$$D_{\theta} = c^2\theta_{\overline{S}Si} + \frac{1}{I_c}\left(M_{ai} - M_{\rho} - f_T\theta_{\underset{ti}{\bullet}}\right);$$

$\overline{F}_i^*$ – вектор суммарного усилия на единицу массы провода в i-ом узле.

Схема (2) явная и позволяет выразить $\hat{\overline{R}}_i$ и $\hat{\theta}_i$ через $\overline{R}_i$ и $\check{\overline{R}}_i$, θ_i и $\check{\theta}_i$ с двух предыдущих слоев. Поэтому, начиная со второго слоя, разностное решение вычисляется по указанной схеме. Решение на первом слое определяется по начальным данным с использованием разложения $\overline{R}_i$ и θ_i в ряд Тейлора [1].

Вычислительный эксперимент проводился по разработанной компьютерной программе (КП), в которой реализован численный метод расчета пляски проводов на основе уравнений (1). Она позволяет найти амплитуды колебаний проводов при пляске, максимальные и минимальные тяжения, а также определить характер процесса: развитие автоколебаний или их затухание. Достоверность расчетов по КП подтверждена сравнением их с опытными данными [5]. Таким образом, математическая модель и КП могут быть применены для оценки динамических характеристик пляски проводов воздушных ЛЭП.

Литература

1. Сергей И. И., Стрелюк М. И. Динамика проводов электроустановок энергосистем при коротких замыканиях: Теория и вычислительный эксперимент. – Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 252 с.
2. Стрелюк М. И., Сергей И. И. Расчет пляски расщепленных проводов с большим числом составляющих // Повышение эффективности сетей 110–1150 кВ: Сб. ст. / Науч.-исслед. ин-т по передаче электр. энергии постоян. током высокого напряжения (НИИПТ). – Ленинград: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. – С. 113–126.
3. Kazuo Goto, Toihiro Koike. A Numerical Calculation Method for Galloping and Prevention of it // Trans IEE. Japan. – 1977. – B97, № 7. – P. 405–412.
4. Masary Yamaoka. A Numerical Calculation Method for Galloping Oscillation of a Bundle Conductor Transmission Line // Trans. IEE Japan. – 1979. – B99, № 9. – P. 569–576.
5. The Simulation Method of Galloping of Overhead Transmission Line. – Technical Laboratory of the Hokkaido Electric Power Co. Ltd. – Joint Meeting of UNIPEDE, CORECH – Galloping, 1983, Kyoto, Japan.

ВОЗДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Кузнецова А.А., БНТУ, Минск

Рассматривается движение с постоянной скоростью нормальной нагрузки по вязкоупругой балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве. По балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве, движется сосредоточенная нагрузка интенсивности P с постоянной скоростью c.

Дифференциальное уравнение изгиба балки, лежащей на упругом основании, записывается, как известно, следующим образом:

$$B\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,t), \tag{1}$$

где *w(x,t)* - нормальное перемещение оси балки, *B=EI* - ее изгибная жесткость, *p(x,t)* - интенсивность нагрузки, приложенной к балке, ρ плотность материала балки.

В неподвижной системе координат вектор перемещения в упругом полупространстве удовлетворяет уравнению ([3])

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla div\,\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ - вектор перемещения, λ, μ, ρ - константы материала основания. Принято, что между балкой и поверхностью полупространства силы трения не возникают, то есть

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0. \tag{3}$$

Кроме того, нормальные оси перемещения оси балки и вязкоупругого полупространства под ней совпадают, то есть

$$w(x,t) = u_z(x,0,0,t) \tag{4}$$

Далее, как и предыдущие исследователи, будем считать, что нагрузка передается на основание равномерно по ширине опорной полосы.

Введем подвижную систему координат, связанную с нагрузкой, так как в подвижной системе (вместо x рассматриваем $x - ct$), в которой нагрузка приложена в начале координат, задачу можно считать стационарной. При этом уравнения (1) и (2) примут вид:

$$B\frac{d^4w}{dx^4} + \rho c^2\frac{d^2w}{dx^2} = P(x), \tag{5}$$

$$\mu\Delta\vec{U} + (\lambda+\mu)\nabla div\vec{U} = \rho c^2\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ - вектор перемещения в полупространстве в подвижной системе координат.

Предположим, что как материал балки, так и основание наделены вязкоупругими свойствами. Добавление вязкости приводит к необходимости учитывать воздействие почти периодического возмущения в течение достаточно долгого времени. В задачах, не связанных с интегро-дифференциальными уравнениями, указанная периодичность учитывается добавлением сомножителей вида $\exp(i\omega x)$, а также введению так называемого комплексного модуля упругости $E = E' + iE''$. Однако представление комплекснозначных функций действительного переменного в показательной форме не совсем удобно с точки зрения дифференцирования и разделения действительной и мнимой частей. Поэтому для учета вязкости представим $\lambda, \mu, \vec{U}$ в виде комплексных чисел и функций соответственно в алгебраической форме.

Таким образом, мы введем следующие обозначения $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\vec{U} = \overrightarrow{U_1} + i\overrightarrow{U_2}$ и подставим в уравнение (6). Исходя из свойств аддитивности операторов Лапласа и Гамильтона, мы получим уравнение:

$$(\mu_1 + i\mu_2)(\Delta\overrightarrow{U_1} + i\Delta\overrightarrow{U_2}) + ((\lambda_1+\mu_1) + i(\lambda_2+\mu_2))(\nabla div\overrightarrow{U_1} + i\,\nabla div\overrightarrow{U_2}) =$$

$$= \rho c^2\left(\frac{\partial^2\overrightarrow{U_1}}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\overrightarrow{U_2}}{\partial x^2}\right) \tag{7}$$

Разделив в уравнении (7) действительную и мнимую части, получим систему

$$\begin{cases}\Delta(\mu_1\overrightarrow{U_1}-\mu_2\overrightarrow{U_2})+\nabla div(\mu_1\overrightarrow{U_1}-\mu_2\overrightarrow{U_2})+\nabla div(\lambda_1\overrightarrow{U_1}-\lambda_2\overrightarrow{U_2})=\rho c^2\dfrac{\partial^2\overrightarrow{U_1}}{\partial x^2}\\ \Delta(\mu_2\overrightarrow{U_1}+\mu_1\overrightarrow{U_2})+\nabla div(\mu_2\overrightarrow{U_1}+\mu_1\overrightarrow{U_2})+\nabla div(\lambda_1\overrightarrow{U_1}+\lambda_1\overrightarrow{U_2})=\rho c^2\dfrac{\partial^2\overrightarrow{U_2}}{\partial x^2}\end{cases} \quad (8)$$

Разложив, следуя [1], поле перемещений на потенциальную и соленоидальную составляющие ($\vec{U}=\nabla\Phi+\vec{U'}$), можно получить следующие системы уравнений:

$$\begin{cases}\left(\Delta-h_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_1-\left(\Delta-h_2^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_2=0\\ \left(\Delta-h_2^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_1+\left(\Delta-h_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_2=0\end{cases}, \quad (9)$$

$$\begin{cases}\left(\Delta-k_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_1'}-\left(\Delta-k_2^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_2'}=0\\ \left(\Delta-k_2^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_1'}+\left(\Delta-k_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overrightarrow{U_2'}=0\end{cases}, \quad (10)$$

$$\begin{cases}div\overrightarrow{U_1'}=0\\ div\overrightarrow{U_2'}=0\end{cases}, \quad (11)$$

где $h_j=\dfrac{c}{c_j},\ k_j=\dfrac{c}{c_{(j+2)}},\ c_j=\sqrt{\dfrac{2\mu_j+\lambda_{j1}}{\rho}},\ c_{(j+2)}=\sqrt{\dfrac{\mu_j}{\rho}},\ (j=1,2)$.

Для решения систем (9) - (11) можно применить методы (преобразований Фурье), аналогичные методам решения задачи в упругой постановке [1]. С учетом симметрии относительно оси *Oy*, воспользуемся представлением неизвестных функций в виде двумерных интегралов Фурье ($k=1,2$):

$$U'_{kx}=\int_0^\infty\int[A_{kx}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{kx}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_{(2k)}z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta,$$

$$U'_{ky}=\int_0^\infty\int[A_{ky}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{ky}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_{(2k)}z]\sin\beta y\,d\alpha\,d\beta,$$

$$U'_{kz}=\int_0^\infty\int[A_{kz}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{kz}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_{(2k)}z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta,$$

$$\Phi_k=\int_0^\infty\int[A_{k\varphi}(\alpha,\beta)\cos\alpha x+C_{k\varphi}(\alpha,\beta)\sin\alpha x]\exp[-\gamma_{(2k-1)}z]\cos\beta y\,d\alpha\,d\beta.$$

Подставим выражения для потенциальных составляющих в систему (9):

$$\begin{cases}((1-h_1^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2)\Phi_1-((1-h_2^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2)\Phi_2=0\\ ((1-h_2^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2)\Phi_1-((1-h_1^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2)\Phi_2=0\end{cases}.$$

Последняя система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю: $((1-h_1^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2)^2+((1-h_2^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2)^2=0$. Отсюда следует, что $(1-h_1^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_1^2=0,\ (1-h_2^2)\alpha^2+\beta^2-\gamma_3^2=0$. Другими словами, система (9) распадается на два независимых уравнения: $\left(\Delta-h_k^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_k=0,\ (k=1,2)$.

Аналогично, система (10) распадается на два независимых (векторных) уравнения $\left(\Delta - k_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overline{U_k'} = 0,\ (k = 1, 2)$. Что касается системы (точнее, пары уравнений) (11), то она ничем не отличается от случая упругой постановки.

Используя формулы [2], запишем выражения для действительной и мнимой части нормального перемещения поверхности упругого подпространства под движущейся нагрузкой

$$U_{1z} = \frac{4P(1-\nu)}{\pi^2 b}\int_0^\infty \frac{S_1(u)du}{E'u + \varepsilon_1 u^2(u^2-\delta^2)S_1(u)},\ \text{где}\ S_1(u) = \frac{k^2}{1-\nu}\int_0^\infty \frac{D_1 \sin(u\tau)d\tau}{\tau\left[4D_2(D_1-D_2)D_0^2 - k^4\right]},$$

$$D_0 = \sqrt{1+\tau^2},\ D_1 = \sqrt{1+\tau^2-h_1^2},\ D_2 = \sqrt{1+\tau^2-k_1^2},\ \varepsilon_1 = \frac{32(1-\nu^2)B}{\pi b^4},\ \delta = \frac{bc\sqrt{\rho_b}}{2\sqrt{B}}.$$

Таким образом, задача в наследственно-упругой постановке распалась на пару независимых задач, по виду совпадающих с задачей в упругой постановке. Поэтому формулы для перемещений, деформаций и напряжений, полученные в монографии [1], с некоторыми уточнениями применимы в нашем случае.

Литература

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем – М.: Машиностороение, 1970. – 734 с.
2. Чигарев А.В., Липень Б.И. Воздействие сосредоточенной нагрузки при движении на упругое полупространство при движении по его поверхности. – Мн.: Машиностроение, 1999, стр. 69-74. 3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. Школа, 1976. – 272 с.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА БЕЗЫНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

Леоненко Д. В., БелГУТ, Гомель

В монографии [1] исследованы нагружения трехслойных стержней, пластин и оболочек при локальных воздействиях. Здесь рассматриваются поперечные колебания несимметричного по толщине трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, расположенного на упругом основании.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. К внешней поверхности первого несущего слоя приложена динамическая поверхностная нагрузка $q(x, t)$. На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x,t)$ (рисунок 1). Через $w_k(x, t)$ и $u_k(x, t)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных линий несущих слоёв. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине l.

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$: