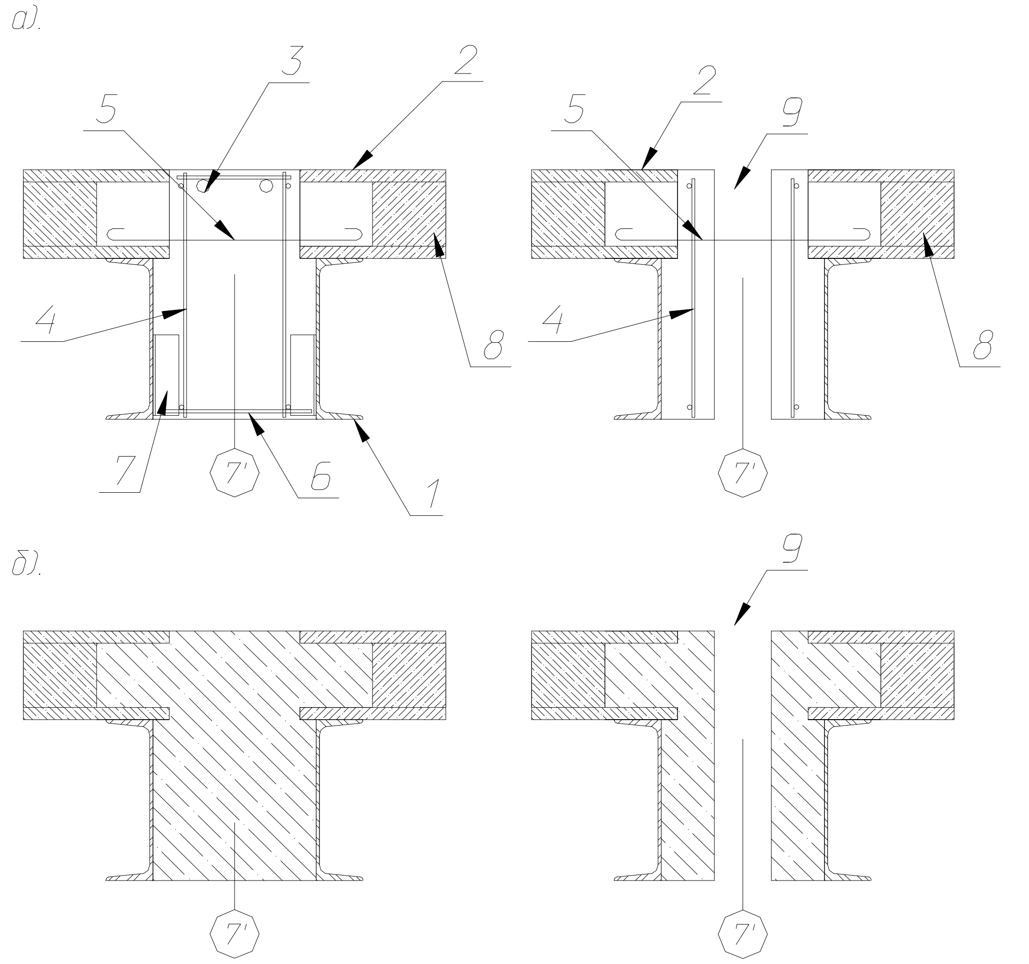


Рис.4. Сечения ригеля: а) на стадии возведения, б) на стадии эксплуатации.

200·250 мм для вентиляции и других коммуникаций. При возведении здания требуется применять специальную последовательность монтажных и бетонных работ обеспечивающую исключение дополнительных нагрузок на сталежелезобетонные конструкции с бетоном, не набравшим проектной прочности.

Выводы

Предлагаемое конструктивное решение увеличивает предел огнестойкости традиционных стальных ригелей степень огнестойкости зданий.

Горизонтальные гибкие упоры устанавливаемые в сжатой зоне стальных ригелей, обеспечивают их общую устойчивость в процессе монтажа и эксплуатации.

Включение в работу ригелей на изгиб железобетонных плит с анкерными устройствами в виде шпилек и заполненными бетоном пустотами при выполнении железобетонной части ригелей обеспечивает дополнительную надежность здания, позволяет отказаться от установки дополнительных связей в их плоскости.

УДК 624.012.45: 666.972.07: 539.4

Алявдин П.В.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СЕЧЕНИЙ ОБОЛОЧЕК
1. ПОВТОРНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ И ТОНКОСТЕННЫХ СЕЧЕНИЙ

1. Введение

В данной работе сформулирована и решена проблема приспособляемости и несущей способности поперечных сечений однородных изотропных оболочек различной толщины (толстостенных, средней толщины и тонкостенных) при малоцикловом повторно-переменном нагружении, квазистатически изменяющемся во времени. Эта проблема наиболее естественно решается численным путем в трехмерной постановке [1 - 3]; однако здесь основное внимание уделено отысканию решений в квадратурах в двумерной постановке, аналогично подходу [4, 5]. При этом для толстостенных оболочек решения содержат некоторую (допустимую для практических

Алявдин Петр Владимирович*, профессор, доктор технических наук. Кафедра строительной механики Политехника Зеленогурской, Зеленая Гура, Польша. E-mail: palawdin@brick.wbis.pz.zgora.pl.*

целей) погрешность, а для оболочек средней толщины оказываются точными. Разница в двух последних подходах проявляется только при вычислении „упругих" напряжений или аналитическими, или численными методами.

Для данной проблемы представлены прямая (статическая) и двойственная (кинематическая) оптимизационные формулировки, а также обобщенная задача Лагранжа. На основе метода множителей Лагранжа предложены алгоритмы решения, разработаны компьютерные программы и численно исследована прочность сечений циклически нагруженных тонкостенных оболочек.

Полученные здесь результаты позволяют оценить существующие решения для несущей способности тонких оболочек и пластин при повторно-переменном нагружении [6-10], а также возможные новые решения для оболочек средней толщины [11]. Особый интерес такой подход будет иметь для анизотропных элементов из композитных материалов, рассчитываемых по уточненным теориям [12].

Данный подход применен далее при анализе несущей способности оболочек [13-15], а при однократном нагружении, когда необходимо использовать двумерную постановку (см. Статью-2 автора ниже); его можно использовать также для анализа стыков и соединений элементов [16, 17].

2. Постановка задачи. Определяющие соотношения

1. Здесь рассмотрена задача определения несущей способности сплошных поперечных сечений как элемента оболочек при малоцикловом повторно-переменном нагружении; оболочки выполнены из однородного идеально пластического материала. Эта задача заключается в построении некоторой области прочности сечения, зависящей от характеристик циклов нагружения при всех возможных расчетных комбинациях усилий.

Несущую способность элемента определяем на основе теории приспособляемости. Геометрически нелинейные эффекты не учитываем (см. [28]).

Вводим ортогональную систему координат $0xyz$ (криволинейная система координат для оболочек рассмотрена, например, в [11]). Учитываем, хотя это и не обязательно, только статические граничные условия на поверхности S_f; кинематические граничные условия не рассматриваем. Вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ содержит все шесть компонент, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, $\sigma \in R^6$, при $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$, и задача для элемента не отличается от задачи для сплошного тела. Распределение напряжений σ_z по толщине оболочки принимаем заданным. Других предпосылок, в том числе гипотезы о плоских нормалях, не используем.

Вектор $\boldsymbol{S}$ усилий (внутренних сил) оболочки включает десять компонент: шесть сил (нормальных N_x, N_y, касательных или сдвигающих N_{xy}, N_{yx} и поперечных Q_x, Q_y), и четыре момента (изгибающих M_x, M_y и крутящих M_{xy}, M_{yx}) относительно соответствующих осей x, y сечения, $\boldsymbol{S} = (N_x, M_x, M_{xy}, N_{xy}, Q_x, N_y, M_y, M_{yx}, N_{yx}, Q_y)$, $\boldsymbol{S} \in \mathbf{R}^{10}$. Усилия предварительного напряжения и температурные воздействия рассмотрены здесь в качестве одного из видов действующей на сечение нагрузки, для которой вектор равнодействующих внутренних сил равен нулю.

2. Примем, что оболочка подвергается повторно-переменному нагружению $\boldsymbol{F}$, которое квазистатически изменяется произвольным образом в пределах некоторой заданной области Ω_F. В результате вектор усилий $\boldsymbol{S} = (N_x, M_x, M_{xy}, N_{xy}, Q_x, N_y, M_y, M_{yx}, N_{yx}, Q_y)$ изменяется в пределах области Ω_S, определенным образом связанной с Ω_F. Пусть область Ω_S аппроксимируется многогранником

$$\Omega_S = \{S \in \mathbf{R}^{10} : S = \sum_{j\in J} \alpha_j S_j,$$

$$\sum_{l\in L} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, j \in J\}, \tag{1}$$

где S_j - векторы расчетных сочетаний усилий в сечении при действии j–х сочетаний внешних воздействий на конструкцию (силовых, температурных и кинематических); α_j - вектор барицентрических координат, $j \in J$; J – множество сочетаний нагрузок и усилий; остальные обозначения традиционны. Заметим, что к вектору $\boldsymbol{S}$ можно добавить еще компоненты, связанные с температурными воздействиями; функции распределения этих воздействий по сечению известны.

В область Ω_S входит начало координат, или “нулевая” нагрузка $\boldsymbol{S} = \mathbf{0}$, соответствующая как естественному ненапряженному состоянию сечения, так и состоянию заданного предварительного напряжения сечения. Последнее состояние учитывается аналогично температурному.

3. Сформулируем исходную задачу для толстостенных оболочек. Вектор усилий оболочки $\boldsymbol{S} = (N_x, M_x, M_{xy}, N_{xy}, Q_x, N_y, M_y, M_{yx}, N_{yx}, Q_y)$, $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{R}^{10}$, статически эквивалентен заданной плотности поверхностных $\boldsymbol{f}$ сил в сечениях с нормалями x, y. Вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ содержит все шесть компонент, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{R}^6$, при $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. В этом случае многопараметрическая задача для сечения оболочки имеет такой же вид, как и для сплошного тела:

$$\sum_{j\in J} \Big(\int_V \mathbf{t}_{\mathrm{g}_j}^T \mathbf{g}_j dV + \int_{S_f} \mathbf{t}_{\mathrm{f}_j}^T \mathbf{f}_j dS_{\mathrm{f}} \Big) \to \max, \tag{1}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{K}) \leq 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^r, \tag{2), (3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \int_{S_f} \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{f}} \mathbf{f} dS_f + \int_V \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{g}} \mathbf{g} dV, \qquad (4) \qquad (2)$$

$$\wp \boldsymbol{\sigma}^r = 0, \boldsymbol{g} \in \Omega_g(g_j, j \in J)\ \forall x \in V, \tag{5), (6}$$

$$\wp_S \boldsymbol{\sigma}^r = 0, \boldsymbol{f} \in \Omega_f(f_j, j \in J)\ \forall x \in S_f. \tag{7), (8}$$

Здесь t_{gj}, t_{fj} – векторные поля весовых коэффициентов соответственно для плотности объемных (массовых) $\boldsymbol{g}$ и поверхностных $\boldsymbol{f}$ сил; ω_f, ω_g – векторные поля функций влияния Грина соответственно для плотности объемных (массовых) $\boldsymbol{g}$ и поверхностных $\boldsymbol{f}$ сил в сечении; $t_{gj}(x)$, $t_{fj}(x)$, $\boldsymbol{g}(x)$, $\boldsymbol{f}(x) \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{x} := (x, y, z)$; j – номер нагружения, $j \in J$. Области Ω_f, Ω_g изменения сил $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ соответствуют программе (1) нагружения оболочки. Вектор $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{R}^{kf}$ включает в себя константы пластичности; его размерность kf, например, для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, $kf = 2$; для обычных материалов $kf = 1$.

Напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ в $(2)_3$ для идеально упругопластического материала складываются из упругих $\boldsymbol{\sigma}^e$ и остаточных $\boldsymbol{\sigma}^r$ составляющих. Уравнения $(2)_5$, $(2)_7$ определяют самоуравновешенность остаточных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^r$ в объеме $\boldsymbol{V}$ и на поверхности сечения S_f оболочки; $\wp, \wp_S$ – соответственно дифференциальный и алгебраический операторы этих уравнений.

Неизвестными в задаче (2) будут $2(|J|+1)$ векторных полей j–х поверхностных f_j и объемных g_j сил, $j \in J$, полей сил $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$, а также векторное поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}^r \in \boldsymbol{R}^5$. Здесь через $|\boldsymbol{J}|$ обозначена размерность множества $\boldsymbol{J}$.

Области $\boldsymbol{\Omega_f}$, $\boldsymbol{\Omega_g}$ произвольно изменяющихся сил нагружения $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ задаются в (2) либо вершинами многогранной области (политопа типа (1)), либо неравенствами [4], образующими полиэдр.

Математическую модель задачи (2) на основе алгоритмов [4] можно преобразовать путем перехода к невыгоднейшим сочетаниям напряжений $\boldsymbol{\sigma}_l^e$, $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$; $\boldsymbol{L}$ - множество сочетаний. Тогда векторные поля сил $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ в задаче (2) будут исключены, но зато вместо простых ограничений $(2)_6$ - $(2)_8$ в большом количестве появятся сложные ограничения для $\boldsymbol{\sigma}_l^e$, $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$. Поэтому математические модели вида (2) в ряде случаев имеют преимущество перед обычным подходом; они были численно реализованы, видимо, впервые в работе [18].

Здесь сразу будем рассматривать отдельные $\boldsymbol{j}$–е нагружения, вместо их невыгоднейших $\boldsymbol{l}$–х сочетаний. Примем также, что множество $\boldsymbol{J}^*$ невыгоднейших нагружений, $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}^*$, уже определено [19] путем решения следующей задачи:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{g},\mathbf{f})+\boldsymbol{\sigma}^r,\mathbf{K}) \to \max_{j\in J}, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{g},\mathbf{f}) = \int_{S_f} \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{f}}\mathbf{f}d\boldsymbol{S}_f + \int_V \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{g}}\mathbf{g}d\boldsymbol{V}, \qquad (2) \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\Omega_f}(\boldsymbol{f_j}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}),\ \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\Omega_g}(\boldsymbol{g_j}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}), \qquad (3), (4)$$

при фиксировании всех остальных переменных.

В дальнейшем задачу приспособляемости оболочек решаем на основе следующей (хотя и не обязательной) гипотезы для векторного поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma_z} = \boldsymbol{f_z}(\boldsymbol{z}), \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{f_z}(\boldsymbol{z})$ – заданная функция, соответствующая условиям (2). Тогда вектор искомых напряжений в задаче (2) будет $\boldsymbol{\sigma}^r = (\boldsymbol{\sigma_x}^r, \boldsymbol{\sigma_y}^r, \boldsymbol{\tau_{xy}}^r, \boldsymbol{\tau_{yz}}^r, \boldsymbol{\tau_{zx}}^r)$, $\boldsymbol{\sigma}^r \in \boldsymbol{R}^5$. Для тонкостенных оболочек вместо условия (4) принимаем $\boldsymbol{\sigma_z} = \mathbf{0}$; кроме того, для них еще используем гипотезу о плоских нормалях.

4. Расчет оболочки сводим к анализу ее поперечного сечения, при этом никаких ограничений на очертание и характер нагружения оболочки не накладываем. Математически это означает, что задача (2) теории оптимального управления системой, состояние которой описывается дифференциальными уравнениями в частных производных $(2)_5$ и алгебраическими уравнениями $(2)_7$, заменяется следующей (также многопараметрической) задачей бесконечномерного математического программирования [20]

$$\sum_{j\in J} \boldsymbol{T}_j^T\mathbf{S}_j \to \max, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma_j}, \boldsymbol{K}) \le \mathbf{0},\quad \boldsymbol{\sigma_j} = \boldsymbol{\sigma}_j^e(\boldsymbol{S}_j) + \boldsymbol{\sigma}^r, \qquad (2), (3) \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_j^e(\boldsymbol{S}_j) = \boldsymbol{\omega_{\sigma S}}\boldsymbol{S}_j \qquad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A}, \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{S}^r := \int_A \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\sigma}^r d\boldsymbol{A} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{S_j}, \ge \mathbf{0}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}^*. \qquad (5), (6)$$

Здесь $\boldsymbol{T}_j$ – вектор весовых коэффициентов для обобщенных усилий, $\boldsymbol{T}_j \in \boldsymbol{R}^{10}$, $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}$; $\boldsymbol{\omega_{\sigma S}} := (\boldsymbol{\alpha}_{ij})$ - 5×10-матрица влияния, аналогичная функции влияния $\boldsymbol{\omega_f}$ в задаче (2); вектор $\boldsymbol{x} := z \in \boldsymbol{R}^1$; $\boldsymbol{S_f} := \boldsymbol{A} = [-\boldsymbol{h}/2;\ \boldsymbol{h}/2]$; $\boldsymbol{h}$ – толщина оболочки. Объемные силы $\boldsymbol{g}$ здесь исключены (их учет представлен в [21]).

В задаче (4) состояние системы описывается интегральными уравнениями равновесия $(4)_5$ с 10×5-матрицей $\boldsymbol{\beta}$, которая после транспонирования имеет вид (6).

Для технической теории сплошных тонких оболочек средней кривизны используем расширенный вектор напряжений, $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma_x}, \boldsymbol{\sigma_y}, \boldsymbol{\tau_{xy}}, \boldsymbol{\tau_{yx}}, \boldsymbol{\tau_{zx}}, \boldsymbol{\tau_{yz}})$, $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{R}^6$, откуда в уравнениях $(5)_4$ имеем следующую расширенную 6×10-матрицу влияния (7). Четвертую строку матрицы $\boldsymbol{\omega_{\sigma S}}$ здесь можно исклю-

$$\boldsymbol{\beta}^T = \begin{bmatrix} 1+\frac{z}{r_y} & (1+\frac{z}{r_y})z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{z}{r_x} & (1+\frac{z}{r_x})z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\frac{z}{r_y})z & 1+\frac{z}{r_y} & 0 & 0 & 0 & (1+\frac{z}{r_x})z & 1+\frac{z}{r_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{z}{r_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{z}{r_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{\omega_{\sigma S}} = \begin{bmatrix} 1/h & 12z/h^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/h & 12z/h^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12z/h^3 & 1/h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12z/h^3 & 1/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

где $\boldsymbol{\alpha}_{55} = \boldsymbol{\alpha}_{66} = \frac{3}{2\boldsymbol{h}}(1-\frac{4\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{h}^2})$ – функции координаты z сечения, отражающие влияние поперечных сил $\boldsymbol{Q_x}$ и $\boldsymbol{Q_y}$.

чить из условия $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, связывающего между собой усилия M_{xy}, N_{xy}, M_{yx}, N_{yx}: $N_{xy} - N_{yx} = 12z(M_{xy} - M_{yx})/h^2$. Для сильно искривленных оболочек компоненты α_{ij} матрицы $\omega_{\sigma S}$ в (7) зависят еще от радиусов кривизны r_x, r_y. В общем случае толстостенных оболочек матрица влияния $\omega_{\sigma S}$ (7) находится численным путем с использованием существующих компьютерных программ.

Неизвестными (независимыми переменными) в задаче (5) будут $9|J^*|$ компонент векторов усилий S_j, $j \in J^*$ и векторное поле напряжений $\sigma^r(z) \in R^5$.

Для пологих (и сферических, $r_x = r_y$) оболочек, при $N_{xy} = N_{yx}$ и $M_{xy} = M_{yx}$, векторы напряжений и усилий будут иметь меньшую размерность, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz})$, $\sigma \in R^5$, $S = (N_x, M_x, M_{xy}, N_{xy}, Q_x, N_y, M_y, Q_y)$, $S \in R^8$. Тогда в матрице $\omega_{\sigma S}$ (7) необходимо исключить четвертую строку, а также восьмой и девятый столбцы, а в уравнениях $(5)_5$ и (6) отбросить слагаемые, содержащие радиусы кривизны r_x, r_y. Полученные зависимости будут применимы также для пластин, работающих одновременно при изгибе и при плоском напряженном состоянии.

5. Если область Ω_S (1) изменения вектора обобщенных усилий S определяется с точностью до одного параметра F_0, следует принять

$$j = F_0 \overline{S_j}, \qquad j \in J^*, \tag{8}$$

где $\overline{S_j}$ – значения векторов S_j при $F_0 = 1$, $j \in J^*$; $\overline{S_j} \in R^{10}$. Параметр F_0 представляет собой коэффициент запаса действующих на сечение усилий по отношению к их предельным значениям.

Тогда задача (5) будет следующей:

$$F_0 \to \max, \tag{1}$$

$$\varphi(\sigma_j, K) \le 0, \quad \sigma_j = \sigma_j^e(S_j) + \sigma^r, \qquad (2),(3) \qquad (9)$$

$$\sigma_j^e(S_j) = \omega_{\sigma S} F_0 \overline{S_j} \quad \forall z \in A, j \in J^*, \qquad (4)$$

$$S^r := \int_A \beta\sigma^r dA = 0, \; F_0 \ge 0. \qquad (5),(6)$$

Практически важной (необходимой для построения области прочности сечения оболочки) будет другая однопараметрическая задача, в которой отыскивается некоторый i–й компонент $S_{i_0 j_0}$ вектора усилий S_{j_0} (выбранный постановщиком),

$$S_{i_0 j_0} \to \max, \tag{10}$$

$$\varphi(\sigma_j, K) \le 0, \quad \sigma_j = \sigma_j^e(S_j) + \sigma^r, \qquad (11),(12)$$

$$\sigma_j^e(S_j) = \omega_{\sigma S} S_j, \quad j \in j_0 \cup J_0^*, \quad \forall z \in A, \tag{13}$$

$$S^r := \int_A \beta\sigma^r dA = 0, \qquad S_{i_0 j_0} \ge 0. \qquad (14),(15)$$

Остальные компоненты вектора усилий S_{j_0}, составляющие подвектор $S_{pj_0} \in R^9$, известны, и полный вектор $S_{j_0} = (S_{i_0 j_0}, S_{pj_0})$. Здесь через J_0^* обозначено множество остальных известных j–х векторов усилий S_j, тогда полное множество векторов $(S_j, j \in J) = ((S_{i_0 j_0}, S_{pj_0}), S_j, j \in J_0)$, и множество индексов $J^* = j_0 \cup J_0^*$.

Неизвестными в задаче (9) (или (10)–(15)) будут параметр F_0 (или компонент вектора усилий $S_{i_0 j_0}$) и векторное поле напряжений $\sigma^r(z) \in R^5$.

Задачи оптимизации (2), (5), (9) и (10)–(15) представляют собой статическую формулировку проблемы, построенной на основе следующего экстремального **энергетического принципа**: *Из всех статически допустимых полей остаточных напряжений действительным будет такое поле, при котором мощность усилий в цикле максимальна.*

6. Кинематическую формулировку проблемы можно получить путем построения двойственных задач оптимизации. Покажем это на примере задачи (10)–(15). Для нее функционал Лагранжа имеет вид

$$L(S_{i_0 j_0}, \sigma^r, \lambda, \dot{w}, v_{i_0 j_0}) =$$

$$= S_{i_0 j_0} + \dot{w}^T \int_A \beta\sigma^r dA + \int_A \lambda\varphi(\sigma_j, K) dA + v_{i_0 j_0} S_{i_0 j_0}, \tag{16}$$

где $\lambda(z) \in R^1$, $\dot{w} \in R^{10}$ - соответственно скалярное поле λ и вектор $\dot{w}$ множителей Лагранжа; вектор $\dot{w} := (\dot{\varepsilon}_x^r, \dot{\nu}_x^r, \dot{\nu}_{xy}^r, \dot{\nu}_{xy}^r, \dot{\gamma}_x^r, \dot{\varepsilon}_y^r, \dot{\nu}_y^r, \dot{\nu}_{yx}^r, \dot{\nu}_{yx}^r, \dot{\gamma}_y^r)$ имеет смысл скорости остаточных перемещений, двойственных усилиям самонапряжения S^r.

Обобщенная задача Лагранжа для проблемы (10)–(15) примет вид:

$$\varphi(\sigma_j, K) \le 0, \qquad \sigma_j = \sigma_j^e(S_j) + \sigma^r, \qquad (17),(18)$$

$$\sigma_j^e(S_j) = \omega_{\sigma S} S_j, \qquad j \in j_0 \cup J_0^*, \tag{19}$$

$$\lambda \ge 0, \qquad \lambda\varphi(\sigma_j, K) = 0, \qquad (20),(21)$$

$$\beta^T \dot{w} - \lambda \frac{\partial\varphi(\sigma_j, K)}{\partial\sigma^r} = 0 \;\; \forall z \in A, \tag{22}$$

$$S^r := \int_A \beta\sigma^r dA = 0, \qquad S_{i_0 j_0} \ge 0. \qquad (23),(24)$$

$$1 + \int_A \lambda \frac{\partial\varphi(\sigma_j, K)}{\partial S_{i_0 j_0}} dA + v_{i_0 j_0} = 0, \tag{25}$$

$$v_{i_0 j_0} \ge 0. \tag{26}$$

Тогда кинематическая формулировка проблемы (10)–(15) будет следующей:

$$\int_A \left[\lambda \frac{\partial\varphi(\sigma_j, K)}{\partial\sigma^r} \right]^T \cdot \sigma^r dA + \int_A \lambda\varphi(\sigma_j, K) dA \to \min, \tag{27}$$

$$\beta^T \dot{w} - \lambda \frac{\partial\varphi(\sigma_j, K)}{\partial\sigma^r} = 0, \;\; \forall z \in A, \tag{28}$$

$$\int_A \lambda \frac{\partial\varphi(\sigma_j, K)}{\partial S_{i_0 j_0}} dA \ge 1, \tag{29}$$

$$\lambda \ge 0. \tag{30}$$

Задача оптимизации (27)–(30) соответствует следующему экстремальному **энергетическому принципу**: Из всех кинематически допустимых векторов скоростей остаточных перемещений действительным будет такой вектор, при котором скорость диссипации энергии в цикле минимальна.

7. Для численных исследований многогранную область нагружения сечений Ω_S принимаем в виде прямоугольного параллелепипеда

$$-S^- \le S \le S^+, \tag{31}$$

где S^-, $S^+ \in R^{10}$ - пределы изменения вектора усилий S, $S^{\mp} = (N_x^{\mp}, \dots, Q_y^{\mp})$, $S^- \ge 0$, $S^+ \ge 0$.

Если функция текучести $\varphi(\sigma, K)$ в (11) в сформулированных выше задачах (2), (5), (9) и (10)–(15) выпуклая, то для оптимального решения условие (11) превратится из неравенства в равенство или для всего сечения, или для его отдельных точек. При этом возникают различные режимы пластического разрушения сечения; им соответствуют классические задачи оптимизации с ограничениями-равенствами, рассмотренные в п. 3.2. Если же функция текучести в (11) невыпуклая [22 - 24] или оболочка выполнена из материала с сухим трением [25], то необходимо непосредственно решать задачи математического программирования в функциональных пространствах [26].

В качестве неравенств (11) далее принимаем условие текучести Губера-Мизеса, записанное в системе координат $0xyz$

$$\varphi(\sigma, K) := (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - k^2 \le 0, \qquad (32)$$

или в сокращенной записи $s_{ij}s_{ij} - 2k_1^2 \le 0$, где $k^2 = 2f_y^2$, f_y – предел текучести, $k_1 = f_y/\sqrt{3}$. Функция текучести $\varphi(\sigma, K)$ здесь выпуклая. Закон течения для условия (32) предполагаем ассоциированным.

3. Методы решения задач

1. **Сведение к конечномерным задачам математического программирования.** Сформулированные выше проблемы предельного равновесия сечений оболочек при повторно-переменном нагружении можно решить численно. С этой целью их необходимо привести к конечномерным задачам путем разбиения площади сечения A на малые конечные площадки ΔA_i, $i \in I$, где I – множество площадок. Тогда размерность вектора переменных состояния системы (остаточных напряжений σ^r) будет равна числу $|I|$ таких площадок. Полученные задачи нелинейного математического программирования, у которой целевая функция и ограничения-равенства линейные, а ограничения-неравенства негладкие и невыпуклые, решаются известными методами оптимизации [25]; в случае квадратичных ограничений-неравенств типа (32) применимы стандартные процедуры.

2. **Решение бесконечномерных задач.** Возможно более простые и точные аналитические методы решения сформулированных задач в функциональных пространствах. В данной работе использован метод множителей Лагранжа, при этом решения получены в квадратурах. Покажем это на примере однопараметрической задачи (10)–(15) с учетом (32).

Решение будем отыскивать **для двух режимов** разрушения, соответствующих прогрессирующему разрушению и знакопеременному пластическому течению. Третий режим, для смешанных механизмов разрушения, в аналитическом подходе не рассматриваем; поскольку он не имеет особого практического значения. Уточнение такого подхода возможно путем численного решения прямой или двойственной задачи (пп. 2.5, 2.6 и 3.1). Можно предложить также линейную аппроксимацию поверхности взаимодействия усилий (поверхности прочности) для смешанных механизмов, на основе использования имеющихся аналитических решений.

В случае прогрессирующего разрушения сечения (**первый режим** разрушения), при выпуклости функции текучести $\varphi(\sigma, K)$, условие (32) из неравенства превратится в равенство. Тогда в обобщенной задаче Лагранжа (17)-(26) останутся только уравнения (17)-(19) и (22), (23), (25), в последнем уравнении будет $v_{i_0 j_0} = 0$, с неизвестными $S_{i_0 j_0}$, $\sigma^r(z) \in \mathbf{R}^5$, $\lambda(z) \in \mathbf{R}^1$, $\dot{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^{10}$.

Поскольку в принятой постановке зависимость $\sigma_j^e(S)$ линейна, экстремальные компоненты векторов напряжений σ_j^e, σ_j^{e+} (при условии (31)) возникают при действии j–х векторов усилий S_j,

$$\sigma^{e-} = \min\{\min_{j \in J^*} \sigma^e(S_j);\ 0\}.; \qquad (33)$$

$$\sigma^{e+} = \max\{\max_{j \in J^*} \sigma^e(S_j);\ 0\}; \qquad (34)$$

векторы сочетаний S_j состоят только из компонент векторов S^-, S^+. В результате для области сечения $z \in [0;\ h/2]$ с учетом (4), (7) получим формулы для экстремальных нормальных σ_x, σ_y и касательных τ_{xy} напряжений:

$$\sigma_x^{e\mp} := \begin{Bmatrix} \sigma_x^{e-} \\ \sigma_x^{e+} \end{Bmatrix} = \mp\frac{1}{h}N_x^{\mp} \mp \frac{12}{h^3}M_x^{\mp}z,\ \ x \leftrightarrow y, \qquad (35)$$

$$\tau_{xy}^{e\mp} := \begin{Bmatrix} \tau_{xy}^{e-} \\ \tau_{xy}^{e+} \end{Bmatrix} = \mp\frac{1}{h}N_{xy}^{\mp} \mp \frac{12}{h^3}M_{xy}^{\mp}z,\ \ xy \leftrightarrow yx. \qquad (36)$$

Аналогично для области сечения $z \in [-h/2;\ 0]$

$$\sigma_x^{e\mp} := \mp\frac{1}{h}N_x^{\mp} \pm \frac{12}{h^3}M_x^{\pm}z,\ \ x \leftrightarrow y, \qquad (37)$$

$$\tau_{xy}^{e\mp} := \mp\frac{1}{h}N_{xy}^{\mp} \pm \frac{12}{h^3}M_{xy}^{\pm}z,\ \ xy \leftrightarrow yx. \qquad (38)$$

Выразим из линейного матричного уравнения (22) векторное поле $\sigma^r(z)$ и подставим его в уравнения (17) и (23). Из этих одиннадцати нелинейных алгебраических уравнений (с учетом (18), (19)) найдем искомые неизвестные $\lambda(z)$, $\dot{\mathbf{w}}$, а затем векторное поле $\sigma^r(z)$ и компонент $S_{i_0 j_0}$ вектора усилий $\mathbf{S}_{j_0}$.

Задачу (17)-(26) можно упростить, исключив из уравнения (17) одну из компонент σ_t векторного поля σ^r, $\sigma^r = (\sigma_t^r,\ \sigma_p^r)$. Тогда останутся только неизвестные $S_{i_0 j_0}, \sigma_p^r(z) \in \mathbf{R}^4, \dot{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^{10}$; после исключения вектора σ_p^r из уравнения (22) необходимо будет решить (с учетом (18), (19)) десять нелинейных алгебраических уравнений (23) относительно скорости остаточных перемещений $\dot{\mathbf{w}}$.

Отметим, что возможен обратный метод решения последней задачи, когда задается вектор скорости остаточных перемещений $\dot{\mathbf{w}}$ и отыскивается подвектор усилий $\mathbf{S}_{\mathbf{p}j_0} \in \mathbf{R}^9$. В этом случае решение нелинейных уравнений заменяется непосредственным интегрированием зависимостей (23).

Как для обратного, так и для прямого метода сложность заключается в выборе области определения вектора $\dot{\mathbf{w}}$ или начального приближения итерационного процесса; в общем случае эта область неединственная. Для выбора начального приближения вектора $\dot{\mathbf{w}}$ можно использовать численный подход (п. 3.1), а также решения для сечений стержневых конструкций [5].

Дальнейшее упрощение задачи возможно на основе дополнительной гипотезы $\tau_{xz}^r = 0, \tau_{yz}^r = 0$ [4], тогда искомый вектор напряжений будет $\sigma^r = (\sigma_x^r,\ \sigma_y^r,\ \tau_{xy}^r)$, $\sigma^r \in \mathbf{R}^3$.

Заметим, что в качестве основы для анализа рассмотренного выше режима циклического разрушения можно использовать также решение для однократного нагружения оболочки.

При знакопеременном пластическом течении в одной точке x_* сечения оболочки (**второй режим** разрушения) активными будут шесть условий текучести (11), с учетом (18), (19),

$$\varphi(\sigma_j^e(S_j) + \sigma^r, K) = 0, \quad j \in J_c^*, \qquad (39)$$

где J_c^* - множество активных условий текучести, $|J_c^*| = 6$.

Уравнения (39) содержат пять неизвестных компонент вектора $\boldsymbol{\sigma}^r$ в точке x_* и определяют (в параметрической форме) соотношения для предельных усилий $S_j, j \in J_c^*$.

Рассмотрим тонкостенные оболочки, у которых усилия в сечения повторно изменяются в соответствии с условием (31). Используем матрицу влияния $\boldsymbol{\omega}_{\sigma S}$ (7). Для таких оболочек опасными будут точки x_* с координатами $z_* = \pm h/2$; для определенности примем $z_* = h/2$. Тогда влияние нормальных сил N_x, N_y и изгибающих M_x, M_y моментов, а также касательных сил N_{xy}, N_{yx} и крутящих моментов M_{xy}, M_{yx} (как компонент вектора S, обусловливающих соответственно нормальные σ_x, σ_y и касательные напряжения τ_{xy} вектора $\boldsymbol{\sigma}$) можно учесть раздельно. Поперечные силы Q_x^r, Q_y^r на прочность не влияют, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Первые два уравнения (39) с учетом (32) для анализа знакопеременного пластического течения оболочки примут вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\cdot) &= (\sigma_x^{e+} + \sigma_x^r)^2 - (\sigma_x^{e+} + \sigma_x^r)(\sigma_y^{e+} + \sigma_y^r) + \\ &+ (\sigma_y^{e+} + \sigma_y^r)^2 + 3(\Delta^{\pm}\tau_{xy})^2 - f_y^2) = 0,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(\cdot) &= (\sigma_x^{e+} + \sigma_x^r)^2 - (\sigma_x^{e+} + \sigma_x^r)(\sigma_y^{e-} + \sigma_y^r) + \\ &+ (\sigma_y^{e-} + \sigma_y^r)^2 + 3(\Delta^{\pm}\tau_{xy})^2 - f_y^2) = 0,\end{aligned} \tag{41}$$

где экстремальные нормальные $\sigma_x^{e\pm}$, $\sigma_y^{e\pm}$ и касательные $\tau_{xy}^{e\pm}$ напряжения найдем из (35), (36) при $z_* = h/2$; $\Delta^{\pm}\tau_{xy}$ - слагаемое, учитывающее влияние касательных напряжений; его найдем также из (четвертого и пятого) уравнений (33) с учетом (36), исключая τ_{xy}^r,

$$\Delta^{\pm}\tau_{xy} = \frac{1}{h}(N_{xy}^+ - N_{xy}^-) + \frac{6}{h^2}(M_{xy}^+ - M_{xy}^-). \tag{42}$$

Из уравнений (40), (41) исключаем σ_x^r, σ_y^r и подставляем их значения в третье уравнение (39)

$$\begin{aligned}\varphi_3(\cdot) &= (\sigma_x^{e-} + \sigma_x^r)^2 - (\sigma_x^{e-} + \sigma_x^r)(\sigma_y^{e-} + \sigma_y^r) + \\ &+ (\sigma_y^{e-} + \sigma_y^r)^2 + 3(\Delta^{\pm}\tau_{xy})^2 - f_y^2) = 0,\end{aligned} \tag{43}$$

откуда с учетом формул (22), (23) найдем искомую зависимость между компонентами векторов S^-, S^+.

Заметим, что распределение напряжений $\sigma^r(z)$ по всему сечению, $\forall z \in A$, для второго режима разрушения в рамках данного аналитического подхода получить невозможно; численное решение приводит к неединственному распределению напряжений, в зависимости от степени дискретизации сечения (от числа $|\,I\,|$, п. 3.1). Однако это распределение легко найти, решая упругую задачу для сечения, нагруженного полученным (по изложенной выше методике) напряжением $\sigma^r(z_*)$ в точке $x_* := z_*$.

Для оболочек толстостенных и средней толщины описанный подход не изменится, только матрица влияния $\boldsymbol{\omega}_{\sigma S}$ будет иметь другой вид.

Действительную область приспособляемости Ω сечения найдем в результате пересечения областей, полученных для прогрессирующего разрушения Ω_1 и для знакопеременного течения Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Ясно, что в случае безопасной работы сечения должно выполняться условие: область Ω_S изменения действующих усилий S содержится в области Ω, $\Omega_S \subseteq \Omega$, причем Ω зависит от Ω_S.

Предложенная методика реализована в виде компьютерных программ.

4. Численные результаты

Оценим приспособляемость (несущую способность при повторно-переменном нагружении) поперечных сечений стальной пологой тонкостенной оболочки на основе задачи (10)-(15) с учетом условия текучести (32) при (циклически изменяющихся) силовых внешних воздействиях типа (31). Учитываем нормальные силы N_x, N_y, а также изгибающие M_x, M_y и крутящие $M_{xy} = M_{yx}$ моменты, тогда вектор усилий $S = (N_x, M_x, M_{xy}, N_y, M_y)$, $S \in \mathbf{R}^5$.

Перейдем к безразмерным усилиям n_x^-, m_x^-, m_{xy}^-, n_y^-, m_y^-, $n_x^+, \ldots, n_y^+$, где $n_x^{\mp} = N_x^{\mp}/N_{x0}$, $m_x^{\mp} = M_x^{\mp}/M_{x0}$, $m_{xy}^{\mp} = M_{xy}^{\mp}/T_0$, …, $m_y^{\mp} = M_y^{\mp}/M_{y0}$. Здесь $N_{x0} = N_{y0} := N_0$, $M_{x0} = M_{y0} := M_0$, T_0 – предельные значения усилий (нормальных сил N_0, изгибающих M_0 и крутящего T_0 моментов) при однократном нагружении. Величины N_0, M_0 и T_0 вычисляем через предел текучести f_y и высоту сечения оболочки h; в расчетах принято f_y=240 МПа, h=0,2 м.

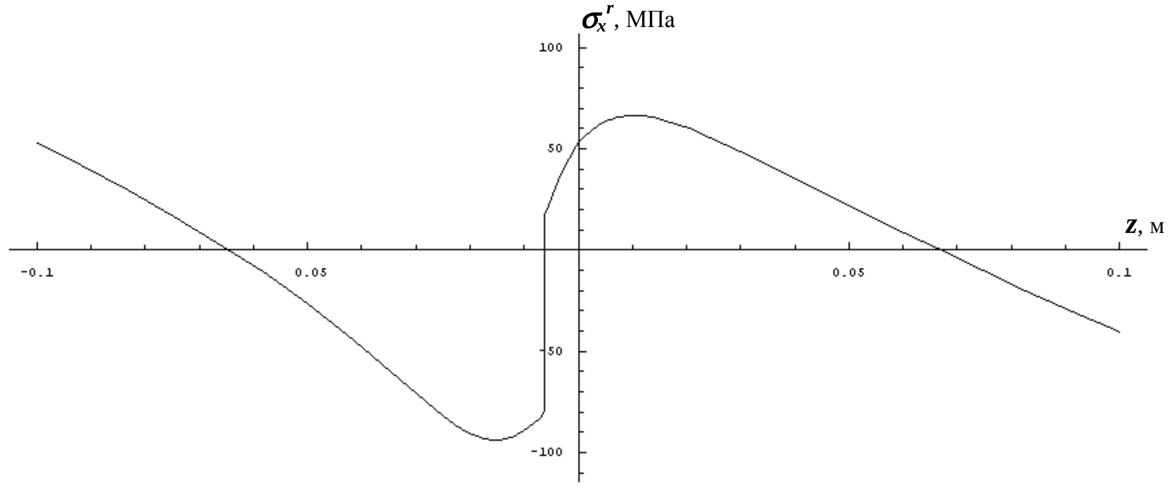


Рис.1. Эпюра остаточных нормальных напряжений σ_x^r в сечении оболочки, МПа.

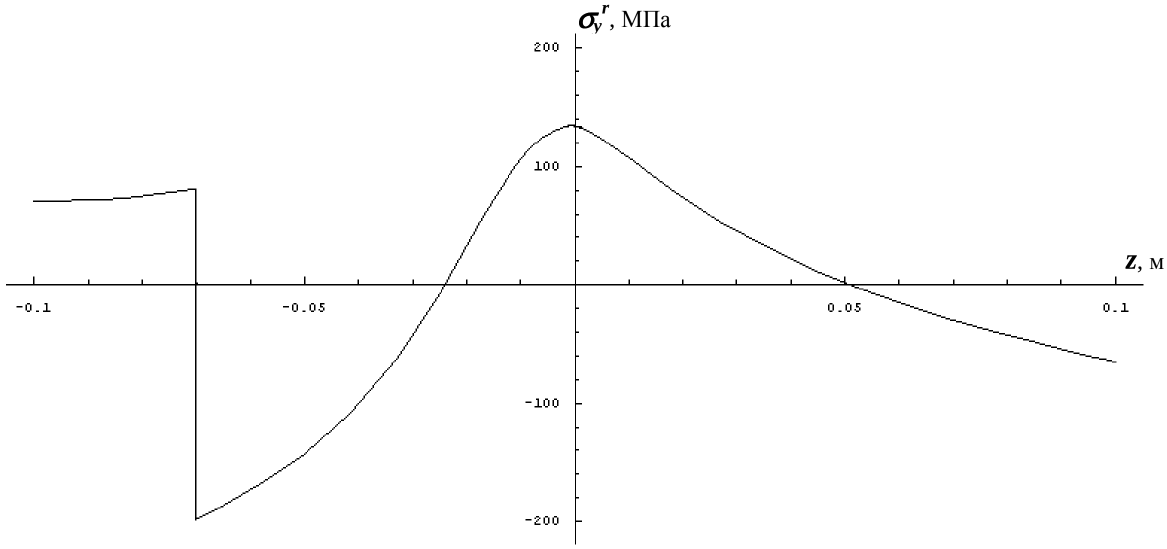


Рис. 2. Эпюра остаточных нормальных напряжений σ_y^r в сечении оболочки, МПа.

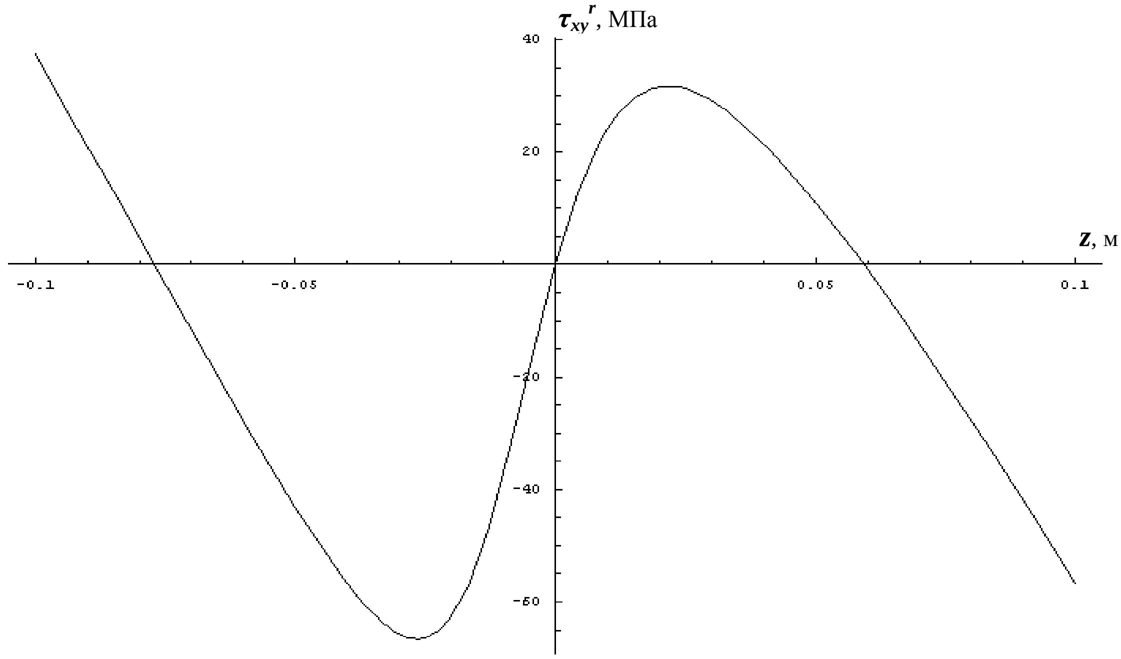


Рис.3. Эпюра остаточных касательных напряжений τ_{xy}^r в сечении оболочки, МПа.

Вначале рассмотрим прогрессирующее разрушение сечения. В качестве искомого неизвестного выберем усилие M_{xy}^+, тогда заданными будут векторы усилий в цикле $S^- = (N_x^-, M_x^-, M_{xy}^-, N_y^-, M_y^-) \in R^5$ и $S_p^+ = (N_x^+, M_x^+, N_y^+, M_y^+) \in R^4$. Искомыми будут также векторное поле напряжений $\sigma^r = (\sigma_x^r, \sigma_y^r, \tau_{xy}^r)$, $\sigma^r \in R^3$ (согласно с (4) примем напряжение $\sigma_z = 0$), и вектор скорости перемещений $\dot{w} = (\dot{\varepsilon}_x^r, \dot{v}_x^r, \dot{\varepsilon}_y^r, \dot{v}_y^r), \dot{w} \in \mathbf{R}^4$, двойственных усилиям самонапряжения $S_p^r \in R^4$.

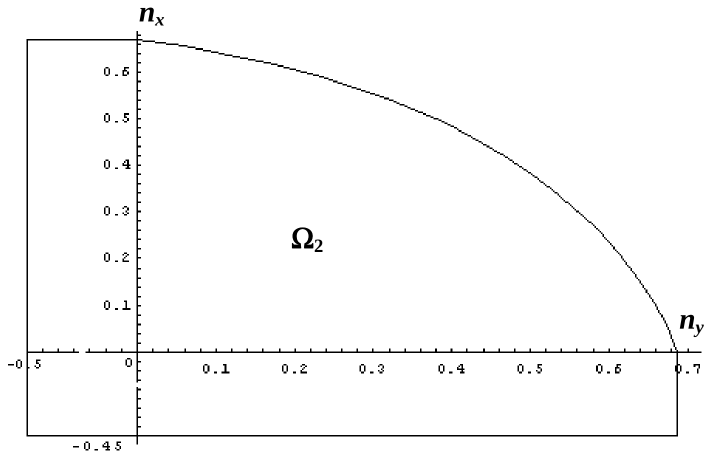
Заданы безразмерные усилия: $n_x^- = 0{,}2$; $m_x^- = 0{,}1$; $m_{xy}^- = 0{,}12$; $n_y^- = 0{,}15$; $m_y^- = 0{,}23$; $n_x^+ = 0{,}4768115$; $m_x^+ = 0{,}2864931$; $n_y^+ = 0{,}5870071$; $m_y^+ = 0{,}1767655$. В результате решения задачи получено значение безразмерного усилия (крутящего момента) $m_{xy}^+ = 0{,}4418999$ и векторное поле остаточных напряжений $\sigma^r = (\sigma_x^r, \sigma_y^r, \tau_{xy}^r)$. Эпюры этих напряжений представлены на рис. 1…3.

Аналогичным образом, фиксируя часть компонент векторов усилий S^- и S^+, найдем зависимости между оставшимися компонентами этих векторов, что определит область Ω_1 безопасной работы (приспособления) для данного режима пластического разрушения сечения оболочки.

Далее рассмотрим режим знакопеременного пластического течения. Из уравнений (40)-(43), исключив σ_x^r, σ_y^r, с учетом формул (22), (23) получим соотношение между компонентами векторов S^-, S^+. На рис.4.а представлена зависимость между продольными силами n_x^+ и n_y^+ в сечении оболочки при циклическом режиме воздействий, заданном параметрами: $n_x^- = 0{,}45$; $m_x^- = 0{,}4$; $n_y^- = 0{,}5$; $m_y^- = 0{,}3$; $m_x^+ = 0{,}15$; $m_y^+ = 0{,}2$; $m_{xy}^- = 0{,}15$; $m_{xy}^+ = 0{,}2166666$ (в положительном квадранте плоскости $0n_xn_y$); на рис.4.б – то же, при $m_x^+ = 0$.

С учетом ограничений (31) в других квадрантах плоскости $0n_xn_y$ получим область Ω_2 безопасной работы сечения оболочки. Это означает, что для данного режима пластического разрушения сечение оболочки приспособится при любом повторно-переменном изменении усилий n_x и n_y внутри и на границе областей Ω_2 на рис. 4.

а)



б)

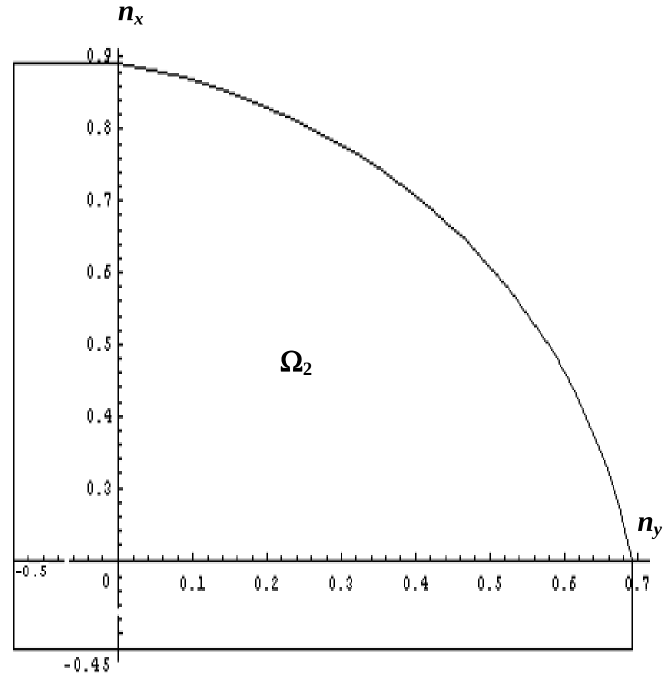


Рис. 4. Зависимость между продольными силами n_x^+ и n_y^+ в сечении оболочки при знакопеременном течении для усилий: а) $m_x^+ = 0{,}15$; б) $m_x^+ = 0$.

Подобным образом можно построить области Ω_2 для всего пространства $\mathbf{R}^5$ циклически изменяющихся компонент векторов усилий S.

Область приспособляемости сечения Ω найдем как результат пересечения областей, полученных для прогрессирующего разрушения Ω_1 и для знакопеременного течения Ω_2.

Как и для случаев на рис. 4.а и 4.б, область приспособляемости Ω будет существенно зависеть от характеристик циклов внешних силовых воздействий. Эти характеристики циклов определяют существенную (до 40%) деградацию несущей способности элементов. В этом состоит принципиальное отличие условий прочности сечений и элементов конструкций при повторно-переменном нагружении от соответствующих условий прочности при однократном нагружении. Заметим, что данный эффект в расчетах реальных конструкций в явном виде до настоящего времени, как правило, не учитывался.

Предложенные методы учета взаимодействия повторно-переменных усилий в сечениях оболочек реализованы в компьютерных программах.

5. Заключение

В данной работе решена проблема несущей способности поперечных сечений толстостенных и тонкостенных оболочек при действии повторно-переменных малоцикловых нагрузок. Сформулирована прямая и двойственная формулировки задач оптимизации для выпуклых и невыпуклых условий текучести. На основе метода множителей Лагранжа численно исследована прочность сечений оболочек при различных режимах циклического разрушения. Для частных случаев получены простые решения в квадратурах. Показано, что взаимодействие повторно-переменных усилий оказывает весьма существенное влияние на величину несущей способности элементов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Чирас А.А. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. – Вильнюс, Изд-во „Минтис", 1971. – 124 с.
2. Каменярж Я.А. Предельный анализ тел и конструкций. – М., Наука. Физматлит, 1997. – 512 с.
3. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток, Дальнаука, 1998. - 528 с.
4. Алявдин П.В. Несущая способность и оптимальное проектирование упругопластических конструкций/ Белорусский политехнический институт, Минск, 1990. - Деп. во ВНИИНТПИ 14.10.90, № 10856. - 436 с.
5. Алявдин П.В. Приспособляемость элементов конструкций в общем случае нагружения // Теоретическая и прикладная механика, вып. 14, Минск: Выш. школа, 1987, с. 95-100.
6. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. Москва: Машиностроение, 1979. 263 с.
7. Gokhfeld D.A. and Cherniavsky O.F. Limit Analysis of Structures at Thermal Cycling. Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.
8. König J.A. Shakedown of Elastic-plastic Structures. PWN, Warszawa, Elsevier, Amsterdam, 1987. – 214 p.
9. Inelastic behaviour of structures under variable loads / ed. by Zenon Mroz ... //Zenon Mroz ; Dieter Weichert; Stanislaw Dorosz / Euromech Colloquium (298, 1992, Warszawa) / Solid mechanics and its applications : SMIA; 36: Kluwer Academic Publishers, 1995, XVII, 496 p.
10. Inelastic Analysis of Structure Under Variable Loads: Theory and Engineering Applications/ Ed. by D. Weichert, G. Maier. Kluwer Academic Publishers, 2000. (Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 83). - 380 p.
11. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.-Л., ГИТТЛ, 1949. – 784 с.
12. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. – 2-е изд. – М., Наука, 1987. - 360 с.
13. Ильюшин А.А. Конечное соотношение между силами и моментами и связь их с деформациями в теории оболочек // Прикладная математика и механика. - 1945. – Т. 9. – № 1. – С. 101-110.
14. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
15. Wojewódzki Wiesław. Nośność graniczna powłok. - Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2002. – 356 s.
16. Węzły i połączenia konstrukcyjne: projektowanie metodą nośności granicznej / red. Henryk Frąckiewicz, Warszawa : Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1985. – 372 s.
17. W. Szczepiński, J. Szalikowski. Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń/ Biblioteka Mechaniki Stosowanej. – Warszawa-Poznań: PWN – Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985. – 334 s.
18. Алявдин П.В., Гариб Мохамед. Определение несущей способности конструкции с учетом изменения ее формы // Строительство и архитектура (Известия высш. учеб. завед.). – 1990. – № 8. – С. 114-117.
19. Aljawdin P., Werner F. Auswahl maßgebender Lastkombinationen für große Tragwerke // Bauingenieur, Band –72, Heft 7/8, Juli/Aug. 1997. - S. 355 – 361.
20. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М., Наука, 1971. – 352 с.
21. Kączkowski Zbigniew. Płyty – obliczenia statyczne, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1980. = Кончковский З. Плиты: Статические расчеты. Перев. с польск.: – М., Стройиздат, 1984. – 484 с.
22. Dem'anovV.F., Stavroulakis G.E., Polyakova L.N., Panagiotopoulos P.D. Quasidifferentiability and Nonsmooth Modelling in Mechanics, Engineering and Economics / Nonconvex Optimization and Its Applications. Vol. 10. – Dordecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1996. – 348 p.
23. Alyavdin P.V., Simbirkin V.N. Limit analysis of reinforced concrete cross-sections under cyclic loading // Statiba, 1999, T. V, Nr. 5. – Civil Engineering, 1999, Vol. V, No 5. – Vilnius, "Technika", 1999. - P. 335-339.
24. Kuczma M.S., Stein E. Nonconvex problems in the theory of plasticity / Arch. Mech., 46, 1994, pp. 505-529.
25. L. Bousshine, A. Chaaba, G. De Saxce. A new approach to shakedown analysis for non-standard elastoplastic material by the bipotential / International Journal of Plasticity, Vol. 19, No. 5, May, 2003, pp. 583-598.
26. V.F. Demyanov. Quasidifferentiable optimization: Algorithms for QD functions. In: Encyclopedia of optimization. Editors C.A.Floudas, P.M.Pardalos / Kluwer Academic publishers. Dordrecht /Boston/London 2001, Vol. 4, pp. 458-464.
27. Mason Jayme. Methods of functional analysis for application in solid mechanics / Series: Studies In Applied Mechanics, Vol. 9, Amsterdam et al. Elsevier, 1985. - 392 p.
28. Polizzotto Castrenze, Borino Guido. Shakedown and steady-state responses of elastic-plastic solids in large displacements / Int. J. Solids Structures, Vol. 33, No. 23, 1996. pp. 3415-3437.

УДК 624.012.45: 666.972.07: 539.4

Алявдин П.В.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СЕЧЕНИЙ ОБОЛОЧЕК. 2. ОДНОКРАТНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ СЕЧЕНИЙ

Введение

В данной работе на основе подхода автора (Статья-1) сформулирована и решена проблема прочности и несущей способности поперечных сечений однородных изотропных оболочек различной толщины (толстостенных, средней толщины и тонкостенных) при однократном нагружении, монотонно возрастающем во времени. Для данной проблемы представлены прямая и двойственная формулировки, а также обобщенная задача Лагранжа. Численно исследована прочность сечений стальных толстостенных оболочек. Полученные здесь результаты позволяют оценить многочисленные существующие решения для несущей способности тонких оболочек при однократном нагружении (см. [1-4]), а также возможные новые решения для оболочек средней толщины [5]. Такой подход будет особенно важным для анизотропных пластин и оболочек из композитных материалов, рассчитываемых по уточненным теориям [6, 7], а также для анализа стыков и соединений стержневых или оболочечных элементов [8, 9].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения несущей способности сплошных поперечных сечений как элемента оболочек при однократном нагружении. Оболочки выполнены из однородно-