

дем называть ковариации случайного вектора ξ и обозначать: $\text{aCov}\{\xi_{ij}, \xi_{ij}\} = \Sigma_{ij}$; аналогично определим асимптотическую дисперсию и математическое ожидание: $\text{aD}\{\xi_{ii}\} = \Sigma_{ii}$, $\text{aE}\{\xi_i\} = \text{E}\{\xi_i\}$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

Теорема 2. Если для модели (1) выполнено П2, то при $T \rightarrow \infty$ вектор, составленный из элементов матрицы $\sqrt{T}(\hat{B} - B)$, распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями $(i, j, i', j' \in \{1, \dots, d\})$:

$$\text{aCov}\{\sqrt{T}(\hat{B} - B)_{ij}, \sqrt{T}(\hat{B} - B)_{i'j'}\} = \sum_{k, k'=0}^1 \sum_{n, m, n', m'=1}^d \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+k'} (B^{1-k})_{in} (B^{1-k'})_{i'n'} \times \\ g_{\tau, k, k', n, m, n', m'} C_{\tau, k, k', n, m, n', m'} (G_0^{-1})_{mj} (G_0^{-1})_{m'j'}$$

Прогнозирование при известных параметрах и его риск

Определим конечное множество $M = \{(t, i), t \in \mathbf{Z}, i \in \{1, \dots, d\}; O_n = 1\}$; элементы этого множества лексикографически упорядочены в возрастающем порядке; $K = |M|$ – общее число регистрируемых компонент. Определим биекцию $M \leftrightarrow \{1, \dots, K\}: k = \chi(t, i)$ и обратную функцию $(t, i) = \bar{\chi}(k)$. Составим K -вектор всех наблюдаемых компонент: $X = (X_1, \dots, X_K)' \in \mathbf{R}^K$, $X_k = Y_{\bar{\chi}(k)}$, $k = 1, \dots, K$.

Пусть $Y_{T+\tau} \in \mathbf{R}^d$ – “будущий вектор”, который необходимо предсказать для глубины прогнозирования $\tau \geq 1$. Определим $(d \times d)$ -матричный риск R и (скалярный) риск r прогнозирования: $R = \text{E}\left\{(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau})(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau})'\right\}$, $r = \text{tr}(R) \geq 0$. Обозначим ковариации: $F = \text{cov}\{X, X\} \in \mathbf{R}^{K \times K}$, $H = \text{cov}\{X, Y_{T+\tau}\} \in \mathbf{R}^{K \times d}$, $A_0 = A_0(B, \Sigma) = H'F^{-1} \in \mathbf{R}^{d \times K}$.

Теорема 3. Если для модели (1) $|F| \neq 0$, то МП-прогноз и его риск имеют вид:

$$\hat{Y}_{T+\tau} = \text{E}\{Y_{T+\tau} | X\} = A_0 X, \quad R = G_0 - H'F^{-1}H \geq 0, \quad r = \text{tr}(G_0) - \text{tr}(F^{-1}HH')$$

Литература

1. Харин Ю.С. Робастность в статистическом распознавании образов. – Минск: “Университетское”, 1992, 225с.
2. Kharin Yu.S. Robustness in Statistical Pattern Recognition. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1996, 302p.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – Москва: “Мир”, 1976, 755с.

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Доровская Е.П., БелГУТ, Гомель

Значительное распространение трехслойных конструкций во многих отраслях промышленности привело к необходимости разработки методов их расчета. В условиях деформации изгиба они оказываются наиболее рациональными.

Рассмотрена постановка задачи об изгибе несимметричной по толщине трехслойной пластины с жестким наполнителем, лежащей на упругом основании. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине наполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Воздействие основания описывается моделью Винклера. Деформации считаем малыми.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. На внешний слой пластины действует распределенная силовая нагрузка $p(x), q(x)$, а на нижний - реакция основания $q_r = -kw$ (рис. 1).

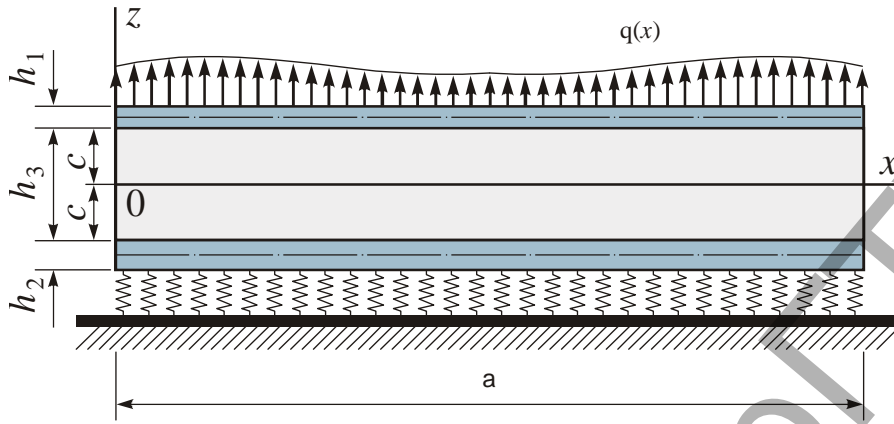


Рис. 1. Трехслойная пластина с жестким заполнителем

Здесь k - коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели); знак минус указывает на то, что реакция направлена в сторону, противоположную прогибу, w - прогиб пластины.

Граничные условия соответствуют свободному опиранию пластины по кромкам на неподвижные в пространстве жесткие опоры.

Система из пяти уравнений равновесия и силовые граничные условия получены вариационным методом:

$$\begin{aligned}
 & a_1 u_{x,xx} + a_8 u_{y,yx} + a_2 \psi_{x,xx} + a_9 \psi_{y,yx} - a_3 w_{,xxx} - a_{10} w_{,yyx} + a_{11} (u_{x,yy} + u_{y,xy}) + \\
 & \quad a_{12} (\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) - a_{13} w_{,xyy} = -p_x, \\
 & a_8 u_{x,xy} + a_1 u_{y,yy} + a_9 \psi_{x,xy} + a_2 \psi_{y,yy} - a_{10} w_{,xxy} - a_3 w_{,yyy} + a_{11} (u_{x,yx} + u_{y,xx}) + \\
 & \quad a_{12} (\psi_{x,yx} + \psi_{y,xx}) - a_{13} w_{,xyx} = -p_y, \\
 & a_2 u_{x,xx} + a_9 u_{y,yx} + a_4 \psi_{x,xx} + a_{18} \psi_{y,yx} - a_5 w_{,xxx} - a_{14} w_{,yyx} + a_{12} (u_{x,yy} + u_{y,xy}) + \\
 & \quad a_{19} (\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) - a_{16} w_{,xyy} - 2G^{(3)} c \psi_x = 0, \\
 & a_9 u_{x,xy} + a_2 u_{y,yy} + a_{18} \psi_{x,yx} + a_4 \psi_{y,yy} - a_{14} w_{,xxy} - a_5 w_{,yyy} + a_{12} (u_{x,yx} + u_{y,xx}) + \\
 & \quad a_{19} (\psi_{x,yx} + \psi_{y,xx}) - a_{16} w_{,xyx} - 2G^{(3)} c \psi_y = 0, \\
 & a_3 u_{x,xxx} + a_{10} u_{y,yxx} + a_5 \psi_{x,xxx} + a_{14} \psi_{y,yxx} - a_6 w_{,xxxx} - a_{15} w_{,yyxx} + a_{10} u_{x,xyy} + \\
 & \quad a_3 u_{y,yyy} + a_4 \psi_{x,xyy} + a_5 \psi_{y,yyy} - a_{15} w_{,xxyy} - a_6 w_{,yyyy} + \\
 & \quad a_{13} (u_{x,yxy} + u_{y,xyx}) + a_{16} (\psi_{x,yxy} + \psi_{y,xyx}) - 2a_{17} w_{,xyxy} = -(q + q_r), \tag{1}
 \end{aligned}$$

Здесь в качестве искоемых функций выступают тангенциальные перемещения срединной плоскости заполнителя u_x, u_y , прогиб пластины w и сдвиги в заполнителе ψ_x, ψ_y .

Решение системы дифференциальных уравнений (1) предполагаем в виде разложения в двойные тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sum_{n,m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; & u_x &= \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{1mn} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; & u_y &= \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{2mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \\
 \psi_y &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \Psi_{2mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; & \psi_x &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \Psi_{1mn} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \tag{2}
 \end{aligned}$$

Нагрузку q также разложим в ряд синусов:

$$q = \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy.$$

После подстановки перемещений и нагрузки в систему (1) получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд перемещений $W_{mn}, U_{1mn}, U_{2mn}, \Psi_{1mn}, \Psi_{2mn}$:

$$\begin{cases} b_6 U_{1mn} + b_7 U_{2mn} + b_8 \Psi_{1mn} + b_9 \Psi_{2mn} + b_{10} W_{mn} = 0; \\ b_7 U_{1mn} + b_{11} U_{2mn} + b_9 \Psi_{1mn} + b_{12} \Psi_{2mn} + b_{13} W_{mn} = 0; \\ b_8 U_{1mn} + b_9 U_{2mn} + b_{14} \Psi_{1mn} + b_{15} \Psi_{2mn} + b_{16} W_{mn} = 0; \\ b_9 U_{1mn} + b_{12} U_{2mn} + b_{15} \Psi_{1mn} + b_{17} \Psi_{2mn} + b_{18} W_{mn} = 0; \\ b_1 U_{1mn} + b_2 U_{2mn} + b_3 \Psi_{1mn} + b_4 \Psi_{2mn} + b_5 W_{mn} = q_{mn}. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3) можно выписать в определителях

$$U_{1mn} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad U_{2mn} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \Psi_{1mn} = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad \Psi_{2mn} = \frac{\Delta_4}{\Delta}; \quad W_{mn} = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad (4)$$

где

$$\Delta := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ b_7 & b_{11} & b_9 & b_{12} & b_{13} \\ b_8 & b_9 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_9 & b_{12} & b_{15} & b_{17} & b_{18} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 := \begin{pmatrix} 0 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ 0 & b_{11} & b_9 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_9 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ 0 & b_{12} & b_{15} & b_{17} & b_{18} \\ q_{mn} & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 := \begin{pmatrix} b_6 & 0 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ b_7 & 0 & b_9 & b_{12} & b_{13} \\ b_8 & 0 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_9 & 0 & b_{15} & b_{17} & b_{18} \\ b_1 & q_{mn} & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & 0 & b_9 & b_{10} \\ b_7 & b_{11} & 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_8 & b_9 & 0 & b_{15} & b_{16} \\ b_9 & b_{12} & 0 & b_{17} & b_{18} \\ b_1 & b_2 & q_{mn} & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 & 0 & b_{10} \\ b_7 & b_{11} & b_9 & 0 & b_{13} \\ b_8 & b_9 & b_{14} & 0 & b_{16} \\ b_9 & b_{12} & b_{15} & 0 & b_{18} \\ b_1 & b_2 & b_3 & q_{mn} & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_5 := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & 0 \\ b_7 & b_{11} & b_9 & b_{12} & 0 \\ b_8 & b_9 & b_{14} & b_{15} & 0 \\ b_9 & b_{12} & b_{15} & b_{17} & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & q_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определители в (4) любым из стандартных методов, получим амплитуды $U_{1mn}, U_{2mn}, \Psi_{1mn}, \Psi_{2mn}, W_{mn}$. Далее по формулам (2) вычисляются искомые функции.

Численный счёт производился для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т.

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.- 576с.
2. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003.- 367с.