

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Старовойтов С. А., БелГУТ, Гомель

В современных отраслях промышленности и строительстве широкое применение находят трехслойные элементы конструкций, что вызывает необходимость разработки методов их расчета. Изгиб трехслойных стержней на упругом основании под действием равномерно распределенной по всей длине стержня нагрузки исследовался в работах [1–3]. Здесь рассматривается деформирование подобного стержня при действии локальных нагрузок.

Постановка задачи и ее решение проводится в декартовой системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета принята гипотеза «ломаной нормали»: в тонких внешних несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Бернулли, в более толстом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(x)$ . На границах склейки слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы слоев несжимаемы в поперечных направлениях. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Все перемещения и линейные размеры отнесены к длине стержня  $l$ . Деформации малые.

Действие упругого основания на стержень описывается моделью Винклера: реакция основания  $q_f(x)$  пропорциональна прогибу стержня  $w(x)$ .

На внешние слои стержня действует внешняя вертикальная распределенная нагрузка  $q(x)$  и реакция упругого основания  $q_f(x)$ . В качестве искоемых величин приняты: прогиб  $w(x)$ , дополнительный угол поворота  $\psi(x)$  и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя  $u(x)$ .

Уравнения равновесия трехслойного стержня на упругом основании получены из вариационного принципа Лагранжа. В перемещениях они имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} &= 0; & a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi &= 0; \\ a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} - a_7 w_{,xxx} + \kappa w &= q, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_1, \dots, a_7$  – параметры, зависящие от механических свойств материалов и геометрических характеристик слоев стержня; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Система (1) сведена к неоднородному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно прогиба стержня:

$$w_{,xxxxxx} + \alpha_1 w_{,xxxx} + \alpha_2 w_{,xx} + \alpha_3 w = \alpha_4 q + \alpha_5 q_{,xx}, \quad (2)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$  – коэффициенты, определяемые через параметры  $a_1, \dots, a_7$ .

Решение уравнения (2) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения  $w_0(x)$  и частного решения неоднородного уравнения  $w_p(x)$ . Для реальных физико-механических параметров материалов слоев, геометрических размеров стержня, жесткости упругого основания, при которых остаются справедли-

ливыми приняты гипотезы, необходимо рассматривать три решения уравнения (2): для оснований малой (I), средней (II) и высокой жесткости (III):

$$\begin{aligned}
 w_{I,III}(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\beta_1 x} \cos(\beta_2 x) + C_4 e^{\beta_1 x} \sin(\beta_2 x) + \\
 &\quad + C_5 e^{-\beta_1 x} \cos(\beta_2 x) - C_6 e^{-\beta_1 x} \sin(\beta_2 x) + w_p(x); \\
 w_{II}(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{-\lambda_3 x} + C_5 e^{\lambda_5 x} + C_6 e^{-\lambda_5 x} + w_p(x). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Частные решения  $w_p(x)$  строятся при помощи ядра Коши  $K(x, s)$  для каждого типа основания и вида внешней нагрузки:

$$w_p(x) = \int_0^x K(x, s) (\alpha_4 q(s) + \alpha_5 q_{,xx}(s)) ds. \quad (4)$$

1. Пусть на стержень действует поверхностная нагрузка, равномерно распределенная внутри отрезка  $[b; a]$ . Тогда внешняя нагрузка  $q(x)$  представима в виде

$$q(x) = q_0 (H_0(a - x) - H_0(b - x)), \quad (5)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хевисайда нулевого порядка:  $H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Функции прогибов стержня для каждого типа основания получим, подставив (5) в (4), а результат в (3).

2. Действие сосредоточенной силы. Пусть распределенная поверхностная нагрузка  $q(x)$  действует в некоторой малой окрестности точки с координатой  $x = a$ . Обозначив радиус этой окрестности через  $\xi$ , распределенную нагрузку  $q(x)$  можно записать следующим образом:

$$q(x) = \frac{Q}{2\xi} (H_0(a + \xi - x) - H_0(a - \xi - x)); \quad (6)$$

где  $Q = 2q_0\xi$ .

Подставив (6) в (4) и устремив величину  $\xi$  к нулю, оставляя величину  $Q$  постоянной, получим частное решение  $w_p(x)$  уравнения (2). Прогиб стержня найдем, подставив  $w_p(x)$  в (3).

Искомые перемещения  $\psi(x)$  и  $u(x)$  выражаются через функции прогиба  $w(x)$  из уравнений (1). Константы интегрирования определяются из условий закрепления стержня:

– при шарнирном опирании обоих концов стержня:

$$\text{при } x = 0, 1 \quad w(x) = \psi(x) = u(x) = M(x) = 0;$$

– для стержня, свободно лежащего на упругом основании

$$\text{при } x = 0, 1 \quad Q(x) = H(x) = u(x) = M(x) = 0,$$

где  $M(x)$ ,  $H(x)$ ,  $Q(x)$  – суммарные внутренние моменты и сила в поперечном сечении стержня.

Численная реализация полученных аналитических решений проведена для трехслойного стержня с материалами слоев Д16Т – фторопласт – Д16Т. Построены кривые изменения перемещений и напряжений при действии указанных видов внешних нагрузок

в зависимости от жесткости упругого основания, геометрических и механических параметров слоев стержня.

Таким образом, полученные решения позволяют описывать напряженно-деформированное состояние упругого трехслойного стержня с жестким наполнителем, покоящимся на упругом основании, при действии локальных поверхностных нагрузок и сосредоточенных сил.

### Литература

1. Яровая А. В., Старовойтов С. А. Трехслойный стрежень на упругом основании // Материалы, технологии, инструменты.– 2003.– Т. 8, № 2.– С. 9–11.
2. Старовойтов С. А. Напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня на упругом основании // Вестник БелГУТа.– 2004.– № 1(8).– С. 25–28.
3. Старовойтов С. А. Моделирование поведения трехслойного стержня на упругом основании // Сборник трудов молодых ученых Национальной академии наук Беларуси.– 2004.– Т. 4.– С. 134–137.

## О ПРИНЦИПАХ ВЫПОЛНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАЩИТЫ ТРАНСФОРМАТОРА

Томкевич А. П., БНТУ, Минск

Существующие дифференциальные защиты трансформаторов анализируют разность приведенных токов со стороны высшего и низшего напряжений и в случае превышения величины уставки, обусловленной различного рода небалансами, выдают сигнал на отключение трансформатора. Традиционно выполняется общая защита для всех обмоток, требующая учета схем соединения обмоток, отстройки от аномальных режимов и работы устройства РПН, что приводит к увеличению тока срабатывания. Такой подход позволяет независимо решать вопросы проектирования трансформатора и его релейной защиты.

Теоретически возможна реализация дифференциальной защиты индивидуально для каждой из обмоток. Это техническое решение требует изменений в конструкции трансформатора – установку дополнительных трансформаторов тока (ТТ), а также большего числа измерительных органов, что приводит к его экономической неэффективности.

Основным аномальным режимом, обуславливающим значительный коэффициент отстройки при расчете тока срабатывания, является бросок тока намагничивания (БТН), возникающий при включении трансформатора или при устранении внешнего короткого замыкания и превышающий номинальный ток трансформатора ( $I_{ном}$ ) в 6 – 8 раз [1].

Разработанные способы отстройки от БТН и сверхтоков внешних КЗ [1, 2] с использованием быстронасыщающихся трансформаторов (реле РНТ-56х) и торможением от токов плеч (реле ДЗТ-11) обеспечивают ток срабатывания защиты порядка  $(1 - 1.2) I_{ном}$ . В случае применения реле, дополнительно реализующих принципы распознавания сигналов (ДЗТ-21 или устройства ЯРЭ-2201 на микроэлектронной базе), удается достичь тока срабатывания в пределах  $(0.3 - 0.7) I_{ном}$ .

В современных цифровых защитах трансформаторов получило развитие второе направление. Фактически переход на новую элементную базу позволил адаптивно выбирать плечо торможения, улучшить характеристики фильтрации сигнала и осуществлять контроль по следующим критериям: процентное содержание второй гармоники в пер-