УДК 519.3

Игнатюк В.И., Игнатов А.Ю.

ОБ УЧЕТЕ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ В РАСЧЕТАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В реальных сооружениях соединение стержней в узлах чаще всего не является идеально жестким либо шарнирным, а имеет определенную упругую податливость, которая обычно не учитывается в расчетах, но может существенно влиять на распределение усилий в системе. Для учета этого фактора необходимо в методике расчета учитывать возможность упругой податливости узловых соединений, что и предлагается в полученных авторами зависимостях для метода конечных элементов (МКЭ).

Разрешающие уравнения МКЭ имеют вид [1, 3]

$$[K]\cdot\{\Delta\}=\{P\}, \tag{1}$$

где $[K]$ – матрица жесткости системы; $\{\Delta\}$ – вектор перемещений узлов системы; $\{P\}$ – вектор внешних нагрузок. При учете упругой податливости присоединения стержней (конечных элементов) к узлам должны быть внесены соответствующие изменения в матрицу жесткости системы $[K]$ и в вектор внешних нагрузок $\{P\}$. Матрица жесткости системы формируется [1, 3] из матриц жесткости отдельных конечных элементов (стержней), поэтому учет упругой податливости их присоединения к узлам может быть выполнен на уровне определения матриц жесткости конечных элементов.

Пространственный стержневой конечный элемент имеет 12 степеней свободы (рис. 1), и матрица жесткости его будет иметь размер 12х12, в которой каждый из ее коэффициентов $r_{ik}\ (i=1\ldots12,\ k=1\ldots12)$ представляет собой реакции на концах КЭ в направлении i-ой связи от единичного перемещения k-ой (рис. 2, 3). Выражения для коэффициентов r_{ik} в местной системе координат можно получить из анализа внутренних усилий в таком элементе от действия единичных перемещений соответствующих связей. Заметим при этом, что внутренние усилия $M_x=M_{кр}$, M_y, M_z, N в пространственном стержневом конечном элементе являются независимыми друг от друга, и поэтому соответствующие каждому из них перемещения не будут вызывать деформаций и усилий других представленных видов. Например, перемещение одного из концов стержня вдоль оси x' (что соответствует продольной деформации стержня и появлению продольной силы в нем) не будет вызывать усилий $M_x=M_{кр}$, M_y, M_z. Поэтому соответствующие коэффициенты в матрице жесткости элемента будут нулевыми. Рассмотрим пространственный стержневой конечный элемент, присоединяющийся к узлам дискретной модели МКЭ с помощью упругих связей (рис. 1, 2), жесткости которых равны: c_1, c_2, c_3 и c_7, c_8, c_9 – жесткости линейных упругих связей по направлениям осей x', y' и z' соответственно в начале и конце стержня; c_4, c_5, c_6 и c_{10}, c_{11}, c_{12} – жесткости угловых упругих связей, работающих относительно осей x', y', z', соответственно в начале и конце стержня. На рис.4, 5, 6 показаны внутренние усилия и реакции связей для такого стержневого КЭ от перемещений $\delta_2'=1,\ \delta_4'=1,\ \delta_6'=1,$ полученные при его расчете методом сил аналогично тому, как это сделано для плоского стержня в работе [2]. Аналогично получаются усилия и реакции связей для рассматриваемого КЭ и от перемещений $\delta_1'=1,\ \delta_3'=1,\ \delta_5'=1$. Матрица жесткости КЭ в местной системе координат в результате будет иметь вид (1), где обозначено:

$$k_N=\frac{1}{t_1};\qquad k_G=\frac{1}{t_5};\qquad k_1=\frac{t_4}{t_2t_4-3t_3^2};$$

$$k_2=\frac{t_3+t_4}{t_2t_4-3t_3^2};\qquad k_3=\frac{1}{3t_4}+\frac{t_3}{t_4}k_2;$$

$$k_4=\frac{t_4-t_3}{t_2t_4-3t_3^2};\qquad k_5=\frac{1}{3t_4}-\frac{t_3}{t_4}k_4;$$

$$k_6=\frac{t_8}{t_6t_8-3t_7^2};\qquad k_7=\frac{t_7+t_8}{t_6t_8-3t_7^2}; \tag{2}$$

$$k_8=\frac{1}{3t_8}+\frac{t_7}{t_8}k_7;\quad k_9=\frac{t_8-t_7}{t_6t_8-3t_7^2};\quad k_{10}=\frac{1}{3t_8}-\frac{t_7}{t_8}k_9,$$

с учетом того, что:

$$t_1=1+\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_7}\right)\frac{EA}{l};$$

$$t_2=1+\left(\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_8}\right)\frac{12EJ_z}{l^3}+\left(\frac{1}{c_6}+\frac{1}{c_{12}}\right)\frac{3EJ_z}{l};$$

$$t_3=\left(\frac{1}{c_{12}}-\frac{1}{c_6}\right)\frac{EJ_z}{l};$$

$$t_4=1+\left(\frac{1}{c_6}+\frac{1}{c_{12}}\right)\frac{EJ_z}{l};\ t_5=1+\left(\frac{1}{c_4}+\frac{1}{c_{10}}\right)\frac{GJ_{кр}}{l}; \tag{3}$$

$$t_6=1+\left(\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_9}\right)\frac{12EJ_y}{l^3}+\left(\frac{1}{c_5}+\frac{1}{c_{11}}\right)\frac{3EJ_y}{l};$$

$$t_7=\left(\frac{1}{c_{11}}-\frac{1}{c_5}\right)\frac{EJ_y}{l};\ t_8=1+\left(\frac{1}{c_5}+\frac{1}{c_{11}}\right)\frac{EJ_y}{l}.$$

Задав величины жесткостей всех связей $c_1 \ldots c_{12}$ равными бесконечности, получим матрицу жесткости пространственного КЭ с жестким присоединением его концов к узлам. Если же жесткости c_4, c_5, c_6 либо c_{10}, c_{11}, c_{12} принять равными нулю, то получим матрицу жесткости для пространственного КЭ с шарнирным соединением соответственно на левом либо правом его концах.

Игнатюк Валерий Иванович, *к.т.н., доцент, зав. каф. строительной механики Брестского государственного технического университета.*
Игнатов Алексей Юрьевич, *студент строительного факультета Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$
[\mathbf{K}'_э] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
\frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EJ_z}{l^3}k_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2}k_2 & 0 & -\frac{12EJ_z}{l^3}k_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2}k_4 \\
0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3}k_6 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2}k_7 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3}k_6 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2}k_9 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2}k_7 & 0 & \frac{3EJ_y}{l}(k_7+k_8) & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2}k_7 & 0 & \frac{3EJ_y}{l}(k_7-k_8) & 0 \\
0 & \frac{6EJ_z}{l^2}k_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l}(k_2+k_3) & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2}k_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l}(k_2-k_3) \\
\hline
-\frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l}k_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EJ_z}{l^3}k_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2}k_2 & 0 & \frac{12EJ_z}{l^3}k_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2}k_4 \\
0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3}k_6 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2}k_7 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3}k_6 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2}k_9 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2}k_9 & 0 & \frac{3EJ_y}{l}(k_7-k_8) & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2}k_9 & 0 & \frac{3EJ_y}{l}(k_9+k_{10}) & 0 \\
0 & \frac{6EJ_z}{l^2}k_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l}(k_2-k_3) & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2}k_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ_z}{l}(k_4+k_5)
\end{array}\right]
$$

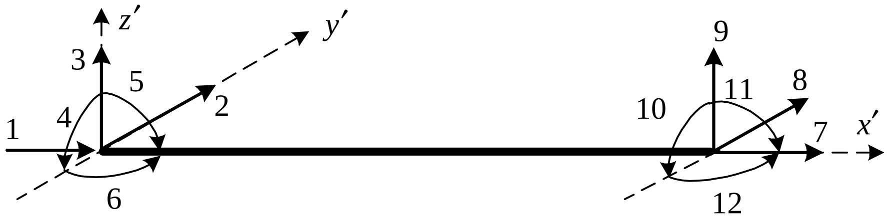
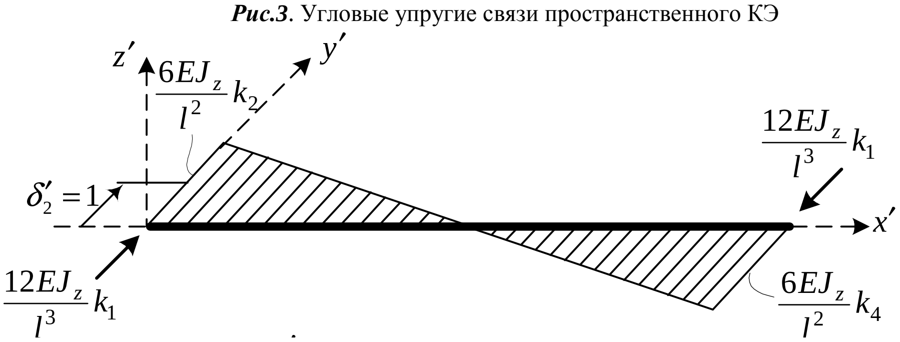


Рис.1. Направление перемещений и усилий пространственного КЭ

Рис.2. Линейные упругие связи пространственного КЭ

Рис.3. Угловые упругие связи пространственного КЭ



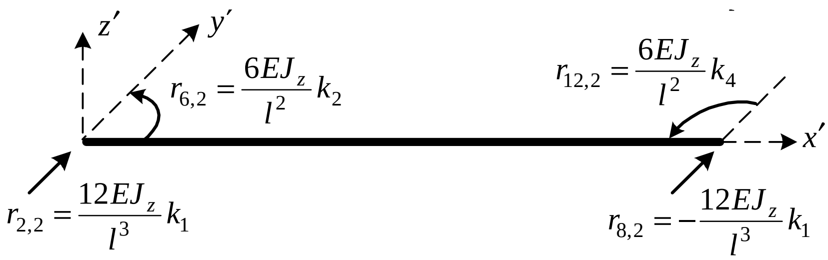


Рис. 4. Эпюра усилий и реакции связей в пространственном КЭ от $\boldsymbol{\delta_2' = 1}$

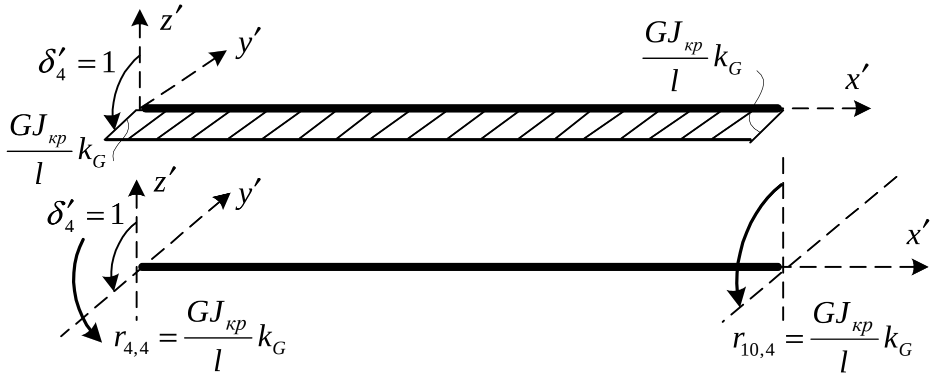


Рис. 5. Эпюра усилий и реакции связей в пространственном КЭ от $\boldsymbol{\delta_4' = 1}$

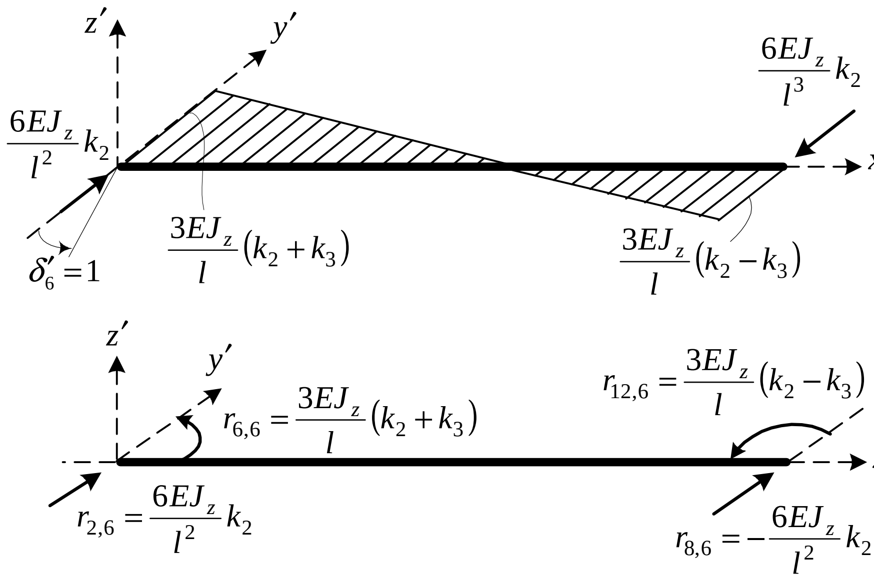


Рис. 6. Эпюра усилий и реакции связей в пространственном КЭ от $\boldsymbol{\delta_6' = 1}$

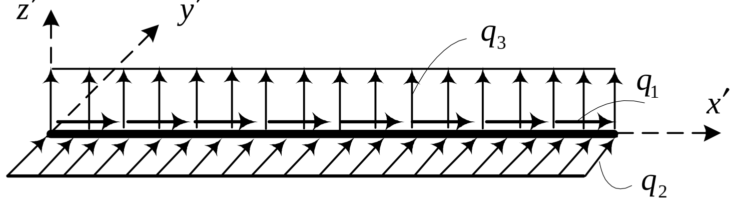


Рис. 7. Равномерно распределенные нагрузки на КЭ

Аналогично могут быть получены и вектора узловых нагрузок для пространственного стержневого КЭ, загруженного распределенными нагрузками. Например, при действии на рассматриваемый стержень с 12-ю упругими связями равномерно распределенных нагрузок, представленных на рис.7, вектор узловых сил и моментов по направлениям, показанным на рис. 1, будет иметь вид

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} P'_{q1} \\ P'_{q2} \\ P'_{q3} \\ P'_{q4} \\ P'_{q5} \\ P'_{q6} \\ P'_{q7} \\ P'_{q8} \\ P'_{q9} \\ P'_{q10} \\ P'_{q11} \\ P'_{q12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{q_1 l}{2}\left(2 - f_{q1}\right) \\ \dfrac{q_2 l}{2}\left(1 - f_{q2}\right) \\ \dfrac{q_3 l}{2}\left(1 - f_{q4}\right) \\ \hline 0 \\ -\dfrac{q_3 l^2}{12}\left(1{,}5 - 3 f_{q4} - f_{q5}\right) \\ \dfrac{q_2 l^2}{12}\left(1{,}5 - 3 f_{q2} - f_{q3}\right) \\ \hline \dfrac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \dfrac{q_2 l}{2}\left(1 + f_{q2}\right) \\ \dfrac{q_3 l}{2}\left(1 + f_{q4}\right) \\ \hline 0 \\ \dfrac{q_3 l^2}{12}\left(1{,}5 + 3 f_{q4} - f_{q5}\right) \\ -\dfrac{q_2 l^2}{12}\left(1{,}5 + 3 f_{q2} - f_{q3}\right) \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

где введены обозначения:

$$f_{q1} = \frac{t_{q1}}{t_1};\quad f_{q2} = \frac{3t_{q2}t_4 - t_{q3}t_3}{6t_3^2 - 2t_2t_4};\quad f_{q3} = 3 f_{q2}\frac{t_3}{t_4} + \frac{t_{q3}}{2t_4};$$

$$f_{q4} = \frac{3t_{q4}t_8 - t_{q5}t_7}{6t_7^2 - 2t_6t_8};\quad f_{q5} = 3 f_{q4}\frac{t_7}{t_8} + \frac{t_{q5}}{2t_8}, \qquad (5)$$

в которых учтено, что $t_{q1} = 1 + \dfrac{2EA}{c_1 l}$;

$$t_{q2} = \frac{EJ_z}{l}\left(\frac{1}{c_{12}} - \frac{1}{c_6}\right) + \frac{8EJ_z}{l^3}\left(\frac{1}{c_8} - \frac{1}{c_2}\right);$$

$$t_{q3} = 1 + \frac{3EJ_z}{l}\left(\frac{1}{c_6} + \frac{1}{c_{12}}\right);$$

$$t_{q4} = \frac{EJ_y}{l}\left(\frac{1}{c_{11}} - \frac{1}{c_5}\right) + \frac{8EJ_y}{l^3}\left(\frac{1}{c_9} - \frac{1}{c_3}\right); \qquad (6)$$

$$t_{q5} = 1 + \frac{3EJ_y}{l}\left(\frac{1}{c_5} + \frac{1}{c_{11}}\right);$$

t_1, t_2, t_3, t_4, t_6, t_7, t_8 – см. (3).

Вектор узловых сил и моментов при действии на стержень распределенных нагрузок, изменяющихся по треугольным законам (рис. 8), имеет вид

$$\{P'_4\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{q_1 l}{6}\left(3 - s_{q1}\right) \\ \dfrac{q_2 l}{20}\left(10 - u_{q1}\right) \\ \dfrac{q_3 l}{20}\left(10 - u_{q4}\right) \\ \hline 0 \\ -\dfrac{q_3 l^2}{120}\left(20 + u_{q5} - 6u_{q4}\right) \\ \dfrac{q_2 l^2}{120}\left(20 + u_{q2} - 6u_{q1}\right) \\ \hline \dfrac{q_1 l}{6} s_{q1} \\ \dfrac{q_2 l}{20} u_{q1} \\ \dfrac{q_3 l}{20} u_{q4} \\ \hline 0 \\ \dfrac{q_3 l^2}{120} u_{q5} \\ -\dfrac{q_2 l^2}{120} u_{q2} \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

где введены обозначения:

$$u_{q1} = \frac{8s_{q2}u_3 - 5s_{q3}u_2}{4u_1u_3 - 3u_2^2};\quad u_{q2} = \frac{3u_2u_{q1} - 5s_{q3}}{u_3};$$

$$u_{q4} = \frac{8s_{q5}u_6 - 5s_{q6}u_5}{4u_4u_6 - 3u_5^2};\quad u_{q5} = \frac{3u_5u_{q4} - 5s_{q6}}{u_6} \qquad (8)$$

с учетом

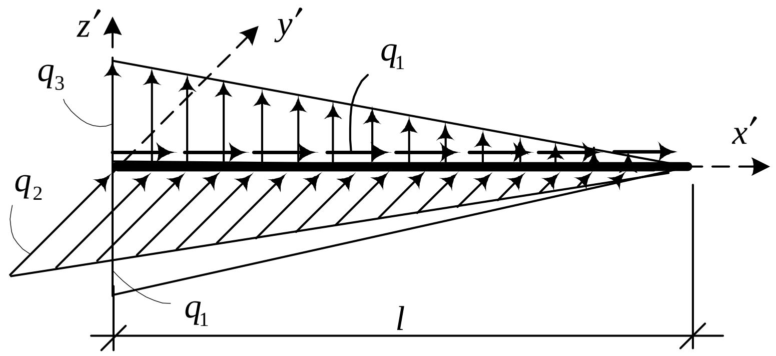


Рис. 8. Нагрузки на КЭ, распределенные по треугольным законам

$$s_{q1}=\frac{t_0}{t_1};\quad s_{q2}=1+\frac{15EJ_Z}{c_2l^3}+\frac{5EJ_Z}{c_6l};\quad s_{q3}=1+\frac{4EJ_Z}{c_6l};$$

$$s_{q5}=1+\frac{15EJ_y}{c_3l^3}+\frac{5EJ_y}{c_5l};\qquad s_{q6}=1+\frac{4EJ_y}{c_5l};$$

$$u_1=1+\frac{3EJ_z}{l^3}\left(\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_8}\right)+\frac{3EJ_z}{c_6l};\quad u_2=1+\frac{2EJ_z}{c_6l};\tag{9}$$

$$u_3=1+\left(\frac{1}{c_6}+\frac{1}{c_{12}}\right)\frac{EJ_z}{l};\quad u_4=1+\frac{3EJ_y}{l^3}\left(\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_9}\right)+\frac{3EJ_y}{c_5l};$$

$$u_5=1+\frac{2EJ_y}{c_5l};\qquad u_6=1+\left(\frac{1}{c_5}+\frac{1}{c_{11}}\right)\frac{EJ_y}{l};$$

$$t_0=1+\frac{3EA}{c_1l};\ t_1\rightarrow\ см.\ \ (3).$$

При задании для выражений векторов (4) и (7) величин жесткостей упругих связей равных бесконечности получим жесткие присоединения КЭ к узлам, а при задании величин c_4, c_5, c_6 и c_{10}, c_{11}, c_{12}, равными нулю получим шарнирное соединение стержня слева и справа и соответственно вектора узловых нагрузок для этих соединений.

Полученные выражения позволяют выполнять расчеты пространственных стержневых систем методом конечных элементов с учетом упругой податливости соединений элементов в узлах и оценивать влияние такого соединения на величины и распределение усилий в сооружениях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 423с.
2. Игнатюк В.И., Богомолов Д.В. О формировании разрешающих уравнений МКЭ в расчетах плоских стержневых систем с учетом упругой податливости узловых соединений // Вестник БГТУ. – 2003. – № 1(19): Строительство и архитектура. – С. 71 – 75.
3. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. – Л.: ЛГУ, 1987. – 224 с.

УДК 539.319

Кофанов В.А., Никитин В.И.

ПОЛЯ ВЛАГОСОДЕРЖАНИЯ И НАПРЯЖЕНИЙ В УВЛАЖНЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ ПРИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СУШКЕ

ВВЕДЕНИЕ

При воздействии внешней среды капиллярно-пористые материалы ограждающих конструкций зданий и сооружений непрерывно претерпевают изменения температуры и влажности, вызывающие появление в них температурных и влажностных деформаций. Вследствие неравномерного распределения этих деформаций по объему в материалах конструкции возникают внутренние напряжения, которые приводят к появлению микро- и макротрещин.

Свыше сорока лет назад Александровский С.В. в своей монографии [1] указал на необходимость учета температурно-влажностных воздействий при расчете бетонных и железобетонных конструкций. В настоящее время за рубежом проявляют все большее внимание к этой проблеме. В подтверждение сказанному можно привести, например, работы [2, 3]. Однако в нашей республике работы в данном направлении практически отсутствуют.

В представленной работе расчетным путем определены поля влагосодержания и напряжений в цилиндрической стенке, внутренняя поверхность которой гидроизолирована, а наружная поверхность контактирует с воздушной средой, имеющей постоянную температуру и относительную влажность.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для определения полей влагосодержания в цилиндрической стенке из капиллярно-пористого материала использована разработанная нами математическая модель [4]. В рамках этой модели рассматривается осесимметричная задача для стенки единичной высоты, которая разбивается на ряд слоев одинаковой толщины.

При определении напряжений, возникающих в каждом элементарном слое толщиной Δr, значение температуры T, влажности W и модуля упругости E принимаются для срединной изотермической поверхности. С учетом аддитивности температурных и влажностных деформаций радиальные σ_r и тангенциальные σ_θ напряжения определяются из соотношений [5]:

$$\sigma_r=-E\frac{1}{b^2}\int_a^b(\alpha T+\beta W)rdr+\frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu)-C_2(1-\nu)\frac{1}{b^2}\right],\tag{1}$$

$$\sigma_\theta=E\frac{1}{b^2}\int_a^b(\alpha T+\beta W)rdr-E(\alpha T+\beta W)+\frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu)+C_2(1-\nu)\frac{1}{b^2}\right],$$

где E – модуль упругости материала, МПа;

T – приращение температуры стенки во времени, °С;

W – приращение относительной влажности стенки во времени, %;

ν – коэффициент Пуассона;

a – внутренний радиус элементарного слоя, м;

b – наружный радиус элементарного слоя, м;

r – радиус срединной изотермической поверхности слоя, м;

α – коэффициент линейного расширения, 1/град;

β – коэффициент влажностной усадки, 1/%;

C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Кофанов Валерий Анатольевич, *аспирант каф. строительной механики Брестского государственного технического университета.*

Никитин Вадим Иванович, *д.т.н., профессор Политехники Белостоцкой (Польша) и Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.