УДК 539.3

Босяков С. М.

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ В ТРЕХ ТЕОРИЯХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Один из способов разрешения парадоксов классической теории теплопроводности заключается во введении гипотезы о конечной скорости распространения тепловых возмущений, которая приводит к уравнению теплопроводности гиперболического типа. Достаточно полные и глубокие исследования особенностей распространения плоских термоупругих волн в рамках моделей с одним и двумя временами релаксации теплового потока проведено в работах [1, 2], а также [3]. В стороне от внимания ученых осталось применение классического метода характеристик [4] к таким системам уравнений движения и, работы, посвященные этой тематике, носят единичный характер [5]. Ниже представлены результаты исследования динамических процессов в моделях теплопроводности с конечными временами релаксации методом характеристик.

Рассмотрим одномерную систему уравнений обобщенной взаимосвязанной динамической задачи термоупругости [3]:

$$
\begin{gathered}
c_1^2 u'' = \ddot{u} + \beta \dot{T}/\rho, \\
\lambda T'' - c_v\left(\dot{T} + \tau \ddot{T}\right) = \beta T_0\left(\dot{u}' + \alpha_0 \ddot{u}'\right),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где c_1 - скорость распространения упругой продольной волны, β - термоупругая константа, ρ - плотность среды, λ - теплопроводность, c_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме, τ - время релаксации теплового потока, u - перемещение, T - абсолютная температура, штрихом обозначено дифференцирование по координате x, точкой – дифференцирование по времени t.

Чтобы получить уравнение характеристической плоскости зададим начальные данные к системе (1) на плоскости $Z(t,x) = const$:

$$
\begin{gathered}
u\big|_{Z=const} = f_1(x), \quad \dot{u}\big|_{Z=const} = f_2(x), \\
T\big|_{Z=const} = \varphi_1(x), \quad \dot{T}\big|_{Z=const} = \varphi_2(x).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Из (1) и (2) получим в новых переменных $Z = Z(t,x)$ и $Z_1 = Z_1(t,x)$ следующую систему уравнений (выпишем только частные производные от u, T по Z):

$$
\begin{gathered}
\left(c_1^2 g^2 - p_0^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} - \frac{\beta}{\rho}\frac{\partial T}{\partial Z} p_0 + \ldots = 0, \\
\left(\lambda g^2 - c_v \tau p_0^2\right)\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - c_v \frac{\partial T}{\partial Z} p_0 - \\
- \beta T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}\left(p_0 g + \tau\left(2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial t} g + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} p_0\right)\right) + \ldots = 0
\end{gathered} \tag{3}
$$

где $p_0 = \dfrac{\partial Z}{\partial t}, g = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$. Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при производных высшего (второго) порядка, получим следующее уравнение характеристик:

$$
\left(c_1^2 g^2 - p_0^2\right)\left(\lambda g^2 - c_v \tau p_0^2\right) = 0 . \tag{4}
$$

Отсюда следует существование упругой продольной и тепловой волн, распространяющихся со скоростями c_1 и $\sqrt{\lambda / c_v \tau}$ соответственно. Отсутствие взаимосвязи между процессами деформации и нагревания в этом случае объясняется не учетом членов с производными первого порядка в системе (3) при нахождении характеристического уравнения.

Покажем, что из (4) при $\tau \to 0$ не следует уравнение характеристик для одномерной системы уравнений движения классической термоупругости:

$$
\begin{gathered}
c_1^2 u'' = \ddot{u} + \beta \dot{T}/\rho, \\
\lambda T'' - c_v \dot{T} = \beta T_0 \dot{u}'.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Данные Коши (2) для такой системы имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
u\big|_{Z=const} = f_1(x), \quad \dot{u}\big|_{Z=const} = f_2(x), \\
T\big|_{Z=const} = \varphi_1(x).
\end{gathered} \tag{6}
$$

Из системы (5), записанной в новых переменных, получим следующее уравнение характеристик:

$$
p_0^3 c_v - p_0^2 g\left(\frac{\lambda}{g}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\beta^2 T_0}{\rho}\right) - p_0 g^2 c_1^2 c_v + \lambda c_1^2 g^2 \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{7}
$$

или, для скорости распространения поверхности разрыва $V = p_0 / g$:

$$
V^3 c_v - V^2\left(\frac{\lambda}{g}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\beta^2 T_0}{\rho}\right) - V c_1^2 c_v + \frac{\lambda c_1^2}{g}\frac{\partial g}{\partial x} = 0 . \tag{8}
$$

Нетрудно видеть, что уравнение характеристик (7) не следует из (4) при $\tau \to 0$. Из (8) вытекает существование термоупругих волн, но его более подробный анализ затруднителен, поскольку в теории характеристик отсутствует физическая интерпретация частной производной $\dfrac{\partial g}{\partial x}$. Этот недостаток можно устранить, конкретизируя природу физико-механического возмущения, то есть, задавая тип поверхности разрыва. Так, если $Z = Z_0 \exp(i(kx - \omega t))$ - плоская волна, то из (7) получим известное дисперсионное уравнение [3].

Обратимся к одномерной динамической модели среды с температурно-скоростной зависимостью (модели Грина-Лоуса) [3]:

$$
\begin{gathered}
c_1^2 u'' = \ddot{u} + \beta\left(\dot{T} + \alpha \dot{T}'\right)/\rho, \\
\lambda T'' - c_v\left(\dot{T} + \alpha_0 \ddot{T}\right) = \beta T_0 \dot{u}',
\end{gathered} \tag{9}
$$

где α и α_0 - параметры типа времен релаксации, для которых выполняется неравенство $0 \le \alpha_0 \le \alpha$.

Составим характеристический определитель системы (9), записанной в новых переменных (с начальными условиями (2)):

$$
\begin{vmatrix}
c_1^2 g^2 - p_0^2 & -\beta \alpha p_0 g / \rho \\
\beta T_0 p_0 g / c_v & \alpha_0 p_0^2 - \lambda g^2 / c_v
\end{vmatrix} = 0.
$$

Отсюда вытекает следующее уравнение характеристик:

Босяков Сергей Михайлович. *К.ф.-м.н., ассистент каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$\alpha_0 c_v p_0^4 - p_0^2 g^2 \left(\alpha_0 c_1^2 c_v + \lambda + \beta^2 \alpha T_0\right) + c_1^2 \lambda = 0 ,$$

или в обозначениях [3]

$$\alpha_0 V^4 / c_1^2 - V^2 \left(\alpha_0 + \alpha\varepsilon + 1/\omega_*\right) + c_1^2 / \omega_* = 0 , \quad (10)$$

где $\varepsilon = \beta^2 T_0 / c_1^2 c_v$ - коэффициент связанности, $\omega_* = c_1^2 c_v / \lambda$ - величина, имеющая размерность частоты. Из (9) для скоростей распространения термоупругих волн получим:

$$V_{1,2} = c_1 \sqrt{\left(b \pm \sqrt{b^2 - \alpha_0/\omega_*}\right) \Big/ \alpha_0} , \quad (11)$$

$$2b = \alpha_0 + \alpha\varepsilon + 1/\omega_* .$$

Исследуем более детально соотношения (10) на примере стали при $\varepsilon = 0.0114$, $\omega_* = 1.75 \cdot 10^{12}$ 1/с, $c_1 = 5800$ м/с [3]. На рис. 1 и 2 изображены зависимости функции V_1/c_1 (относительной скорости распространения поверхности разрыва) от относительных параметров $n = \alpha_0 \omega_*$ и $m = \alpha\omega_*$. Отметим, что времена релаксации или не определены с достаточной точностью (время α_0), или не определены совсем (время α) [3].

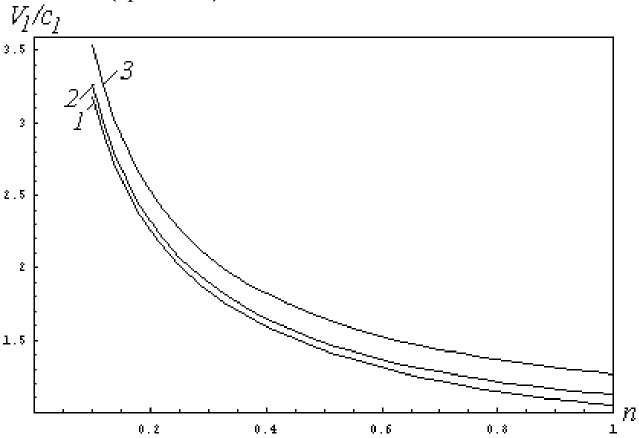

Рисунок 1 – Зависимость безразмерной скорости распространения поверхности разрыва V_1/c_1 от параметра n при разных значениях параметра m : *1* - m =1; *2* - m =5; *3* - m =20.

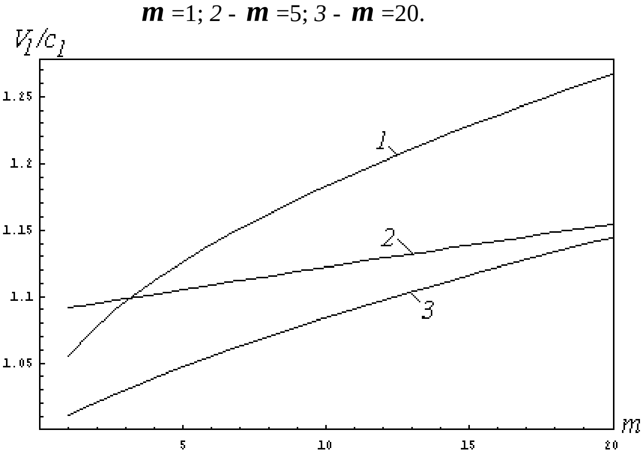

Рисунок 2 – Зависимость безразмерной скорости распространения поверхности разрыва V_1/c_1 от параметра m при разных значениях параметра n : *1* - n =1; *2* - n =1.5; *3* - n =2.

Из поведения функции V_1/c_1 (рис. 1, 2) следует, что скорость V_1 является скоростью распространения модифицированной упругой волны (упругая волна, сопровождающаяся тепловым полем), так как $V_1 \geq c_1$ независимо от значений времен релаксации α и α_0. Время релаксации α несущественно влияет на значение этой скорости: при $n \to 0$ $(\alpha_0 \to 0)$ скорость V_1 резко устремляется в бесконечность, при $n > 1$ $(\alpha_0 > 1/\omega_*)$ скорость V_1 независимо от времени релаксации α стремится к конечному пределу равному скорости упругой продольной волны c_1 (рис.1). При возрастании времени релаксации α скорость V_1 также незначительно возрастает; если $\alpha \to 0$, то V_1 принимает значение c_1 (рис. 2). Графики зависимости относительной скорости распространения упругой модификации тепловой волны V_2/c_1 от параметров n и m представлены на рис. 3 и 4.

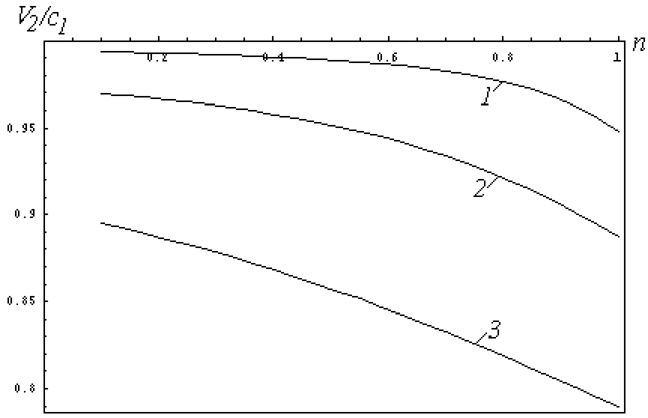

Рисунок 3 – Зависимость безразмерной скорости распространения поверхности разрыва V_2/c_1 от параметра n при разных значениях параметра m : *1* - m =1; *2* - m =5; *3* - m =20.

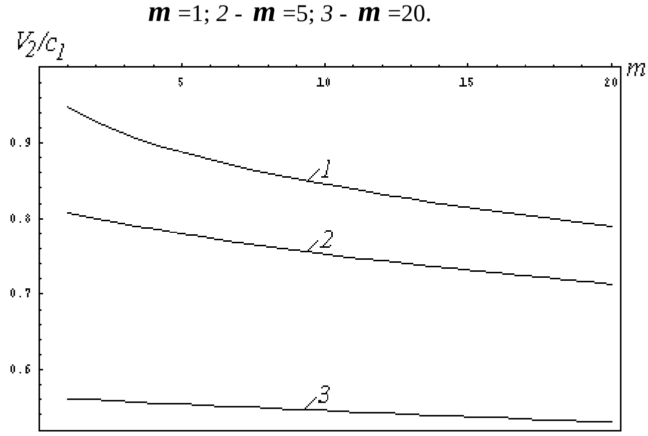

Рисунок 4 – Зависимость безразмерной скорости распространения поверхности разрыва V_2/c_1 от параметра m при разных значениях параметра n : *1* - n =1; *2* - n =1.5; *3* - n =2.

Как следует из рис. 3 и 4, скорость V_2 не превышает скорости распространения упругой продольной волны c_1 и при возрастании времен релаксации α и α_0 неограниченно уменьшается, причем изменение значений α и α_0 практически одинаково сказывается на изменении скорости V_2 (см. рис. 3 и 4).

На рис. 5, 6 показаны зависимости относительной скорости V_2/V_T от параметров n и m ($V_T = \sqrt{\lambda/c_v\alpha_0} = c_1/\sqrt{n}$ - скорость распространения тепловой волны).

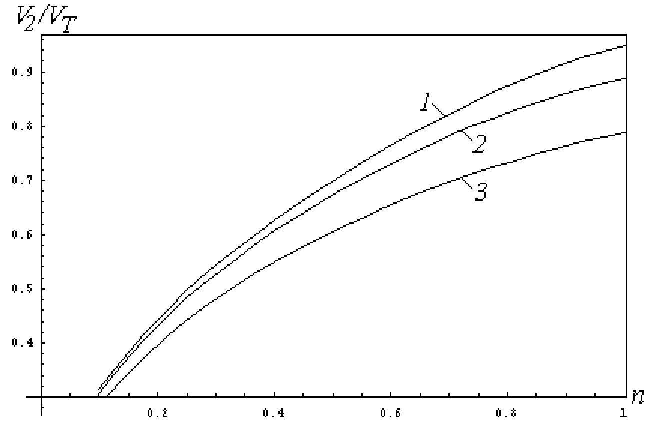

Рисунок 5 – Зависимость безразмерной скорости распространения поверхности разрыва V_2/V_T от параметра n при разных значениях параметра m: *1* - m =1; *2* - m =5; *3* - m =20.

Из рис. 5 и 6 следует, что скорость распространения термоупругой волны V_2 не превышает скорости распространения тепловых возмущений (считаем, что время релаксации теплового потока α_0 эквивалентно времени τ). С увеличением α_0 скорость V_2 также возрастает, причем кривые V_2/V_T незначительно отличаются друг от друга при разных значениях параметра m (рис. 5). При возрастании второго времени релаксации α скорость V_2 уменьшается, но для больших значений времени α_0 величина скорости V_2 мало изменяется по сравнению со скоростью распространения тепловых возмущений V_T (рис. 6).

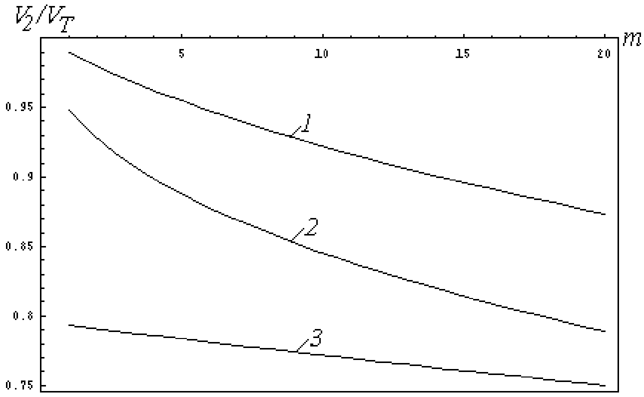

Рисунок 6 – Зависимость безразмерной скорости распространения поверхности разрыва V_2/V_T от параметра m при разных значениях параметра n: *1* - n =1; *2* - n =1.5; *3* - n =2.

В заключение отметим, что метод характеристик, развитый выше применительно к одномерным динамическим моделям теплопроводности, достаточно легко может быть перенесен на трехмерные случаи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Энгельбрехт Ю.К. / / Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук. 1973. Т. 22, № 2. С. 188—195.
2. Иванов Ц., Энгельбрехт Ю.К. / / ИФЖ. 1978. Т. 35, № 2. С. 344—351.
3. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. Мн. 1993.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. М. 1980.
5. Haddow J. B., Wegner J. L. Plane harmonic waves for three thermoelastic theories / / Math. And Mech. Solids. – 1996. – Vol. 1, № 1. – P. 111—127.

УДК 539.3

Мартыненко М.Д., Босяков С.М.

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ СЕЧЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

ВВЕДЕНИЕ

Теория плоских упругих волн в анизотропных средах относится к достаточно хорошо изученным разделам механики деформируемых сред и акустики. Результаты исследований нашли свое отражение в известных работах [1—4], где при описании распространения упругих волн в анизотропных средах применялись различные поверхности, характеризующие волновой процесс (поверхности скоростей и обратных скоростей, волновые и лучевые поверхности). Однако в большинстве случаев анизотропии эти трехмерные поверхности построить не удается, поскольку соответствующие дисперсионные уравнения аналитически могут быть решены только для особых направлений или плоскостей (исключение составляют гексагонально-анизотропные среды) [4]. Данная работа в определенной степени компенсирует этот пробел в отношении кубически анизотропных сред.

ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим разрешающую систему уравнений движения кубически анизотропной упругой среды в отсутствие объемных сил:

$$\left(A_4\Delta + \varepsilon\partial_i^2\right)u_i + \left(A_2 + A_4\right)\partial_i\sum_{k=1}^{3}\partial_k u_k = \rho\ddot{u}_i, \qquad (1)$$

где $\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ - вектор перемещений,

Мартыненко Михаил Дмитриевич. *Д.ф.-м.н., профессор каф. теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, 220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4.