РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Громыко Ю.В., БелГУТ, Гомель

Рассматриваются осесимметричные вынужденные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластинки круглой формы с отверстием. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат *r*, φ, *z*. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось *z* направлена ей перпендикулярно вверх. Для внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для легкого заполнителя (h_3 = 2*c*) – гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Работой заполнителя в тангенциальном направлении и инерцией вращения его нормали пренебрегаем. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ: *q* = *q*(*r*, *t*). На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют $u_\varphi^k = 0$, а прогиб пластинки *w*, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности *u* не зависят от координаты φ (*k* – номер слоя), т. е. $w = w(r,t),\ \psi = \psi(r,t),\ u = u(r,t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу *a*; силовые характеристики – к 1 Па; через h_k обозначена толщина *k*-го слоя.

В работе [1] для подобной круглой сплошной пластинки на основе вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания, которая будет справедлива и в рассматриваемом случае:

$$L_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r) = 0\,; \quad L_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w,_r) = 0\,;$$
$$L_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w,_r) - M_0\ddot{w} = -q\,, \tag{1}$$

где M_0 – коэффициент, зависящий от физических и геометрических параметров слоев;

L_i – дифференциальные операторы; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате;

a_i – коэффициенты, зависящие от жесткостных и геометрических параметров пластины.

Задача определения функций *u*(*r*, *t*), ψ(*r*, *t*), *u*(*r*, *t*) замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий

$$w(r,0) \equiv f(r); \qquad \dot{w}(r,0) \equiv g(r)\,. \tag{2}$$

В работе [2] для подобной круглой рассмотрена однородная система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластинки с отверстием. Она следует из (1) при *q* = 0. С помощью первых двух уравнений и двукратного интегрирования эта система преобразуется к виду:

$$u = b_1 w,_r + C_1 r + C_2/r\,; \quad \psi = b_2 w,_r + C_3 r + C_4/r\,;$$
$$L_3(w,_r) + M^4\ddot{w} = 0\,. \tag{3}$$

В конечном виде решение для $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $u(r, t)$ представляется с помощью разложения в ряд по полученной фундаментальной системе собственных ортонормированных функций:

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n}\left[J_0(\beta_n r) + k_{1n}I_0(\beta_n r) + k_{2n}Y_0(\beta_n r) + k_{3n}K_0(\beta_n r)\right];$$

$$d_n^2 = \int_{r_0}^{1}\left[J_0(\beta_n r) + k_1 I_0(\beta_n r) + k_2 Y_0(\beta_n r) + k_3 K_0(\beta_n r)\right]^2 r dr\,. \qquad (4)$$

Для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластинки внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомое решение $u(r, t)$, $\psi(r, t)$ и $w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд по построенным системам собственных функций (4):

$$q(r,t) = M\sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad w(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t);$$

$$\psi(r,t) = b_2\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad u(r,t) = b_1\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t)\,. \qquad (5)$$

Выражения для функций $q_n(t)$ получим, помножив первое из соотношений в (5) на v_n и проинтегрировав по радиусу пластинки. В силу ортонормированности функций v_n имеем:

$$\int_{r_0}^{1} v_m v_n r\, dr = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad q_n(t) = \frac{1}{M}\int_{r_0}^{1} q(r,t) v_n r\, dr\,.$$

Уравнение для определения неизвестной функции $T_n(t)$ в этом случае можно получить из третьего уравнения системы (3), после подстановки в него выражений (5):

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n\,. \qquad (6)$$

Общее решение уравнения (6) можно принять в виде:

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau) q_n(\tau) d\tau\,. \qquad (7)$$

Таким образом, прогиб, относительный сдвиг и радиальное перемещение в круглой трехслойной пластинке с отверстием, находящейся под воздействием осесимметричной динамической нагрузки, определяются соотношениями (5) с учетом (7).

Численные результаты получены для случая пластинки, заделанной по внутреннему и внешнему контурам, и пластинки, внешний контур которой заделан, а на внутреннем – шарнирная опора. Трансцендентные уравнения для определения собственных чисел, исследованы на интервале 0 … 500. Первые 10 корней, вычисленные с точностью до 0,001 при радиусе отверстия $r_0 = 0{,}2$ ($h_1 = h_2 = 0{,}005$, $c = 0{,}1$), приведены в таблице.

Таблица.

Заделка-заделка				*Заделка-шарнир*			
n	β_n	n	β_n	n	β_n	n	β_n
0	5.883	5	25.507	0	5.877	5	25.505
1	9.785	6	29.436	1	9.785	6	29.435
2	13.717	7	33.364	2	13.717	7	33.364
3	17.647	8	37.293	3	17.647	8	37.293
4	21.577	9	41.220	4	21.577	9	41.220

Частоты исследовались для кольцевой пластинки типа: металл – полимер – металл. В качестве металла принимался дюралюминий, заполнитель – фторопласт. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3].

Полученное в работе решение задачи о поперечных колебаниях кольцевой трехслойной пластинки, а также проведенное исследование частот собственных колебаний может быть использовано, например, при расчете панелей с иллюминаторами.

Литература

1. Старовойтов Э. И. Осесимметричные колебания круглой трехслойной пластинки, возбужденные тепловым ударом. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук - 1988, № 3, С. 3–10.
2. Громыко Ю. В. Собственные колебания пластины с отверстием. // Материалы молодежной научно-технической конференции вузов приграничных регионов славянских государств, 23-24 окт. 2001 г. – БГТУ: Брянск, 2002. – С. 9–15.
3. Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Гомель: БелГУТ, 2001. 344 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований РБ (проект Т04М–002).

ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОПУЩЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Гурин А.С., БГУ, Минск

Введение

При анализе и моделировании динамических процессов, временных рядов в экономике, медицине, защите окружающей среды, а также при создании систем искусственного интеллекта задача прогнозирования является одной из часто встречающихся. Можно предложить ряд ее решений в том случае, если данные наблюдаются без "пропусков". Наличие же пропущенных наблюдений значительно усложняет поиск и реализацию оптимальных алгоритмов прогнозирования и исследование их свойств. Результаты решения этой проблемы представлены в настоящей статье для модели векторной авторегрессии наблюдаемых временных рядов на основе методов робастного статистического анализа данных [1, 2].

Математическая модель

Пусть наблюдаемый d-векторный $(d \geq 1)$ временной ряд $Y_t = (Y_{t1},...,Y_{td})' \in \mathbf{R}^d$ описывается моделью VAR(1) векторной авторегрессии первого порядка [3]:

$$Y_{t+1} = BY_t + U_{t+1},\ t \in \mathbf{Z}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $B \in \mathbf{R}^{d\times d}$ – матрица коэффициентов авторегрессии, спектральный радиус которой $\lambda_0 = \lambda_0(B) < 1$, $\{U_t \in R^d : t \in Z\}$ – независимые в совокупности случайные векторы с нормальным распределением: $\mathcal{L}\{U_t\} = \mathcal{N}_d(0_d, \Sigma)$, $t \in \mathbf{Z}$. В наблюдениях $\{Y_t\}$ имеются “пропуски”. Шаблоном “пропусков” назовем последовательность двоичных векторов $O_t = (O_{ti})$, $t \in \mathbf{Z}$, где $O_{ti} = 1$, если Y_{ti} наблюдается, $O_{ti} = 0$, если Y_{ti} не наблюдается. Обозначим минимальный и максимальный моменты времени с наблюдаемыми компонентами: $t_- = \min\{t : \sum_{i=1}^{d} O_{ti} > 0\}$, $t_+ = \max\{t : \sum_{i=1}^{d} O_{ti} > 0\}$; без ограниче-