В связи с отмеченными выше результатами на Гомельском городском алгебраическом семинаре была поставлена задача описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная подгруппа. Данная работа связана с анализом этой задачи.

Теорема. В каждой строго максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная подгруппа тогда и только тогда, когда G либо нильпотентна, либо $G=[P]M$, где $P=G^N$ – минимальная нормальная в G подгруппа, являющаяся силовской подгруппой в G, и каждая максимальная подгруппа из M, кроме может быть одной подгруппы T, действует приводимо на P и T нормальна в G.

Список использованных источников

1. Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B.Huppert // Math. Z. – 1954. – V. 60. – P. 409-434.
2. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z.Janko // Math. Z. – 1963. – V. 82. – P. 82-89.
3. Janko, Z. Finite simple groups with shot chains of subgroups / Z.Janko // Math. Z. – 1964. – V. 84. – P. 428-437.
4. Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A.Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 132. – P. 395-409.
5. Asaad, M. Finite groups some whose *n*-maximal subgroups are normal / M.Asaad // Acta Math. Hung. – 1989. – V. 54, №1-2. – P. 9-27.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТРЁХШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Коледа М.С.

Учреждение образования «Брестский государственный технический университет», Брест, Республика Беларусь

Научный руководитель – Мадорский В. М., канд. физ.-мат. наук, доцент

Для решения нелинейных систем вида:

$$f(x) = 0,\ f(D \in R^n \to R^n),\ f \in C_D^{(2)} \tag{1}$$

применяются как одношаговые, так и многошаговые итерационные методы.

В данной работе для решения модельной системы вида:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ .., \\ x_1 + x_2 + \ldots + 2x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1, \\ \sin^3 x_1 + \cos^2 x_n = \sin^3 1 + \cos^2 1. \end{cases}, \tag{2}$$

применяется ряд трёхшаговых методов. Исследование в работе проводится методами прикладного функционального анализа.

Для решения системы (2) применяем следующий итерационный процесс.

Шаг 1: решается система линейных алгебраических уравнений:

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots,$$

где $f'(x_n)$ - матрица Якоби, Δx_n - искомый вектор.

Шаг 2: вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n,\ n = 0,1,2,\ldots,\ \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}].$$

Шаг 3: проверяем условие: $\left\| f(x_{n+1}) \right\| < \varepsilon$, где $\left\| f(x) \right\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i^{\,2}(x)}$.

Если условие выполняется, то x_{n+1} - приближенное решение системы (2). В противном случае производится пересчет β_{n+1}, по формулам, которые для каждого из трех методов свои, а именно:

1. Метод 1

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \left\| f(x_{n-1}) \right\|}{\beta_n \left\| f(x_{n+1}) \right\|}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \left\| f(x_{n-1}) \right\|}{\left\| f(x_{n+2}) \right\|}, \ \gamma_0 = \beta_0^2 .$$

2. Метод 2

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \left\| f(x_{n-1}) \right\|}{\beta_n \left\| f(x_{n+1}) \right\|}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \left\| f(x_{n-1}) \right\| \cdot \left\| f(x_n) \right\|}{\left\| f(x_{n+1}) \right\| \cdot \left\| f(x_{n+2}) \right\|}, \ \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\left\| f(x_0) \right\|}{\left\| f(x_1) \right\|} .$$

3. Метод 3

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \left\| f(x_{n-1}) \right\|}{\beta_n \left\| f(x_{n+1}) \right\|}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \left\| f(x_{n-1}) \right\| \cdot \left\| f(x_{n+1}) \right\|}{\left\| f(x_n) \right\| \cdot \left\| f(x_{n+2}) \right\|}, \ \gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\left\| f(x_0) \right\|}{\left\| f(x_1) \right\|} .$$

И переходим к шагу 1, В качестве $\left\| f(x_{-1}) \right\|$ берём $\left\| f(x_0) \right\|$.

Теорема. Пусть в интересующей нас области D оператор $f \in C_D^{(2)}$, $\left\| \left(f'(x) \right)^{-1} \right\| \le B, \quad \left\| f''(x) \right\| \le K, \quad x \in D, \varepsilon_0 = 0.5KB^2 \beta_0 \left\| f(x_0) \right\| < 1$. Тогда итерационный процесс шаг 1 – шаг 3 со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* - решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Доказательство теоремы для всех трёх методов состоит из следующих этапов: вначале доказывается релаксационность процесса, то есть $\left\| f(x_{n+1}) \right\| \le q_n \left\| f(x_n) \right\|$, $q_n < 1, n = 0,1,2\ldots$ Далее доказываем, что все $\varepsilon_n = 0.5KB^2 \sqrt{\beta_n} \left\| f(x_n) \right\| < 1$. Нетрудно показать, что последовательность q_n монотонно убывает к нулю, последовательность итерационных параметров β_n монотонно возрастает к единице.

Для доказательства того, что β_n достигает единицы, берем предел

$\lim\limits_{n \to \infty} \beta_n$ и доказываем, что $\exists n_0$ такое, что для $i > n_0$ все $\beta_i = 1$. Таким образом, процесс входит в режим метода Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости.

Вычислительный эксперимент на модельной системе (2) проводился при следующих начальных данных: точность $\varepsilon = 10^{-10}$, $\beta_0 = 10^{-2}$, начальные приближения берутся случайным образом из отрезка $[-1{,}1]$. Результаты эксперимента оформлены в виде таблицы:

	Сколько раз при 100 экспериментах при определённом N метод расходится										
	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10	N=11	N=12	N=13	N=14	N=15
Метод 1	1	2	1	2	4	21	24	66	66	80	92
Метод 2	0	5	2	16	14	48	61	90	91	96	99
Метод 3	0	0	1	7	1	3	2	5	7	9	4

Из таблицы видно, что из рассмотренных трех методов наиболее эффективным как по скорости сходимости к решению, так и по широте области сходимости является Метод 3, далее идет Метод 2 и Метод 1.