счёт использования электронно-вычислительных средств.

Литература

1. Методы разбиения схем РЭА на конструктивно законченные части/К.К. Морозов, А.Н. Мелихов, Л.С. Бернштейн и др.; Под ред. К.К. Морозова. – М.: Сов. радио, 1978. С. 30-40.
2. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. – М.: Наука, 1974. – С. 60-65.
3. Шандриков А.С. Последовательный алгоритм разрезания графа с оптимизацией результата//Современные проблемы математики и вычислительной техники: материалы III республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, 26-28 ноября 2003. – Брест: УО «БГТУ». – 2003. С. 283-286.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ MTD-МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Ярмола А.Н., БГУ, Минск

1. Введение. В математической статистике часто приходится иметь дело с дискретными данными, поэтому актуальной является проблема разработки и исследования вероятностных моделей, которые позволяют адекватно описывать дискретные наблюдения, в частности, моделей дискретных временных рядов (ДВР). Модели дискретных временных рядов используются в генетике [1], экономике [2], защите информации [3] и других приложениях. Одной из удобных моделей является модель цепи Маркова с дискретным временем. Однако, поскольку число параметров цепи Маркова с ростом ее порядка растет экспоненциально, то использование на практике цепей Маркова высокого порядка становится малоэффективным. Для преодоления этого недостатка был разработан и исследован ряд “малопараметрических” моделей дискретных временных рядов с “длинной памятью” [4-8]. Большинство работ, в которых рассматриваются “малопараметрические” модели ДВР, посвящены в основном практическому применению этих моделей. В данном докладе для одной из таких широко применяемых моделей – MTD-модели [2,4,8] – исследуются вероятностные свойства, а также предлагается метод статистического оценивания параметров.

2. Вероятностные свойства MTD-модели. Пусть $\{x_t \in A: t \in \mathbf{N}\}$ – однородная цепь Маркова (ОЦМ) s-ого порядка, $1\leq s<+\infty$, с пространством состояний $A=\{0,\ldots,N-1\}$. Предложенная А. Рафтери [4] MTD-модель, задает специальный вид матрицы вероятностей переходов P:

$$P=P(\lambda,Q),\ p_{i_0,\ldots,i_s}=\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_j q_{i_j i_s}, \tag{1}$$

где $i_0,\ldots,i_s \in A$, $Q=(q_{ik})$ – некоторая стохастическая $(N\times N)$-матрица; $\lambda=(\lambda_0,\ldots,\lambda_{s-1})$ – некоторый s-вектор вероятностей, $\lambda_0>0$, $\lambda_j\geq 0$, $j=1,\ldots,s-1$, $\lambda_0+\ldots+\lambda_{s-1}=1$. Важным обобщением MTD-модели является MTDg-модель, в которой для каждого из s прошлых моментов времени используется “своя” матрица вероятностей переходов [8]:

$$p_{i_0,\ldots,i_s}=\sum_{j=0}^{s-1}\lambda_j q^{(j)}_{i_j i_s}, \tag{2}$$

где $Q^{(j)}=(q^{(j)}_{ik})$ – стохастическая $(N\times N)$-матрица, соответствующая лагу j.

Лемма 1. *Если $(N\times N)$-матрица $Q^{(0)}$ – эргодическая, то ОЦМ MTDg-модели эргодическая.*

Теорема 1. *Если* $\{x_t\}$ *– временной ряд, соответствующий MTDg-модели, то его одномерные распределения* $\{\pi^{(t)}\}$ *связаны линейным соотношением:*

$$\pi^{(t)} = \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_j (Q^{(j)})' \pi^{(t-s+j)}, \; t \ge s. \tag{3}$$

Теорема 2. *В условиях Леммы 1 s-мерное стационарное распределение* Π^* *имеет вид:*

$$\pi^*_{i_1,\dots,i_s} = \prod_{l=0}^{s-1}\left(\pi^*_{i_{s-l}} + \sum_{j=l+1}^{s-1}\lambda_j\left(q^{(j)}_{i_{j-l}i_{s-l}} - \sum_{r=0}^{N-1} q^{(j)}_{r i_{s-l}}\pi^*_r\right)\right). \tag{4}$$

В дальнейшем для оценивания параметров нам понадобится следующее утверждение.

Следствие 1. *В условиях Леммы 1 для стационарных двумерных маргинальных распределений* $\Pi^*(m) = \left(\pi^*_{ki}(m)\right)$ *векторов* $(x_{t-m}, x_t)'$, $1 \le m \le s$, *справедливо соотношение:*

$$\pi^*_{ki}(m) = \pi^*_k \pi^*_i + \pi^*_k \lambda_{s-m}\left(q^{(s-m)}_{ki} - \sum_{r=0}^{N-1} q^{(s-m)}_{ri}\pi^*_r\right), \; k, i \in A; \tag{5}$$

в частности, в случае MTD-модели:

$$\pi^*_{ki}(m) = \pi^*_k \pi^*_i + \pi^*_k \lambda_{s-m}\left(q_{ki} - \pi^*_i\right), \; k, i \in A. \tag{6}$$

3. Оценки параметров MTD-модели. Пусть наблюдается реализация $X=(x_1,\dots,x_T)$ длительности T ДВР, соответствующего MTD-модели (1). Построим оценки параметров, основанные на свойстве стационарных распределений (6). Определим статистики:

$$\hat{\pi}_{ki}(j) = \sum_{t=s+j+1}^{T-s+j+1} I_k(x_{t-j}) I_i(x_t) \Big/ (T-2s+1), \; i, k \in A, \; j=1,\dots,s; \tag{7}$$

$$\hat{\pi}_i = \sum_{t=s+1}^{T-s+1} I_i(x_t) \Big/ (T-2s+1), \; i \in A, \tag{8}$$

которые являются состоятельными и асимптотически несмещенными оценками для $\pi^*_{ki}(j)$ и π^*_i, соответственно [10]. Подставляя данные статистики в (6) и решая получающиеся уравнения относительно $\{q_{ki}: i, k \in A\}$, находим оценки:

$$\hat{q}_{ki} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s} \hat{\pi}_{ki}(j) / \hat{\pi}_k - (s-1)\hat{\pi}_i, & \text{если } \hat{\pi}_k > 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Оценку вектора $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_j)$ построим по методу наименьших квадратов:

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sum_{i,k \in A} \sum_{j=0}^{s-1} \left(z_{ki}(s-j-1) - \lambda_j d_{ki}\right)^2, \tag{10}$$

где $z_{ki}(j) = \hat{\pi}_{ki}(j)/\hat{\pi}_k - \hat{\pi}_i$, $d_{ki} = \hat{q}_{ki} - \hat{\pi}_i$, $i, k \in A$, $j=1,\dots,s$.

К сожалению, использование аналогичного метода построения оценок в случае MTDg-модели не возможно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для MTDg-модели (2) при m<s либо не существует набора параметров* $\{\lambda, Q^{(0)},\ldots,Q^{(s-1)}\}$ *такого, что для любых фиксированных* $1\le j_1<\ldots<j_m\le s$ *стационарное распределение вероятностей случайного вектора* $(x_t, x_{t-j_1},\ldots,x_{t-j_m})'$ *совпадает с заданным распределением* $\Pi^*(j_1,\ldots,j_m)$, *либо такой набор параметров не единственный.*

Теорема 4. *Если имеет место MTD-модель (1), матрица Q – эргодическая, то при* $T\to\infty$ *статистики (9), (10) являются асимптотически несмещенными и состоятельными оценками для Q ,* λ, *соответственно.*

Литература

1. Dehnertb M and others // Physica A, 2003, Vol. 327. P. 535-553.
2. Berchtold A., Raftery A. E. // Statistical Science, 2002, Vol. 17. P.328-356.
3. Харин Ю.С и др. Математические и компьютерные основы криптологии. Мн, 2003.
4. Raftery A. E. // J. R. Statist. Soc. 1985, Vol. 47. P. 528-539.
5. Харин Ю.С. // Доклады НАН Беларуси, 2004, т. 48. С. 40-41.
6. Харин Ю.С., Ярмола А.Н. // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. 2004. № 3. С. 65-69.
7. Jacobs P.A., Lewis P.A.W. // J. R. Statist. Soc. 1978, Vol. 40. P. 94-105.
8. Raftery A. E. // R. di Met. Stat. ed Appl. 1985, Vol. 3-4. p. 149-162.
9. Боровков А.А. Математическая статистика. М., 1984.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОТОКА АБИТУРИЕНТОВ

Ярош Л.С., ГрГУ, Гродно

Актуальность проблемы управления вузом и образовательным процессом объясняется тем, что за последнее десятилетие высшее образование приобрело широкомасштабный характер и стало такой же сферой рыночных отношений, как промышленность, строительство, финансово-кредитная и иные системы.

Целью данной работы является изучение и анализ факторов, влияющих на поток абитуриентов, а также построение и оценка качества моделей линейной и нелинейной регрессии потока абитуриентов на различные факультеты ГрГУ.

Методы, использующееся в данном подходе, относятся к статистико-математическим:

1) определение факторов, влияющих на численность абитуриентов;
2) определение существенности выявленных взаимосвязей между изучаемыми факторами;
3) получение конкретных уравнений регрессии, которые в последствии можно будет использовать при прогнозировании тенденций развития показателей численности абитуриентного потока;
4) оценка качества моделей.

Для построения моделей регрессионного анализа в первую очередь были выделены следующие факторы, влияющие на поток абитуриентов того и или иного факультета, их индикаторы и источники информации.

1. Количество населения (в основном, семнадцатилетнего) в Гродненской области (данные из статсборников [Население Республики Беларусь: Стат. Сб./ М-во стат-ки и анализа РБ. - Мн., 2004. – 93 с.]).