УДК 69.05:338.262

Павлючук Ю.Н., Срывкина Л.Г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Основной задачей оперативного планирования в строительстве является определение из числа предусмотренных планом такого набора работ, который мог бы быть выполнен в течение ближайшего планового периода при условии обеспеченности всеми необходимыми ресурсами: материалами, строительными машинами, рабочими кадрами.

При решении этой задачи по каждому из объектов, предусмотренных текущим планом, должны быть известны:

- объем строительно-монтажных работ, который следует выполнить до конца планируемого периода;
- нормативное количество каждого вида материальных ресурсов, необходимое для достижения этой цели;
- типы и количество строительных машин для выполнения запланированного объема работ;
- количество рабочих необходимой квалификации;
- наличие и возможность получения всех этих ресурсов.

Требуется сопоставить потребность в ресурсах с возможностью их получения, и при наличии дефицита найти такое их распределение, при котором достигается оптимальное значение некоторой целевой функции.

Обработка большого объема информации и принятие решений в сжатые сроки представляют собой сложную задачу. Поэтому целесообразным при решении задач оперативного планирования и управления является применение средств вычислительной техники. В [4] предлагается несколько методов разработки оперативных планов с применением ЭВМ. Их использование предусматривает разработку сетевых моделей и расчет их временных параметров, формирование календарных расписаний работ, разработку технологических объектных сетевых графиков, годовых календарных планов. В современных условиях работы подрядных организаций, особенно если речь идет об организациях, которые выполняют на объектах относительно малые объемы разнородных работ (например, ремонтно-строительные организации), это может оказаться невозможным. Поэтому представляется целесообразным использование при принятии оперативных управленческих решений следующей методики. При решении вопроса о том, какие задания и в каком объеме будут выполняться в течение планируемого периода, необходимо учитывать приоритет объектов и предоставленные заказчиками авансы на приобретение материалов. В связи с этим предлагается распределять ресурсы в общем случае в четыре этапа:

- на объекты, которые обладают высоким экономическим или социальным приоритетом;
- на объекты, где основные материалы приобретаются полностью за счет предоставленных авансов заказчика;
- на объекты, где часть материалов приобретается за счет авансов заказчика, а часть – за счет прибыли, остающейся в распоряжении подрядной организации;
- на объекты, где материалы приобретаются полностью за счет прибыли, остающейся в распоряжении подрядной организации.

После распределения ресурсов на очередном этапе оставшееся у подрядчика количество ресурсов (материалов, авансов заказчика, строительных машин, трудовых ресурсов) и распределяемые объемы работ на объектах уменьшаются на соответствующие величины.

Пусть текущим планом предусмотрено выполнение работ на n объектах. Подрядная организация располагает определенным количеством трудовых ресурсов необходимой для этого квалификации. На начало планируемого периода известны следующие показатели:

F_h - фонд рабочего времени h-й бригады на планируемый период, чел.-дн., $h = \overline{1, m_1}$;

c_j - предусмотренные текущим планом на рассматриваемый интервал времени объемы СМР, руб., по объектам, $j = \overline{1, n}$;

d_j - предоставленные заказчиками авансы по соответствующим объектам, руб., $j = \overline{1, n}$;

p_{j_h} - достигнутая выработка h-й бригады при выполнении j-го вида работ, руб./чел.-день (ее можно принять по статистическим данным для данной бригады за предыдущие периоды при выполнении аналогичных работ или по сметным нормам);

K - количество видов основных материалов для выполнения работ на n объектах;

r_{j_k} - количество единиц k-го вида материала, необходимое для выполнения j-го задания в объеме c_j, ед., $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, K}$; если на j-м задании k-й вид материалов не используется, то принимаем r_{j_k} =0;

w_k - цена единицы k-го вида материала, руб./ед., $k = \overline{1, K}$;

R_k - количество k-го материала, которое не было приобретено заранее и не может быть поставлено к началу планируемого периода, ед., $k = \overline{1, K}$; если для k-го материала нет никаких ограничений в приобретении всего необходимого его количества, то принимается R_k =0;

M_l - фонд рабочего времени l-й машины на планируемый период, маш.-см., $l = \overline{1, m_3}$;

$p^{/}_{j_l}$ - производительность l-й машины при выполнении работ на j-м объекте, руб./ маш.-см;

U - прибыль, имеющаяся в распоряжении подрядной организации для приобретения основных материалов, руб.

Если текущим планом предусматривается параллельное выполнение на одном и том же объекте разных видов работ, для которых требуются рабочие разной специализации, разные материалы и машины, то следует рассматривать каждый вид работ отдельно как самостоятельный объект. При этом следует предварительно разделить на части предоставленный заказчиком аванс по объекту в целом пропорционально стоимости основных материалов для каждого вида работ.

Срывкина Людмила Геннадьевна, *ассистент каф. экономики и организации строительства Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Таблица 1.

Группа ограничений	Формулировка ограничений	Условные обозначения	Запись ограничений в общем виде
Ограничения по трудовым ресурсам	$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{jl}}x_j \le M_l$, $l=\overline{1,m_3}$, $p'_{jl}\ne 0$	$a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{jl}}$, $b_i=M_{i-m_1-m_2}$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m_1}$
Ограничения по материалам (по размеру прибыли на приобретение материалов)	$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{K}r_{jk}w_k-d_j)\le U$	$a_{ij}=a_{(m_1+1),j}= =\sum_{k=1}^{K}r_{jk}w_k-d_j$ $b_i=b_{m_1+1}=U$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=m_1+1$
	$\sum_{j=1}^{n}r_{jk}x_j \le \sum_{j=1}^{n}r_{jk}-R_k$, $k=\overline{1,K}$	$a_{ij}=r_{jk}$ $b_i=\sum_{j=1}^{n}r_{j\,i-m_1-1}- -R_{i-m_1-1}$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=\overline{m_1+2,m_1+m_2}$
Ограничения по машинам и механизмам	$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{jl}}x_j \le M_l$, $l=\overline{1,m_3}$, $p'_{jl}\ne 0$	$a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{jl}}$ $b_i=M_{i-m_1-m_2}$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=\overline{m_1+m_2+1,m_1+m_2+m_3}$
Ограничения по объемам выполнения работ	$x_j\le 1$	$\begin{cases}a_{ij}=1\\ при\ \ i=j+m-n;\\ a_{ij}=0\\ при\ \ i\ne j+m-n\end{cases}$ $b_i=1$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=\overline{m_1+m_2+m_3+1,m}$

Распределение рабочих по объектам производится с учетом обеспеченности выполняемых заданий всеми необходимыми материалами, строительными машинами и механизмами. Обозначим через x_j долю выполнения j-го задания. Тогда $\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$ представляет собой объем СМР, который может быть выполнен на n объектах. Введем в систему m ограничений, связанных с тем, что затрачиваемое количество ресурсов не должно превышать имеющееся в наличии их количество. В случае наличия дефицита ресурсов требуется найти такое распределение $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$, при котором будет выполнен максимальный объем работ:

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \quad (max) \tag{1}$$

с учетом ограничений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m}) \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}) \tag{3}$$

В общем случае m ограничений можно разделить на четыре группы: m_1 ограничений по трудовым ресурсам, m_2 ограничений по материалам, m_3 ограничений по машинам и механизмам, m_4 ограничений по выполняемым объемам работ. Количество ограничений по трудовым ресурсам будет соответствовать требуемому количеству бригад, количество ограничений по объемам работ равняется количеству объектов: $m_4=n$.

В соответствии с рассмотренными выше этапами решения задачи распишем систему уравнений (2) для каждого этапа:

1. Для объектов, которые обладают высоким экономическим или социальным приоритетом, при оперативном управлении распределение ресурсов представляется целесообразным осуществлять одним из следующих способов:

1) на стадии перспективного планирования определения приоритетов заданий можно использовать метод линейной комбинации показателей, в соответствии с которым из нескольких частных характеристик формируется одна комплексная характеристика W. Пусть у нас имеется n объектов (заданий), каждый из которых характеризуется одним и тем же набором из M частных показателей. Удельный вес частного показателя с номером m в комплексном показателе определяется вектором $w=(w^1,...,w^M)$, $\sum_{m=1}^{M}w^m=1,\ w^m\ge 0\ \ (m=\overline{1,M})$. Тогда нормированное значение приоритета j-го объекта по комплексному показателю W определиться в виде линейной скаляризованной функции, представляющей собой сумму нормированных значений приоритетов i-го объекта по частным показателям $P^m_{j,норм}$ $(m=\overline{1,M})$, умноженных на весовые коэффициенты этих показателей w^m

Таблица 2.

Группа ограничений	Формулировка ограничений	Условные обозначения	Запись ограничений в общем виде
Ограничения по трудовым ресурсам	$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p_{j_h}} \le F_h$, $h = \overline{1, m_1}$, $p_{j_h} \ne 0$	$a_{ij} = \frac{c_j}{p_{j_h}}$ $b_i = F_h$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, $i = \overline{1, m_1}$
Ограничения по материалам	$\sum_{j=1}^{n} r_{j_k} x_j \le \sum_{j=1}^{n} r_{j_k} - R_k$, $k = \overline{1, K}$	$a_{ij} = r_{j_k}$, $b_i = \sum_{j=1}^{n} r_{j_{i-m_1-n}} -$ $-R_{i-m_1-n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, $i = \overline{m_1+1, m_1+m_2}$
Ограничения по машинам и механизмам	$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p_{j_l}^{/}} x_j \le M_l$, $l = \overline{1, m_3}$, $p_{j_l}^{/} \ne 0$	$a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p_{j_l}^{/}}$, $b_i = M_{i-m_1-m_2}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ $i = \overline{m_1+m_2+1, m_1+m_2+m_3}$
Ограничения по объемам выполнения работ	$x_j \le 1$	$\begin{cases} a_{ij} = 1 \\ при \;\; i = j+m-n; \\ a_{ij} = 0 \\ при \;\; i \ne j+m-n \end{cases}$ $b_i = 1$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, $i = \overline{m_1+m_2+m_3+1, m}$

$$P_{j,норм}^{w} = \sum_{m=1}^{M}(P_{j,норм}^{m} \times w^{m}).$$

Следует принять во внимание, что перспективное планирование охватывает большой интервал времени, в течение которого статус объектов может измениться и применение ранее определенных приоритетов станет невозможным, а проведение описанной выше процедуры на стадии оперативного планирования является слишком трудоемким. Поэтому более рациональным является применение следующего метода;

2) для определения последовательности, в которой n объектов будут обеспечиваться необходимыми ресурсами, провести опрос экспертов. В качестве метода высказывания индивидуальных суждений используется балльная оценка, а метода получения групповой оценки – среднеарифметическая оценка. Для балльной оценки используется балльная (ранговая) шкала, представляющая собой дискретный ряд чисел от 1 до n, при этом наиболее важному по рассматриваемым критериям объекту присваивается ранг 1, следующему - ранг 2 и т. д. После выявления групповой оценки получается очередность объектов, в соответствии с которой производится назначение ресурсов на соответствующие задания;

3) распределение ресурсов среди группы высокоприоритетных объектов без учета разницы в приоритетах отдельных объектов на основании решения задачи линейного программирования вида (1) при ограничениях (2) и (3). Ограничения (2) при этом формулируются так же, как и для объектов, рассматриваемых на третьем этапе (таблица 1).

2. Для объектов, где основные материалы приобретаются полностью за счет предоставленных авансов заказчика, должно выполняться условие:

$$\sum_{k=1}^{K} r_{j_k} x_j w_k \le d_j \tag{4}$$

Очевидно, что в данном случае $m_2 = K$, $m_4 = n$, $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 =$ $= m_1 + K + m_3 + n = m_1 + m_3 + n + K$

В некоторых случаях имеет смысл представить ограничение по объемам выполнения работ в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le 1 + \Delta b_i, \;\; i = \overline{m_1+m_2+m_3+1, m} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \\ при \;\; i = j+m-n; \\ a_{ij} = 0 \\ при \;\; i \ne j+m-n \end{cases}$$

где Δb_i - некоторое изменение в объеме выполнения j-го задания ($j = i - m_1 - m_2 - m_3$) по отношению к предусмотренному текущим планом, возможное , исходя из при условий обеспеченности необходимыми ресурсами (таблица 2).

3. Для объектов, где часть материалов приобретается за счет авансов заказчика, а часть – за счет прибыли, остающейся в распоряжении подрядной организации (таблица 3).

Очевидно, что в данном случае $m_2 = 1 + K$, $m_4 = n$, $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, $m = m_1 + m_3 + n + K + 1$.

4. Для объектов, где материалы приобретаются полностью за счет прибыли, остающейся в распоряжении подрядной организации ***ограничения формулируются так же, как и на предыдущем этапе, за исключением ограничений по материалам, которые имеют следующий вид*** (таблица 4).

Таблица 3.

Группа ограничений	Формулировка ограничений	Условные обозначения	Запись ограничений в общем виде
Ограничения по трудовым ресурсам	$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{j_l}}x_j \le M_l$, $l=\overline{1,m_3}$, $p'_{j_l}\neq 0$	$a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{j_l}}$ $b_i=M_{i-m_1-m_2}$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m_1}$
Ограничения по материалам (по размеру прибыли на приобретение материалов)	$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{K}r_{j_k}w_k-d_j)\le U$	$a_{ij}=a_{(m_1+1),j}=$ $=\sum_{k=1}^{K}r_{j_k}w_k-d_j$, $b_i=b_{m_1+1}=U$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=m_1+1$
	$\sum_{j=1}^{n}r_{j_k}x_j \le \sum_{j=1}^{n}r_{j_k}-R_k$, $k=\overline{1,K}$	$a_{ij}=r_{j_k}$ $b_i=\sum_{j=1}^{n}r_{j_{i-m_1-1}}-$ $-R_{i-m_1-1}$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=\overline{m_1+2,m_1+m_2}$
Ограничения по машинам и механизмам	$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{j_l}}x_j \le M_l$, $l=\overline{1,m_3}$, $p'_{j_l}\neq 0$	$a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{p'_{j_l}}$ $b_i=M_{i-m_1-m_2}$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=\overline{m_1+m_2+1,m_1+m_2+m_3}$
Ограничения по объемам выполнения работ	$x_j\le 1$	$\begin{cases}a_{ij}=1\\ \text{при}\ \ i=j+m-n;\\ a_{ij}=0\\ \text{при}\ \ i\neq j+m-n\end{cases}$ $b_i=1$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=\overline{m_1+m_2+m_3+1,m}$

Таблица 4.

Ограничения по материалам (по размеру прибыли на приобретение материалов)	$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}r_{j_k}w_k\le U$	$a_{ij}=a_{(m_1+1),j}=$ $=\sum_{k=1}^{K}r_{j_k}w_k$ $b_i=b_{m_1+1}=U$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=m_1+1$
	$\sum_{j=1}^{n}r_{j_k}x_j \le \sum_{j=1}^{n}r_{j_k}-R_k$, $k=\overline{1,K}$	$a_{ij}=r_{j_k}$ $b_i=\sum_{j=1}^{n}r_{j_{i-m_1-1}}-$ $-R_{i-m_1-1}$	$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i$, $i=\overline{m_1+2,m_1+m_2}$

При переходе от одного этапа к другому оставшийся объем ресурсов уменьшается на величину, соответствующую распределенному на данном этапе количеству. Отметим, что если какой-то материал имеется на складе подрядной организации, то при решении задачи оперативного управления мы не принимаем в расчет его количество в физических единицах, а приобретаем этот материал сами у себя.

Выражения (1) – (3) представляют собой задачу линейного программирования в симметричной форме. Двойственная к ней задача имеет вид:

$$F=\sum_{i=1}^{m}b_i y_i \quad (min) \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \ge c_j \quad (j=\overline{1,n}) \tag{7}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,m}) \tag{8}$$

Двойственная задача имеет следующую экономическую интерпретацию. Оценки $y_i\,(i=\overline{1,m-n})$ представляют минимальные производительности соответствующих ресурсов (объем СМР на единицу ресурса), а оценки $y_i\,(i=\overline{m-n+1,m})$ - дополнительные средства, руб., которые потребуется привлечь, чтобы выполнить запланированный объем работ на j-м объекте ($j=i-m_1-m_2-m_3$), если соответствующие ресурсы будут использоваться на нем с минимальной эффективностью. Требуется определить оптимальные величины $y_i\,(i=\overline{1,m})$, которые минимизировали бы общую оценку F ресурсов, но при этом был бы выполнен максимально возможной объем СМР ($F=f$).

Таблица 5

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+i}	…	x_{n+m}
			c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	0	…	0	…	0
x_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	1	…	0	…	0
x_{n+2}	0	b_2	a_{12}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	0	…	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+i}	0	b_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	0	…	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	…	0	…	1
f		Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_j	…	Δ_n	0	…	0	…	0

Таблица 6

x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+i}	…	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	…	y_{m+j}	…	y_{m+n}	y_1	y_2	…	y_i	…	y_m

Для решения двойственной задачи симплексным методом ее помещают в симплексную таблицу (таблица 5). В таблице приняты следующие условные обозначения: $c_Б$ - вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $A_0 = (b_1;\ b_2;\ ...;\ b_m)^T$ - вектор-столбец свободных членов; $A_j = (a_{1j};\ a_{2j};\ ...;\ a_{mj})^T$ - вектор-столбец коэффициентов при переменных x_j. Последняя, $(m+1)$-я строка, называется индексной строкой целевой функции; число $\Delta_0 = c_Б\ A_0$ - значение целевой функции для начального опорного плана x_0, $\Delta_0 = f\ (x_0) = c_Б\ A_0$; числа $\Delta_j = c_Б\ A_j - c_j$ - оценки свободных переменных.

Между переменными двойственных задач существует соответствие, состоящее в том, что свободным переменным одной задачи соответствуют базисные переменные другой, и наоборот (таблица 6).

Оперативное планирование является практически детерминированным по сравнению с текущим, а тем более перспективным, поскольку опирается на достаточно точную информацию о фактическом состоянии работ и ресурсов к моменту планирования. При этом может оказаться, что при некотором достаточно малом интервале планирования существует только один общий дефицитный ресурс (лимитирующий) для данного набора работ: численность рабочих определенной квалификации, вид материалов, тип машин, размер прибыли на приобретение материалов. Производительность этого ресурса на каждом из объектов различна, поэтому его использование на различных объектах дает возможность выполнения разного объема работ. Для каждого данного набора объектов можно определить такое использование лимитирующего ресурса, которое даст наибольшую отдачу. Запись и решение задачи (1) – (3) при этом существенно упрощаются.

Коэффициенты a_{1j} в этом случае представляют собой затраты лимитирующего ресурса, необходимые для выполнения работ на j-м объекте (j-го задания) в полном объеме. Остальные коэффициенты a_{ij} входят в ограничения по объемам выполнения работ и определяются по следующему правилу:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \ \ \textit{при} \ \ i = j+1; \\ a_{ij} = 0 \ \ \textit{при} \ \ i \neq j+1; \end{cases} \qquad (9)$$

$$i = \overline{2,m}; \quad j = \overline{1,n}$$

Очевидно, что $m = n+1$. С учетом (9) ограничения (2) для задачи с одним лимитирующим ресурсом можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le b_1; \\ x_j \le b_{j+1} \ \ (j = \overline{1,n}) \end{cases} \qquad (2^*)$$

Ограничение (7) для двойственной задачи примет вид:

$$a_{1j} y_1 + y_{j+1} \ge c_j \ \ (j = \overline{1,n}) \qquad (7^*)$$

Свободные члены ограничений b_i ($i = \overline{2,m}$) определяются, исходя из условий обеспеченности выполняемых работ всеми остальными ресурсами, помимо лимитирующего ресурса. Так, если лимитирующим ресурсом для данного набора из n работ являются рабочие определенной специальности, можно записать:

$$b_i = \min \left\{ \frac{r_{(i-1)_k} - R_k}{r_{(i-1)_k}};\ \frac{M_l p'_{(i-1)_l}}{c_{i-1}} \right\}, \ \ r_{(i-1)_k} \neq 0, \ \ p'_{(i-1)_l} \neq 0 \qquad (10)$$

$$i = \overline{2,m}, \ \ k = \overline{1,K}, \ \ l = \overline{1,m_3},$$

где $r_{(i-1)_k}$ - количество единиц k-го вида материала, необходимое для выполнения j-го задания в объеме c_j, ед., $j = i-1$; $p'_{(i-1)_l}$ - производительность l-й машины при выполнении работ на j-м объекте, руб./ маш.-см, $j = i-1$.

Двойственная задача в такой постановке имеет следующую экономическую интерпретацию. Предположим, что лимитирующий ресурс будет использоваться на всех объектах с одинаковой производительностью $y_1 = \min p_i$, $i \in$ (БП), т. е. с минимальной из его производительностей на тех объектах, которые входят в базис оптимального плана. Оценка

Таблица 7

БП	$c_Б$	A_0	x_1	x_2	…	x_{i-1}	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+i}	…	x_{n+m}
			c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	0	0	…	0	…	0
x_{n+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	…	$a_{1,(i-1)}$	…	a_{1n}	1	0	…	0	…	0
x_{n+2}	0	b_2	1	0	…	0	…	0	0	1	…	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+i}	0	b_i	0	0	…	1	…	0	0	0	…	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	0	b_m	0	0	…	0	…	1	0	0	…	0	…	1
f		Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_{i-1}	…	Δ_n	0	0	…	0	…	0

$y_i\,(i=\overline{2,m})$ представляет дополнительный объем средств, который потребуется привлечь, чтобы выполнить запланированный объем работ на j-м объекте ($j=i-1$). Требуется определить оптимальные величины $y_i\,(i=\overline{1,m})$, которые минимизировали бы общую оценку F лимитирующего ресурса и привлекаемых средств, но при этом был бы выполнен максимально возможной объем СМР ($F=f$).

Распределение лимитирующего ресурса по объектам производится, начиная с тех объектов, на которых он используется с максимальной производительностью, с учетом ограничений по объемам выполнения работ, определяемым в соответствии с (10). Постановка двойственной задачи в данном случае целесообразна с точки зрения проведения послеоптимизационного анализа.

При решении задачи распределения как одного, так и нескольких дефицитных ресурсов важно не только получить оптимальный план, но и провести послеоптимизационный анализ модели. Все необходимые данные для такого анализа можно получить из результирующей симплексной таблицы непосредственно или в результате достаточно простых вычислений [3]. Послеоптимизационный анализ включает два этапа:

1. анализ оптимального решения;
2. анализ внутренней структуры модели:

- анализ коэффициентов целевой функции;
- анализ ограничений по ресурсам;
- анализ коэффициентов организационно-технологической матрицы.

Двойственные оценки являются показателем влияния ограничений на значение целевой функции [2]. В математическом программировании доказывается теорема двойственности (теорема об оценках): в оптимальном решении двойственной задачи значения переменных y_i^* (оценок) численно равны частным производным $\partial f_{\max}/\partial b_i$ для исходной задачи

$$y_i^*=\partial f_{\max}/\partial b_i$$

Если заменить дифференциалы на приращения, то получим: $\Delta f_{\max}\approx y_i^*\Delta b_i$. Отсюда при $\Delta b_i=1$ следует, что $y_i^*=\Delta f_{\max}$, т. е. величина двойственной оценки численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу.

При незначительном приращении Δb_i является точной мерой влияния ограничений на целевую функцию. Практический интерес представляет определение предельных значений ограничений (верхней и нижней границ), в которых величины оценок остаются неизменными – допустимых интервалов устойчивости оценок.

Интервал устойчивости оценок по отношению к i-му ограничению имеет вид:

$$[\,b_i-\Delta\underline{b}_i;\ b_i+\Delta\overline{b}_i\,]\ \ (i=\overline{1,m}) \tag{11}$$

где $\Delta\underline{b}_i$ - нижний предел уменьшения, а $\Delta\overline{b}_i$ - верхний предел увеличения, определяемые по формулам:

$$\Delta\underline{b}_i=\min_{\substack{j\\ d_{ij}>0}}\left\{\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\};\ \ \Delta\overline{b}_i=\max_{\substack{j\\ d_{ij}<0}}\left\{\frac{x_j^*}{d_{ij}}\right\} \tag{12}$$

Для определения d_{ij} составляется матрица $A^{-1}=\left[d_{ij}\right]$, обратная матрице базиса оптимального плана $A=[\,a_{ij}\,]$.

Таким образом, чтобы узнать максимальное изменение целевой функции (например, объема СМР) при изменении уровня ресурса или процента выполнения задания, необходимо найти интервалы устойчивости двойственных оценок, в пределах которых они точно измеряют влияние ограничений на целевую функцию.

Пусть имеется возможность приобрести дополнительно i-й ресурс в объеме $\Delta\overline{b}_i$ и цена единицы ресурса составляет s_i. Приращение прибыли составит $\Delta f_{i\max}=\Delta\overline{b}_i y_i^*$, а затраты на приобретение ресурса $\Delta s_i=\Delta\overline{b}_i s_i$. Данное мероприятие будет эффективным, если оно обеспечит увеличение значения целевой функции (например, рост объемов СМР), т. е. будет выполняться условие $\Delta f_{i\max}-\Delta s_i>0$, с. е. $y_i^*>s_i$.

Целесообразность включения в план новых объемов работ определяется из условия

$$\sum_{i=1}^{m-n}a_{i,(n+1)}y_i^*\le c_{n+1},$$

где $a_{i,(n+1)}$ - затраты соответствующих ресурсов на выполнение новых работ в объеме c_{n+1}, $i=\overline{1,..,m-n}$.

Как следует из приведенного описания математического аппарата, он адекватно отражает содержательную постановку задачи оперативного планирования в строительстве.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Организация, экономика и управление строительством/ Т. Н. Цай, Л. Н. Лаврецкий, А. Е. Лейбман, К. Г. Романова; Под ред. Т. Н. Цая. – М.: Стройиздат, 1984. – 367 с.

2. Руководство к решению задач по математическому программированию/ А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич; Под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн.: Выш. шк., 2001. – 448 с.
3. Высшая математика: Мат. программирование/ А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод; Поб общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн.: Выш. шк., 2001. – 351 с.
4. Методическое руководство по оперативно-производственному планированию в строительных организациях с применением ЭВМ /ВНИПИ труда в строительстве. – М.: Стройиздат, 1981. – 183 с.
5. Блюмберг В. А., Глущенко В. Ф. Какое решение лучше?: Метод расстановки приоритетов. – Л.: Лениздат, 1982. – 160 с.
6. Мухин В. И. Исследование систем управления.. – М.: Экзамен, 2002. – 384 с.

УДК 69.022:691.421:(620.173+539.386).001.5

Алявдин П.В., Симбиркин В.Н., Эпштейн В.Л.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ КИРПИЧНЫХ СТЕН ПРИ СЖАТИИ И СДВИГЕ

1. Введение

В настоящее время известны многочисленные теоретические и экспериментальные исследования кирпичных конструкций зданий из полнотелого керамического кирпича [1-5]. Гораздо меньше экспериментальных исследований выполнено для конструкций из эффективного пустотелого кирпича, несмотря на то, что он широко применяется на практике и обладает рядом важных достоинств.

В данной работе представлены результаты экспериментального и теоретического исследования поведения больших моделей кирпичных стен, выполненных из керамического пустотелого кирпича. Опытные образцы стен нагружались в своей плоскости: 1) местной сжимающей нагрузкой и 2) сочетанием преобладающей сдвигающей нагрузки и вертикального пригруза.

Для каждого нагружения выполнены две серии испытаний образцов. При нагружении местным сжатием в каждой серии прикладывалась вертикальная сжимающая сила, расположенная на различном расстоянии от края стенки. В исследованиях работы кладки на сдвиг к образцам каждой серии прикладывалась горизонтальная сосредоточенная нагрузка при различном уровне вертикального пригруза. В первой серии сдвигающая горизонтальная нагрузка сочеталась с вертикальным кинематическим ограничением, предотвращающим опрокидывание стенок в своей плоскости. Возникающий при этом вертикальный пригруз изменялся в процессе нагружения и был минимально возможным. Во второй серии горизонтальная нагрузка сочеталась с заданным постоянным вертикальным пригрузом стенок.

Испытания проводились до полного разрушения образцов с измерением соответственно вертикальных или горизонтальных перемещений по высоте стенок на всех стадиях нагружения. Оценена сопротивляемость стенок преобладающему воздействию по прочности и по деформативности.

2. Характеристики кладочных материалов и кладки

Для кладки опытных образцов стен использовались:

- Кирпич керамический с вертикальными квадратными пустотами, размер 250x120x88 мм. Каждый кирпич имел 21 пустоту с размерами 20x20 мм (пустотность 28%).
- Цементно-известковый раствор с массовым соотношением портландцемент/известь/песок, равным 1/0,3/4,3.

Прочностные характеристики кирпича и раствора определены экспериментально. Их средние величины представлены в табл. 1.

Прочностные и деформативные характеристики кладки при кратковременном сжатии определялись путем испытания пяти контрольных образцов-призм с размерами $lxhxt$=380x490x250 мм.

На каждом образце на четырех его сторонах на базе 200 мм были установлены индикаторы часового типа с ценой деления 0,001 мм, с помощью которых измерялись продольные и поперечные деформации кладки (рис. 1). По полученным величинам деформаций рассчитывали модуль деформации и коэффициент Пуассона кладки.

Во время проведения испытаний контролировали прочность раствора на сжатие, которая в среднем составила 9,9 МПа. Прочность пяти образцов находилась в пределах 8,4…11,1 МПа, а средняя прочность кладки на сжатие составила σ_{ult}=9,3 МПа.

Усредненные кривые изменения деформативных характеристик кладки в зависимости от уровня нагружения приведены на рис. 1.

Начальный модуль упругости кладки рассчитывали по методике С.А. Семенцова [7] с использованием логарифмической зависимости между напряжениями и относительными деформациями, предложенной проф. Л.И. Онищиком:

$$\varepsilon = -\frac{\mu\sigma_{ult}}{E_0}\ln\left(1-\frac{\sigma}{\mu\sigma_{ult}}\right), \qquad (1)$$

где ε – среднее значение относительных деформаций сжатия кладки по результатам испытаний при напряжении σ;

σ – среднее напряжение сжатия в испытанных образцах;

μ – коэффициент пластичности, зависящий от вида кладки.

Значение начального модуля упругости кладки при центральном сжатии E_0, определенное таким образом, составило 11290 МПа.

3. Испытание стенок на местное сжатие

Для испытаний кирпичных стен на действие сосредоточенной вертикальной нагрузки было изготовлено шесть образцов с одинаковыми размерами $lxhxt$=1500x1500x120 мм.

Таблица 1. Прочность материалов кладки опытных образцов

Прочность кирпича, МПа		Прочность раствора, МПа	
на сжатие (получена в соответствии с Британским стандартом BS 3921 [6], приложение D)	**на растяжение** (получена путем испытания кирпича на изгиб)	**на сжатие** (получена путем испытания кубов со стороной 70,7 мм)	**на сдвиг** (получена путем испытания на сдвиг фрагмента конструкции из трех кирпичей)
31,6	2,3	9,9…12,7	0,23