УДК 517.9:519.61

Е.Н. Швычкина

О КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОИСКА РЕШЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ У НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Объектом исследования являются нормальные дифференциальные системы третьего порядка, решения которых обладают заданными бесконечными предельными свойствами. Целью исследования является нахождение необходимых и достаточных условий принадлежности систем дифференциальных уравнений к классам систем, решения которых обладают заданными предельными свойствами. Во введении приводится постановка задачи, описывается используемый для рассматриваемых систем метод и отмечается громоздкость и сложность проверки коэффициентных и показательных условий, гарантирующих существование и представление решений с требуемыми предельными свойствами. В основной части приведено обобщение метода исследования, рассмотренного ранее, что позволило расширить класс исследуемых систем. Используя возможности СКА Mathematica, построены алгоритм и программный модуль, которые позволяют вычислить громоздкие необходимые и достаточные условия существования решений, которые обладают заданными предельными свойствами, а также построить явный вид этих решений. Приведены примеры, иллюстрирующие данный метод. Полученные результаты могут быть применены в общей и аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также в приложениях, связанных с компьютерными методами решения систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, решения с заданными предельными свойствами, система Брио и Буке, особые точки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{p_{i1},p_{i2},p_{i3}} P^{(i)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{q_{i1},q_{i2},q_{i3}} Q^{(i)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}x_3^{\tau_3}} \quad (i=1,2,3), \tag{1}$$

где $x_i(z)$ $(i=1,2,3)$ – искомые функции, z – независимая комплекснозначная переменная; p_{ik}, q_{ik} $(i,k=1,2,3)$ – целые неотрицательные числа, причем

$$p_{i1}+p_{i2}+p_{i3}=p^{(i)},\quad q_{i1}+q_{i2}+q_{i3}=q^{(i)}.$$

Заметим, что одновременно все коэффициенты многочленов $P^{(i)}_{p^{(i)}}(x_1,x_2,x_3)$, $Q^{(i)}_{q^{(i)}}(x_1,x_2,x_3)$ не должны быть тождественными нулями.

Для системы (1) ищутся решения $x_i=x_i(z)$ $(i=1,2,3)$, обладающие бесконечными предельными свойствами

$$x_i(\mathrm{z})\to\infty\ (i=1,2,3)\text{ при } z\to z_0. \tag{2}$$

Вопросам существования и представления решений $x_i=x_i(z)$ $(i=1,2,3)$ со свойством (2) у нормальных систем двух дифференциальных уравнений посвящено много работ [1–3]. Были разработаны методы для исследования систем двух дифференциальных уравнений, затем

Швычкина Елена Николаевна, ст. преподаватель каф. высшей математики БрГТУ (Беларусь); науч. рук. – А.В. Чичурин, д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: ул. Московская, 267, 224017, г. Брест, Беларусь; e-mail: shvichkina@tut.by

© Гродзенскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Янкі Купалы, 2012

обобщены на случай трех и более уравнений [4]. Однако условия существования решений с заданными свойствами записываются, как правило, в таком виде, что требуется еще немало времени на их проверку даже для довольно простых систем. В предлагаемой статье приводятся условия отыскания решений $x_i = x_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ системы (1), обладающие свойством (2), а также приводится расширенный класс систем, для которого приведен программный алгоритм проверки данных условий и построение заданных решений.

2. Метод решения. Для системы (1) в работах [4; 5] рассматривалась замена вида

$$x_1 = \frac{1}{u},\ x_2 = \frac{V_2}{u},\ x_3 = \frac{V_3}{u}, \tag{3}$$

и также были получены условия существования решений с заданными предельными свойствами (2). Однако класс систем, удовлетворяющих этим условиям, оказывается достаточно узким. Чтобы его расширить, применим следующий метод.

Будем полагать, что одно из уравнений системы (1) (пусть это будет первое уравнение) имеет вид

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=p^{(1)}-p_{11}} P^{(1)}_{\tau_2,\tau_3} x_1^{p_{11}} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=q^{(1)}-q_{11}} Q^{(1)}_{\tau_2,\tau_3} x_1^{q_{11}} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}.$$

Введем замену

$$x_1 = \frac{1}{u^{\mu_1}},\ x_2 = \frac{V_2}{u^{\mu_2}},\ x_3 = \frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \tag{3}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 – натуральные числа, которые получаются в результате решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{3} \mu_k (p_{kj}\ q_{kj}) = 1 + \mu_j \quad (j = 1,\ 2, 3). \tag{4}$$

Замечание 1. В случае если появляются рациональные решения системы (4), то необходимо взять ближайшее натуральное число, которое получается при округлении решений системы (4).

Замена (3) сведет систему (1) к системе вида

$$\frac{dz}{du} = -\mu_1 \frac{\sum Q^{(1)}_{\tau}(1,\overline{V}) u^{\gamma_1 - (\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \mu_3\tau_3)}}{\sum P^{(1)}_{\tau}(1,\overline{V}) u^{\delta_1 - (\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \mu_3\tau_3)}} u^{\delta_1 - \gamma_1 - \mu_1 - 1}, \tag{5}$$

$$u\frac{dV_j}{du} = \mu_j V_j - \mu_1 \frac{\sum Q^{(1)}_{\tau}(1,\overline{V}) u^{\gamma_1 - (\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \mu_3\tau_3)}}{\sum P^{(1)}_{\tau}(1,\overline{V}) u^{\delta_1 - (\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \mu_3\tau_3)}} \ \frac{\sum P^{(j)}_{\tau}(1,\overline{V}) u^{\delta_j - (\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \mu_3\tau_3)}}{\sum Q^{(j)}_{\tau}(1,\overline{V}) u^{\gamma_j - (\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \mu_3\tau_3)}} \times$$

$$\times u^{\gamma_j - \delta - \delta_1 - \gamma_1 - \mu_1 + \mu_j} \quad (j = 2, 3), \tag{6}$$

$$\overline{V} = (V_2, V_3) \quad \delta_i = \sum_{k=1}^{3} \mu_k p_{ik},\ \gamma_i = \sum_{k=1}^{3} \mu_k q_{ik} \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Уравнение (5) определяет z как функцию u. Правые части уравнений (5) и (6) представляют собой голоморфные функции переменных z, u, V_j $(i = 1, 2, 3)$ в окрестности точки $z = z_0, u = 0, V_j = \beta_j$ $(j = 2, 3)$, если выполнены условия

$$P^{(1)}_{p^{(1)}}(1,\overline{\beta})\sum_{j=2}^{3}Q^{(j)}_{q^{(j)}}(1,\overline{\beta})\neq 0,$$

$$\delta_1-\gamma_1\geq \max\{\mu_1+1,\delta_j-\gamma_j+\mu_1-\mu_j\}\ (j=2,3),\ \overline{\beta}=(\beta_2,\beta_3), \tag{7}$$

а z_0 – любое конечное число.

Введем в рассмотрение следующие полиномы переменных

$$S_j(\overline{V})=\mu_j V_j P^{(1)}_{p^{(1)}}(1,\overline{V})Q^{(j)}_{q^{(j)}}(1,\overline{V})-\mu_1 P^{(j)}_{p^{(j)}}(1,\overline{V})Q^{(1)}_{q^{(1)}}(1,\overline{V})\ j=(2,3), \tag{8}$$

обозначим через $V_2=\beta_2, V_3=\beta_3$ решения системы (7).

Далее будем рассматривать случай, когда

$$\beta_2\beta_3\neq 0 \text{ и } \delta_1-\gamma_1-\mu_1=\delta_j-\gamma_j-\mu_j\geq 0 \quad (j=2,3). \tag{9}$$

Введем замену $V_2=\varphi_2+\beta_2, V_3=\varphi_3+\beta_3$ и разложим правые части уравнений (5) и (6) в ряды Тейлора по степеням u, φ_2, φ_3 в окрестности точки (0,0,0). В результате получим систему

$$\frac{dz}{du}=-\frac{Q^{(1)}_{q^{(1)}}(1,\overline{\beta})}{P^{(1)}_{p^{(1)}}(1,\overline{\beta})}u^{w_1-\gamma_1-\mu_1-1}\{1+\Phi(u,\overline{\phi})\}, \tag{10}$$

$$u\frac{d\varphi_j}{du}=a_{j2}\varphi_2+a_{j3}\varphi_3+F_j(u,\overline{\varphi}) \quad (j=2,3), \tag{11}$$

где F_j – голоморфные функции от переменных u, $\overline{\varphi}=(\varphi_2,\varphi_3)$ в окрестности точки (0, 0, 0); $\Phi(u,\overline{\varphi})$ – трехкратный степенной ряд, сходящийся в окрестности точки (0, 0, 0). Функции F_2, F_3 и Φ исчезают вместе со своими частными производными по u,φ_2,φ_3 в точке (0, 0, 0). Два уравнения системы (11) образуют систему Брио и Буке с искомыми функциями $\varphi_j=\varphi_j(u)$ $(j=2,3)$. Используем результаты работы [6] о существовании и представлении в виде сходящихся рядов решений $(\varphi_2(u),\ \varphi_3(u))$ системы (11), обладающих свойством

$$\varphi_j(u)\to 0\ \ (j=2,3) \text{ при } u\to 0.$$

В зависимости от значений λ_2 и λ_3 – корней характеристического уравнения системы (11) найдем число и представление в виде сходящихся рядов решений системы (11).

Будем последовательно подставлять φ_j $(j=2,3)$ в уравнение (10). В результате получим выражение $\frac{dz}{du}$ в виде некоторого сходящегося ряда в окрестности точки $u=0$. Применив к каждому члену этого ряда формулу интегрирования по частям, найдем представление $z=z(u)$ в окрестности точки $u=0$.

Решение системы (11) будем искать с помощью метода, рассмотренного в работе [5]. Возвращаясь к исходным переменным, запишем решения системы (1) в виде

$$x_1=\eta^{-\mu_1}(1+N_1),\ x_j=\eta^{-\mu_j}(\beta_j+N_j)\ (j=2,3), \tag{12}$$

где N_j $(j=2,3)$ – двукратные степенные ряды, сходящиеся в окрестности точки (0,0,0). Найденные решения будут обладать свойством (2). Точный вид рядов N_j приведен в работах [4; 5]. Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Если для системы (5)–(6) выполнены условия (7) и (9), то данная система (1) имеет решение* $x_i=x_i(z)$ $(i=1,2,3)$*, определяемое функциями (12) и обладающее свойством (2).*

Замечание 2. Если μ_i четное число, тогда следует рассмотреть максимальную степень соответствующего уравнения $x_i=x_i(z)$, т.е. числа $p^{(i)}, q^{(i)}$. В случае если наибольшее из чисел $p^{(i)}, q^{(i)}$ нечетное, тогда необходимо вводить соответствующую замену $x_j = \dfrac{\varepsilon V_j}{u^{\mu_j}}$, где $|\varepsilon| = 1$ и рассматривать две системы вида (10)–(11). И если одно из значений $p^{(i)}$ или $q^{(i)}$ четное, то берется замена вида (3).

3. Решение примеров с использованием блоков, реализованных в СКА Mathematica. На практике при нахождении решений вида (2) у систем вида (1) рассматриваемый метод содержит много громоздких вычислений. Поэтому в конкретных примерах будем использовать ряд блоков, которые были написаны в кодах системы Mathematica.

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{x_1^2}{x_2^2}, \quad \frac{dx_2}{dz} = \frac{1}{3}x_2^2 + x_2, \quad \frac{dx_3}{dz} = \frac{x_2^3 + x_2}{12x_3}, \tag{13}$$

которая, очевидно, решается классическим методом. Решим ее с помощью функции DSolve [7; 8].

```
In[1]:= sys = {x1'[z] == (x1[z]^2)/x2[z]^2, x2'[z] == 1/3 x2[z]^2 + x2[z], x3'[z] == (x2[z]^3 + x2[z])/(12 x3[z])}
In[3]:= DSolve[sys, {x1[z], x2[z], x3[z]}, z] // Simplify
```

$$\left\{\left\{x_2[z] \to -\frac{3\, e^{z+3C[1]}}{-1+e^{z+3C[1]}},\ x_1[z] \to -\frac{18\, e^{2z+6C[1]}}{-1+4\, e^{z+3C[1]}+2\, e^{2z+6C[1]}\,(z+9C[2])}, \right.\right.$$
$$\left. x_3[z] \to -\sqrt{\frac{9\left(-3+4\, e^{z+3C[1]}\right)}{4\left(-1+e^{z+3C[1]}\right)^2}+2C[3]-5\,\mathrm{Log}\left[-1+e^{z+3C[1]}\right]}\right\}, \tag{14}$$

где C[1], C[2], C[3] – произвольные постоянные интегрирования.

Рассмотрим компьютерную реализацию приведенного метода. Определим для системы (13) значения μ_1, μ_2, μ_3, т.е. решим систему вида (4).

```
Do[pok = {}, {k, 3}]; p = {};
For[k = 1, k < 4, k++,
 For[j = 1, j < 4, j++, pok = Append[pok, Exponent[Numerator[sys[[k, 2]]], xj[z]]]];
 p = Append[p, pok] ]; p;
Do[qok = {}, {k, 3}]; q = {};
For[k = 1, k < 4, k++,
For[j = 1, j < 4, j++, qok = Append[qok, Exponent[Denominator[sys[[k, 2]]], xj[z]]]];
 q = Append[q, qok] ]; q;
degree = {μ1 (p[[1, 1]] - q[[1, 1]] - 1) + μ2 (p[[1, 2]] - q[[1, 2]]) + μ3 (p[[1, 3]] - q[[1, 3]]) == 1,
   μ1 (p[[2, 1]] - q[[2, 1]]) + μ2 (p[[2, 2]] - q[[2, 2]] - 1) + μ3 (p[[2, 3]] - q[[2, 3]]) == 1,
   μ1 (p[[3, 1]] - q[[3, 1]]) + μ2 (p[[3, 2]] - q[[3, 2]]) + μ3 (p[[3, 3]] - q[[3, 3]] - 1) == 1};
exp = Solve[degree, {μ1, μ2, μ3}] // Flatten
{μ1 → 3, μ2 → 1, μ3 → 1}
```

Сделаем замену (3) и подставим в (13). Получим систему вида (5)–(6).

```
vect = {x1[z] → 1/u[z]^μ1, x2[z] → V2[z]/u[z]^μ2, x3[z] → V3[z]/u[z]^μ3}; vect = vect ⋃ D[vect, z];
sys1 = sys /. vect /. exp;
eqB1 = Solve[sys1[[1]], u'[z]] // Flatten // Simplify;
eqB11 = t'[u] == (eqB1[[1, 2]])^(-1)
eqB2 = sys1[[2, 2]] eqB11[[2]] (u[z]^(μ2 + 1)) // Expand;
eqB22 =
  eqB2 - sys1[[2, 1]] (u[z]^(μ2 + 1)) /. V2[z] → V2[u] /. V2'[z] → V2'[u] /. V3'[z] → V3'[u] /.
      V3[z] → V3[u] /. u[z] → u /. u'[z] → 1 /. exp // Expand;
eqB3 = sys1[[3, 2]] eqB11[[2]] (u[z]^(μ3 + 1)) // Expand;
```

```
eqB33 =
  eqB3 - sys1[[3, 1]] (u[z] ^ (μ3 + 1)) /. V2[z] → V2[u] /. V3'[z] → V3'[u] /. V3[z] → V3[u] /.
     u[z] → u /. u'[z] → 1 /. exp // Expand;
sysB = {};
sysB = Append[sysB, (eqB22 + u V2′[u])];
sysB = Append[sysB, (eqB33 + u V3′[u])] // Simplify // Expand;
sysB = sysB /. V2[u] → V2 /. V3[u] → V3 // FullSimplify
```

Out[10]= $t'[u] == -3\, V_2[u]^2$

Out[18]= $\left\{V_2 - 3\, u\, V_2^3 - V_2^4,\ -\dfrac{u^2\, V_2^3 + V_2^5 - 4\, V_3[z]^2}{4\, V_3[z]}\right\}$

Рассмотрим полиномы вида (8) и решим их.

```
sysS = {Coefficient[Numerator[Together[sysB[[1]]]], u, 0] == 0,
  Coefficient[Numerator[Together[sysB[[2]]]], u, 0] == 0}
```

Out[44]= $\{V_2 - V_2^4 == 0,\ -V_2^5 + 4\, V_3^2 == 0\}$

```
point = Solve[sysS, {V2, V3}] /. {V2 → β2, V3 → β3} // Union
```

$\left\{\beta_3 \to -\frac{1}{2},\ \beta_2 \to 1\right\},\ \{\beta_3 \to 0,\ \beta_2 \to 0\},\ \left\{\beta_3 \to \frac{1}{2},\ \beta_2 \to 1\right\},\ \left\{\beta_3 \to -\frac{1}{2}\sqrt{-1 + (-1)^{1/3}},\ \beta_2 \to -(-1)^{1/3}\right\}$

Далее для решения системы Брио и Буке вида (10)–(11) найдем ее характеристические корни для всех найденных значений β_2, β_3.

```
In[48]:= For[i = 1, i ≤ Length[point], i++, substitut = {V2 -> φ2 + β2, V3 -> φ3 + β3};
   sysBφi = sysB /. substitut /. point[[i]] // Simplify;
   rad2φi = Series[sysBφi[[1]], {u, 0, 3}, {φ2, 0, 1}, {φ3, 0, 1}] // Normal // Expand;
   rad3φi = Series[sysBφi[[2]], {u, 0, 3}, {φ2, 0, 1}, {φ3, 0, 1}] // Normal // Expand
   ; matrix = {Coefficient[rad2φi, {φ2, φ3}], Coefficient[rad3φi, {φ2, φ3}]} /. {φ2 → 0, φ3 → 0, u → 0};
  λi = Eigenvalues[matrix]; Print["this is eigenvalues " i "  ", λi]]

 this is eigenvalues {-3, 2}

2  this is eigenvalues {1, 1}
```

Рассмотрим значения корней характеристического уравнения системы $\lambda_1 = -3,\ \ \lambda_2 = 2$, соответствующие $\beta_2 = 1,\ \ \beta_3 = \frac{1}{2}$. Для данных значений выполняются условия (7), (9). Решения системы Брио и Буке вида (11)

Out[23]= $-3\, u - 3\, \varphi_2 - 9\, u\, \varphi_2$

Out[24]= $\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{5\, \varphi_2}{2} + \dfrac{3\, u^2\, \varphi_2}{2} + 2\, \varphi_3 + u^2\, \varphi_3 + 5\, \varphi_2\, \varphi_3 + 3\, u^2\, \varphi_2\, \varphi_3$

будут искаться в виде рядов

$$\varphi_j = \sum_{m,m1} C^j_{m\,m1}\, u^m (u^{\lambda_2} \ln u)^{m1}\ \ (j = 2,3). \tag{15}$$

Найдем коэффициенты ряда (15). Для этого требуется построить программный модуль, основанный на создании шаблонов новых функций.

```
fun2 = Sum[Sum[c2{m,m1} u^m (u1)^m1, {m1, 0, 1}], {m, 0, 1}] /. c2{0,0} → 0;
era = u D[(fun2 /. u1 -> u^2 Log[u]), u] // Expand;
coef = {}; era1 = 0;
For[i = 1, i ≤ Length[era], i++, If[MatchQ[era[[i]], (a_. u^_Integer) * (Log[u]^_.)],
  coef =
   Append[coef, Coefficient[era[[i]],
     u^Exponent[era[[i]], u] Log[u]^(Exponent[era[[i]], Log[u]])]],
  coef = Append[coef, Coefficient[era[[i]], u^Exponent[era[[i]], u]]]]];
For[i = 1, i ≤ Length[era], i++, If[MatchQ[era[[i]], (a_. u^_Integer) * (Log[u]^_.)],
  era1 = era1 + coef[[i]] u^(Exponent[era[[i]], u] - 2 (Exponent[era[[i]], Log[u]]))
     u1^(Exponent[era[[i]], Log[u]]), era1 = era1 + coef[[i]] u^Exponent[era[[i]], u]]];
Print["левая часть первого уравнения: ", era1];
```

левая часть первого уравнения: $u^2 c2_{\{0,1\}} + 2\,u1\, c2_{\{0,1\}} + u\, c2_{\{1,0\}} + u^3 c2_{\{1,1\}} + 3\,u\,u1\, c2_{\{1,1\}}$

Используя метод неопределенных коэффициентов, найдем неизвестные функции φ_j $(j = 2, 3)$.

```
eq1 = (rad2φ1 /. φ2 -> fun2 /. φ3 -> fun3) - era1 // Expand;
coef = Coefficient[eq1, {u, u1, u u1}] /. u → 0 /. u1 → 0;
coef1 = Solve[Table[coef[[i]] == 0, {i, 3}], {c2{0,1}, c2{1,0}, c2{1,1}}] // Flatten;
fi2 = fun2 /. coef1
fi3 = fun3 /. coef2 /. c3{1,1} → 0
```

$-\frac{3u}{4}$

$\frac{15u}{8} - \frac{209\,u1}{32}$

Для построения решений вида (15) и соответственно вида (3) достаточно использовать приближения минимально возможной степени. Вернемся к исходным переменным

In[45]:= `funU = Solve[τ == ∫ (eqB11[[2]] /. {V2[z] → fi2 - β2, V3[z] → fi3 - β3} /. point[[1]]) du, u] // Flatten`

Out[45]= $\left\{u \to -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\, 2^{1/3} (4 - 3\tau)^{1/3},\ u \to -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, 2^{1/3} \left(1 - i\sqrt{3}\right) (4 - 3\tau)^{1/3},\ u \to -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\, 2^{1/3} \left(1 + i\sqrt{3}\right) (4 - 3\tau)^{1/3}\right\}$

In[46]:= `x1 = funU[[1, 2]]^(-μ1) /. exp // Simplify`

Out[46]= $\frac{27}{8\left(-2 + (8 - 6\tau)^{1/3}\right)^3}$

In[47]:= `x2 = ((fi2 - β2) /. u → funU[[1, 2]]) * funU[[1, 2]]^(-μ2) /. point[[1]] /. exp // Simplify`

Out[47]= $\frac{3\,(4 - 3\tau)^{1/3}}{4\,2^{2/3} - 4\,(4 - 3\tau)^{1/3}}$

In[48]:= `x3 = ((fi3 - β3) /. u1 → u^2 Log[u] /. u → funU[[1, 2]]) * funU[[1, 2]]^(-μ3) /. point[[1]] /. exp // Simplify`

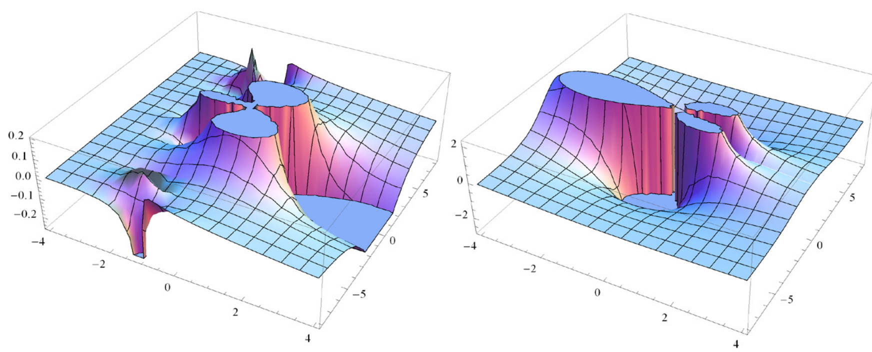
Out[48]= $\frac{18\left(-8 + 5\,(8 - 6\tau)^{1/3}\right) - 209\left(-2 + (8 - 6\tau)^{1/3}\right)^2 \mathrm{Log}\left[\frac{2}{3}\left(-2 + (8 - 6\tau)^{1/3}\right)\right]}{48\left(-2 + (8 - 6\tau)^{1/3}\right)}$,

где $\tau = z - z_0$. Найденные решения, очевидно, обладают свойством (2). Действительно найдем соответствующие пределы.

```
In[49]:= Limit[x1, τ → 0]

Out[49]= -∞

In[50]:= Limit[x2, τ → 0, Direction → -1]

Out[50]= ∞

In[51]:= Limit[x3, τ → 0, Direction → 1]

Out[51]= ∞
```

Сравним графики решений, полученных с помощью рассмотренного метода и с помощью классического метода решения. Приведем графики функции $x_1(z)$, где левый график – это функция из (14), а правый – функция, найденная с помощью описываемого метода.

```
Plot3D[
 Evaluate[
  Re[
   -(2 e^(2 (z+C[1])))/(-1 + 4 e^(z+C[1]) + 2 e^(2 (z+C[1])) (z + C[2])) /. z → x + I y /.
     {C[2] → C[1] - 2 Cos[2 π α] + 1/2 Cos[4 π α] + i (-2 π α + 2 Sin[2 π α] - 1/2 Sin[4 π α])} /. C[1] → 0 /. α → 0]],
 {x, -4, 4}, {y, -8, 8}]
Plot3D[Evaluate[Re[x1 /. τ → x + I y]], {x, -4, 4}, {y, -8, 8}]
```

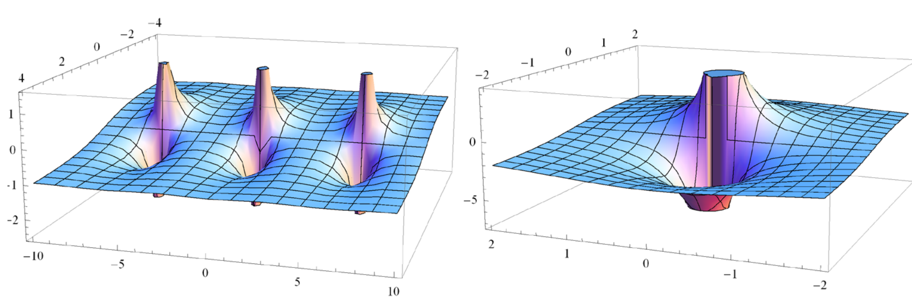


а б

Рисунок 1.

Сравним $x_2(z)$.

```
In[67]:= Plot3D[Evaluate[Re[-e^(z+C[1])/(-1 + e^(z+C[1])) /. z → x + I y /. C[1] → 0]], {x, -4, 4}, {y, -10, 10}]
         Plot3D[Evaluate[Re[x2 /. τ → x + I y]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



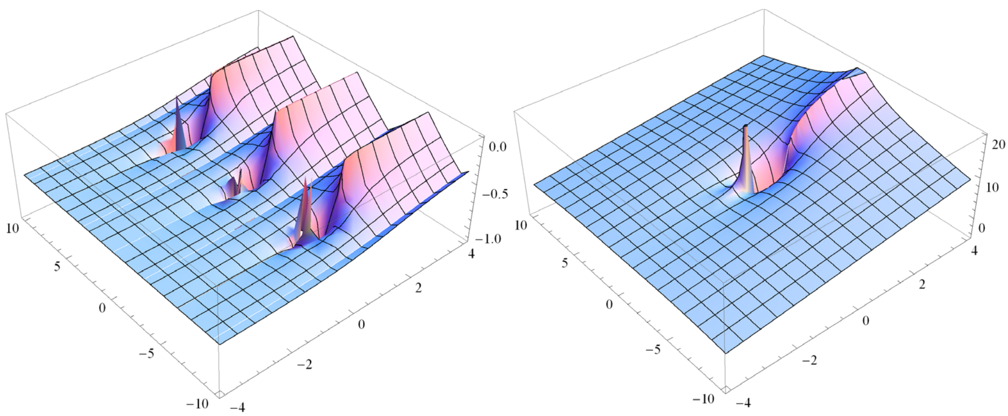
а б

Рисунок 2.

Очевидно, что решение $x_2(z)=\dfrac{e^{z+C[1]}}{e^{z+C[1]}-1}$ является периодической функцией, и точки, в которых выполняется требование (2), имеют вид $z_0=C[1]+2\pi\, i\, n,\ n\in \mathrm{Z}$. Решение $x2$, определяемое программным модулем, находится как одна ветвь искомых решений. Аналогичная ситуация возникает и для функции $x_3(z)$.

In[69]:= $$\texttt{Plot3D}\Big[\texttt{Evaluate}\Big[\texttt{Re}\Big[-\frac{\sqrt{\frac{-3+4\,e^{t+C[1]}}{\left(-1+e^{t+C[1]}\right)^2}+24\,C[3]-4\,\texttt{Log}\left[-1+e^{t+C[1]}\right]}}{2\sqrt{3}}\ /.\ t\to x+I\,y\ /.\ C[1]\to 0\ /.\ C[3]\to 0\Big]\Big],\ \{x,-4,4\},\{y,-10,10\}\Big]$$

```
Plot3D[Evaluate[Re[x3 /. τ→ x + I y]], {x, -4, 4}, {y, -10, 10}]
```



а б

Рисунок 3.

Рассмотрим пример, который не решается аналитически, но для него удается построить решения, обладающие заданным предельным свойством (2).

Пример 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz}=\frac{x_1^2}{x_2^2},\ \frac{dx_2}{dz}=\frac{x_2^2+x_2}{x_3},\ \frac{dx_3}{dz}=\frac{x_3^3-x_3}{x_2},\tag{16}$$

Решение этой системы с помощью функции DSolve невозможно. Mathematica выдает сообщение о том, что не существует аналитических методов ее решения.

Применим к системе (16) программный модуль, построенный на основе описываемого метода, и найдем аналитический вид решений системы (16), обладающих свойством (2).

Найдем значения $\mu_1\to 7, \mu_2\to 3, \mu_3\to 2$ и введем замену вида (3). В результате получаются решения системы (16), выраженные через Root-объект [8], которые удовлетворяют условию (3).

$$x1=\frac{1}{\texttt{Root}\left[900\,\tau-900\,(-1)^{3/7}\,2^{2/7}\,3^{4/7}\,7^{1/7}\,\#1+105\,(-1)^{5/7}\,2^{1/7}\,3^{2/7}\,7^{4/7}\,\#1^4+49\,\#1^7\ \&,\ 1\right]^7}$$

$$x2=-\frac{7}{30}-\frac{(-1)^{5/7}\,2^{1/7}\,3^{2/7}}{7^{3/7}\,\texttt{Root}\left[900\,\tau-900\,(-1)^{3/7}\,2^{2/7}\,3^{4/7}\,7^{1/7}\,\#1+105\,(-1)^{5/7}\,2^{1/7}\,3^{2/7}\,7^{4/7}\,\#1^4+49\,\#1^7\ \&,\ 1\right]^3}$$

$$x3=-\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{1/7}\,2^{3/7}}{7^{2/7}\,\texttt{Root}\left[900\,\tau-900\,(-1)^{3/7}\,2^{2/7}\,3^{4/7}\,7^{1/7}\,\#1+105\,(-1)^{5/7}\,2^{1/7}\,3^{2/7}\,7^{4/7}\,\#1^4+49\,\#1^7\ \&,\ 1\right]^2}-$$
$$\frac{(-1)^{3/7}\,2^{2/7}\,7^{1/7}\,\texttt{Root}\left[900\,\tau-900\,(-1)^{3/7}\,2^{2/7}\,3^{4/7}\,7^{1/7}\,\#1+105\,(-1)^{5/7}\,2^{1/7}\,3^{2/7}\,7^{4/7}\,\#1^4+49\,\#1^7\ \&,\ 1\right]}{15\,3^{3/7}}$$

```
Limit[x1, τ → 0]
-∞
Limit[x2, τ → 0]
ComplexInfinity
Limit[x3, τ → 0]
ComplexInfinity
```

,

где $\tau = z - z_0$. Для примера приведем график функции $x_1(z)$.

```
In[46]:= Plot3D[Evaluate[Re[x1 /. τ → x + I y]], {x, -12, 12}, {y, -12, 12}]
Out[46]=
```

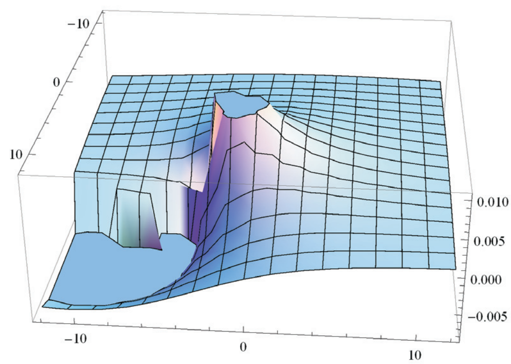


Рисунок 4.

Графики функций $x_2(z)$ и $x_3(z)$, также демонстрируют выполнение заданного предельного свойства (2) для решений дифференциальной системы уравнений (16).

Вывод. В случаях, когда система дифференциальных уравнений не решается аналитически, тогда системы компьютерной алгебры предлагают методы численного решения. Но для использования этих методов необходимо задать начальные или граничные условия, которые должны быть определены для всех решений $x_j(z)$ $j = (1,2,3)$. Таким образом, при использовании функции NDSolve должны явно задаваться все начальные условия, которые потребуются для определения решения.

В данной статье рассмотрены нормальные дифференциальные системы третьего порядка, решения которых обладают заданными бесконечными предельными свойствами, приведен обобщенный метод нахождения таких решений. Преимущество данного метода заключается в возможности построения искомых решений в виде сходящихся рядов. Однако реализация этого метода на практике представляет собой задачу со сложными и объемными вычислениями. В статье приведен программный модуль в СКА Mathematica, который находит решения обладающих заданными бесконечными предельными свойствами заданных дифференциальных систем. Рассмотренный метод является аналитическим, в котором содержатся программные модули, позволяющие находить явный вид решений, обладающих заданными предельными свойствами, не задавая при этом априори начальных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еругин, Н.П.* Теория подвижных особых точек второго порядка. I / Н.П. Еругин // Дифференц. уравнения. – 1976, Т. 12. – № 3. – С. 387–416.

2. *Еругин, Н.П.* Теория подвижных особых точек второго порядка. II / Н.П. Еругин // Дифференц. уравнения. – 1976, Т. 12. – № 4. – С. 579–598.

3. *Кондратеня, С.Г.* О решениях одной дифференциальной системы в комплексной области / С.Г. Кондратеня // Дифференц. уравнения. – 1972, Т. 8. – № 10. – С. 1886–1888.

4. *Будько, Т.С.* Об одном общем методе отыскания решений с бесконечными предельными значениями у автономных дифференциальных систем с рациональными правыми частями / Т.С. Будько, А.И. Яблонский // Дифференц. уравнения. – 1989, Т. 25. – № 11. – С. 1852–1856.

5. *Чичурин, А.В.* О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями / А.В. Чичурин // Вестн. Белорус. ун-та. Серия 1. Физика. Математика. Механика. – 1992. – № 2 – С. 62–66.
6. *Horn, J.* Uber die Reienenwichelung der Inteqrale lines Systems von Differentiagleichungen in der Umgeburg gewisser singularer stellen / J. Horn // J. fur M.,1896, 116, p. 265–306, 1897,117, p. 104–128.
7. *Прокопеня, А.Н.* Применение системы Matematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Минск: Изд-во БГУ, 1999. – 256 с.
8. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2010. – Mode of access: www.wolfram.com. – Date of access: 01.09.2010.

Поступила в редакцию 07.10.11.

The objects of the study are the normal differential systems of the third-order solutions which gives infinite limit properties. The purpose of this study is to find necessary and sufficient conditions for systems of differential equations belonging to the classes of systems, solutions which have a given limit properties. In the introduction, we state the problem, describe the systems used for the method notes the awkwardness and the complexity of testing coefficient and the exponential of conditions guaranteeing the existence and representation of solutions with the desired properties of the limit. The main body of research shows the generalization of the method described previously, which made it possible to extend the class of systems studied. Using possibilities CAS Mathematica, we constructed algorithm and software and it was allowed to calculate the cumbersome necessary and sufficient conditions for existence of solutions that have the specified limit properties, as well as to construct the explicit form of these solutions. We represent examples here which illustrate considered method. The obtained results can be applied in general and the analytic theory of ordinary differential equations, as well as in applications related to computer methods for solving systems of differential equations.

Keywords: the system of differential equation, the system of equations of Briot-Bouqet, the solution with given limit properties, singular points.

References

1. Erugin N.P. Theory of movable singular points of the second order. I [*Teoriia podvizhnykh osobykh tochek vtorogo poriadka*]. *Differents. uravniniia*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 387-416.
2. Erugin N.P. Theory of movable singular points of the second order. II [*Teoriia podvizhnykh osobykh tochek vtorogo poriadka*]. *Differents. uravniniia*, 1976, vol. 12, no. 4, pp. 579-598.
3. Kondratenia S.G. Solutions of a differential system in the complex domain [*O resheniiakh odnoi differentsial'noi sistemy v kompleksnoi oblasti*]. *Differents. uravniniia*, 1972, vol. 8, no. 10, pp. 1886-1888.
4. Budko T.S., Yablonski A.I. A general method for finding solutions with infinite limits for autonomous differential systems with rational right-hand sides [*Ob odnom obshchem metode otyskaniia reshenii s beskonechnymi predel'nymi znacheniiami u avtonomnykh differentsial'nykh system s ratsional'nymi pravymi chastiami*]. *Differents. uravniniia*, 1989, vol. 25, no. 11, pp. 1852-1856.
5. Chichurin A.V. Solutions of systems with given properties limit of normal for particular classes of differential systems with rational right-hand sides [*O resheniiakh system s zadannymi predel'nymi svoistvami u chastnykh klassov normal'nykh differentsial'nykh system s ratsional'nymi pravymi chastiami*]. *Vestn. Belarusian. University. Seriia 1: Phizika. Matematika. Mechanika*, 1992, no. 2, pp. 62-66.
6. Horn J. Uber die Reienenwichelung der Inteqrale lines Systems von Differentiagleichungen in der Umgeburg gewisser singularer stellen. *J. fur M.*,1896, 116, pp. 265-306, 1897, 117, pp. 104-128.
7. Prokopenia A.N., Chichurin A.V. Application of Matematica to the solution of ordinary differential equations [*Primenenie sistemy Matematica k resheniiu obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii*]. Minsk, 1999, 256 p.
8. Wolfram Web Resources [Electronic resource]; ed. S. Wolfram, Champaign, 2010. Mode of access: www.wolfram.com. Date of access: 01.09.2010.