t = \overline{1, N}$ измерений одной координаты хаотического процесса, произведённых через равные промежутки времени. Тогда, используя метод взаимной информации [5] определяют временную задержку τ , а методом ближайших ложных соседей [6] – размерность пространства вложения m . В результате реконструкции получим набор точек пространства \mathbf{R}^m :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (x(i), x(i-\tau), \dots, x(i-(m-1)\tau)) = (x_1(i), x_2(i), \dots, x_m(i)), \\ i &= ((m-1)\tau + 1), N. \end{aligned} \quad (13)$$

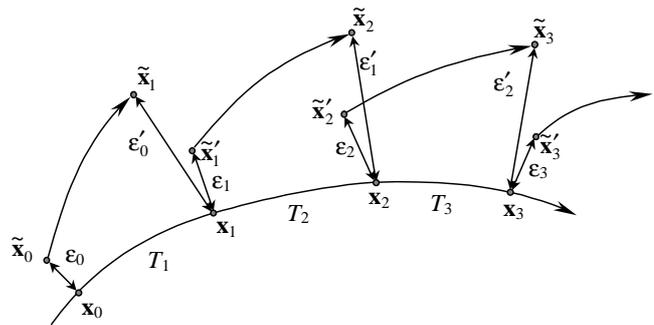


Рисунок 4 – К оценке старшего показателя Ляпунова по выборке из одной наблюдаемой координаты.

Выберем из последовательности (13) точку и обозначим её через \mathbf{x}_0 . Просматривая последовательность (13), найдём такую точку $\tilde{\mathbf{x}}_0$, чтобы выполнялось соотношение $\|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon_0 < \varepsilon$, где ε – фиксированная величина существенно меньшая размеров реконструированного аттрактора. Причём необходимо, чтобы точки \mathbf{x}_0 и $\tilde{\mathbf{x}}_0$ были разделены по времени. Затем отслеживаем эволюцию выбранных точек на реконструированном аттракторе до тех пор, пока расстояние между ними не превысит заданную величину ε_{\max} . Обозначим полученные точки через \mathbf{x}_1 и $\tilde{\mathbf{x}}_1$, расстояние между ними через ε'_0 , а промежуток времени эволюции через T_1 .

Далее, вновь просматривая последовательность (13) найдём такую точку $\tilde{\mathbf{x}}'_1$, чтобы она была близка к \mathbf{x}_1 , то есть $\|\tilde{\mathbf{x}}'_1 - \mathbf{x}_1\| = \varepsilon_1 < \varepsilon$, а векторы $\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1$ и $\tilde{\mathbf{x}}'_1 - \mathbf{x}_1$ имели, по возможности, одинаковое направление. Далее процедура повторяется, но вместо точек \mathbf{x}_0 и $\tilde{\mathbf{x}}_0$ рассматриваются точки \mathbf{x}_1 и $\tilde{\mathbf{x}}'_1$ соответственно (см. рис. 4).

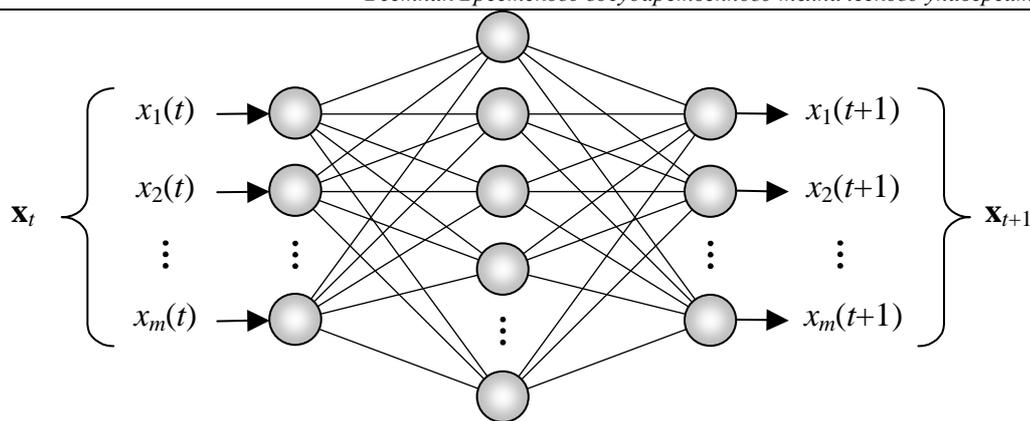


Рисунок 5 – Нейронная сеть, используемая для оценки параметров реконструированной динамической системы.

Повторив описанную процедуру M раз, оценим старший показатель Ляпунова:

$$\lambda \cong \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \ln(\varepsilon'_k / \varepsilon_k)}{\sum_{k=1}^M T_k}. \quad (14)$$

Данный алгоритм для своей работы требует очень большого объёма исходной выборки. Особенно это проблематично для реальных данных. Одним из путей для преодоления этого недостатка является применение нейронной сети.

ОЦЕНКА СПЕКТРА ЛЯПУНОВА ПО ВЫБОРКЕ ИЗ ОДНОЙ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим отображение $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ такое, что для всех точек реконструированной последовательности (13) имеют место соотношения:

$$f(\mathbf{x}_t) = \mathbf{x}_{t+1}. \quad (15)$$

По сути дела, данное отображение является уравнением эволюции реконструированной системы. Если каким-либо образом удастся на основании реконструированной траектории (13) и соотношения (15) восстановить отображение f , то, используя его, можно оценить экспоненту Ляпунова по выборке сравнительно небольшого объёма. Естественно, такое восстановление возможно далеко не всегда, но если исходная выборка адекватно отражает динамику системы, то можно рассчитывать на положительный результат. Ключевой идеей предлагаемого подхода является использование для восстановления искомого отображения f многослойного персептрона с одним скрытым слоем (см. рис. 5). Нейроны скрытого слоя имеют нелинейную функцию активации, а выходного – линейную.

Количество нейронов в скрытом слое зависит от сложности исследуемой динамической системы, и выбирается эмпирически (в наших экспериментах количество нейронов было выбрано равным 10). Далее следует, используя данные реконструированной выборки (13), обучить нейронную сеть, имея на входе вектор \mathbf{x}_t , вычислять вектор \mathbf{x}_{t+1} . Обученную таким образом сеть, можно рассматривать как приближение искомого отображения f , и использовать его в алгоритме Бенеттина для определения экспоненты Ляпунова.

Идея предложенного подхода является достаточно универсальной, и её можно использовать также для оценки спектра Ляпунова.

В предложенном методе используется та же идея, что и в случае оценки экспоненты Ляпунова по выборке из одной координаты системы с использованием нейронной сети. Последовательность действий и рассуждений сохраняются,

только вместо алгоритма Бенеттина используется обобщённый алгоритм Бенеттина для расчёта спектра Ляпунова.

АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СПЕКТРА ЛЯПУНОВА ПО ВЫБОРКЕ ПО ОДНОЙ КООРДИНАТЕ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

1. Получить выборку измерений одной фазовой координаты динамической системы. Данная выборка должна адекватно отражать динамику процесса.
2. На основании выборки вычислить подходящую временную задержку τ (можно использовать методы: *метод автокорреляционной функции*, *метод функции взаимной информации* или *метод среднего отклонения*).
3. Вычислить размерность m пространства вложения (можно использовать методы: *метод корреляционной размерности*, *метод ложных ближайших соседей* или *гамма-тест*).
4. Выполнить псевдофазовую реконструкцию траектории методом *временных задержек*. При этом получим выборку m -мерных векторов, объём которой будет немного меньше объёма исходной выборки.
5. Сконструировать аппроксимирующую нейронную сеть, изображённую на рис. 5.
6. Обучить нейронную сеть вычислять очередной вектор реконструированной последовательности, на основании предыдущего. Обучение можно считать удачным, если ошибка вычислений каждого вектора в среднем имеет порядок 10^{-8} – 10^{-9} .
7. Применяя, обученную таким образом сеть, в обобщённом алгоритме Бенеттина рассчитать оценку спектра Ляпунова.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для апробации метода были выбраны классические хаотические системы малой размерности: система Лоренца и система Рёсслера. Система Лоренца описывается системой трёх нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = yx - bz, \end{cases} \quad (16)$$

где σ , b , r – параметры системы. При значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 28$ динамика системы приобретает хаотический характер. Данная система хорошо изучена и все её характеристики известны: спектр Ляпунова – (0.906, 0, -14.572), фрактальная размерность аттрактора – 2.06.

Результаты оценки спектра Ляпунова системы Лоренца по одной координате с использованием нейронной сети

dt	τ	Спектр Ляпунова			Абс. ошибка	Относ. ошибка
		λ ₁	λ ₂	λ ₃		
0,04170	0,1668	0,612978	-0,2016840	-15,0033	0,559053	3,83%
0,04200	0,1680	0,725777	-0,0211582	-14,6402	0,193839	1,33%
0,04215	0,1686	0,966544	-0,3009800	-15,9458	1,407730	9,64%
0,04220	0,1688	0,965399	-0,3006240	-15,9270	1,389170	9,51%
0,08500	0,1700	1,143851	-0,2816490	-14,9843	0,553092	3,79%
0,04260	0,1704	1,021790	-0,4326160	-15,6514	1,168620	8,00%
0,04260	0,1704	0,483841	0,0528098	-13,3949	1,251610	8,57%
0,04300	0,1720	0,742471	-0,0865899	-14,2650	0,358420	2,45%
0,08600	0,1720	0,830438	-0,3357490	-13,5627	1,066370	7,30%
0,04320	0,1728	0,570654	-0,1465600	-14,9297	0,511766	3,51%
0,08700	0,1740	1,216890	-0,6435080	-14,5374	0,715508	4,90%

Результаты оценки спектра Ляпунова системы Рёсслера по одной координате с использованием нейронной сети

dt	τ	Спектр Ляпунова			Абс. ошибка	Относ. ошибка
		λ ₁	λ ₂	λ ₃		
0,04	0,04	0,173003	-0,0821049	-5,47571	0,154879	2,87%
0,07	0,07	0,060350	-0,3888620	-5,18352	0,441825	8,19%
0,06	0,12	0,090696	0,0030709	-5,02998	0,363565	6,74%
0,06	0,12	0,106080	-0,0358488	-5,79224	0,402378	7,46%
0,06	0,12	0,077922	-0,0187908	-5,93021	0,537581	9,97%
0,07	0,14	0,129117	-0,1092460	-4,93167	0,477637	8,86%
0,08	0,16	0,106981	-0,0449128	-5,36074	0,065971	1,22%
0,08	0,16	0,085461	-0,0282390	-5,31476	0,084427	1,57%
0,04	0,16	0,119605	-0,2027930	-5,56896	0,272851	5,06%
0,06	0,18	0,141245	-0,0751598	-5,48983	0,141277	2,62%
0,08	0,48	0,078753	-0,0144016	-5,24691	0,147000	2,73%

Второй подопытной системой была выбрана система Рёсслера. Она также описывается системой трёх нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + ay, \\ \frac{dz}{dt} = b + (x - r)z, \end{cases} \quad (17)$$

где a, b, r – параметры системы. При значениях параметров $a = b = 0.2, r = 5.7$ динамика системы приобретает хаотический характер. Динамические характеристики системы Рёсслера: спектр Ляпунова – (0.07, 0, -5.39), фрактальная размерность аттрактора – 2.03.

Во всех опытах выборка состояла из 400 измерений первой координаты систем. В аппрокимирующей нейронной сети мы брали 10 нейронов, что оказалось вполне достаточно. Изменяемыми параметрами в серии экспериментов были шаг дискретизации dt и временная задержка τ . Нейронная сеть в каждом эксперименте обучалась в течении 3000 эпох. Ниже приведены результаты расчётов, в которых нейронная сеть обучилась достаточно хорошо.

Как видно из таблиц, погрешность оценки вполне приемлема. Основным требованием к выборке является адекватность отражения динамики процесса: выборка должна состоять из точек равномерно и достаточно плотно распределённых на аттракторе. Однако надо заметить, что в некоторых случаях (например, в случае системы Лоренца) метод существенно зависит от точного определения временной задержки,

в то время как для системы Рёсслера, временная задержка может выбираться в сравнительно широком диапазоне. Таким образом, проблема выбора параметров периода дискретизации и временной задержки требует дополнительных исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // *Phys. Rev.* 1976. V. A14. P. 2338–2345.
2. Benettin G., Galgani L., Georgilli A., Strelcyn J.M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I: Theory. P. II. Numerical application // *Meccanica.* 1980. V. 15. P. 9–30.
3. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica.* 1985. V. D16. P. 285–317.
4. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. – In: *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics* // Eds D.A. Rand, L.-S. Young. – Berlin: Springer-Verlag, 1980. V. 55. P. 595–599.
5. Fraser A.M., Swinney H.L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Phys. Rev.* 1986. V A33. P. 1134.
6. Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, *Phys. Rev.* 1992. V A45. P. 3403.