

Пусть функция f ограничена и имеет конечное число точек разрыва, тогда ее можно представить в виде

$$f(t) = f^c(t) + f^d(t),$$

где функции f^c и f^d – соответственно непрерывная и разрывная составляющие функции f , причем, разрывная составляющая f^d также будет иметь конечное число точек разрыва.

В следующих теоремах представлены достаточные условия единственности решений задачи (2).

Теорема 2. Пусть функция f ограничена, имеет конечное число точек разрыва, в окрестностях которых она сохраняет знак, и функция f^c – непрерывная составляющая функции f является липшицевой функцией на отрезке T . Многозначная функция F получена из функции f методом простейшего выпуклого доопределения, функция L является непрерывной функцией ограниченной вариации. Тогда решение дифференциального включения (2) единственно.

Теорема 3. Пусть функция f ограничена, имеет конечное число точек разрыва и функция f^c – непрерывная составляющая функции f является липшицевой функцией на отрезке T . Многозначная функция F получена из функции f методом простейшего выпуклого доопределения. Функция L является монотонной и непрерывной, и x_0 не является точкой разрыва функции f . Тогда решение дифференциального включения (2) единственно.

Замечание 1. Условие того, что x_0 не является точкой разрыва функции f в условиях теоремы 3 существенно для единственности решений задачи (2).

Литература

1. Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л., Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением // Известия ВУЗов. Математика. – 2005. – №3 – с.23-31.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА

Савчук В.Ф., Голубцов И.А., БрГУ им. А.С.Пушкина, Брест

1. Постановка задачи

Решается операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным и самосопряженным оператором $A: H \rightarrow H$, в предположении, что нуль не является собственным значением оператора A . Причем $0 \in S_A$, то есть задача некорректна. Если решение уравнения (1) существует, то для его отыскания предлагается явный итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ , то есть y_δ , для которой $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Изучим сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ . Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

По индукции нетрудно показать, что $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A^2)^n y = (E - \alpha A^2)^n x$. В исходной норме гильбертова пространства $x - x_n$ оказывается бесконечно малым при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки нужно дополнительное требование на гладкость точного решения x , то есть $x = A^s z$, $s > 0$. При использовании энергетической нормы, нам это дополнительное предположение не потребуется.

Действительно, с помощью интегрального представления само-сопряженного оператора получим:

$$\|x - x_n\|_A^2 = (A(x - x_n), (x - x_n)) = (A(E - \alpha A^2)^n x, (E - \alpha A^2)^n x) = \int_0^M \lambda(1 - \alpha \lambda^2)^{2n} d(E_\lambda x, x), \quad \text{где}$$

$M = \|A\|$, E_λ – соответствующая спектральная функция, E – единичный оператор.

Для оценки интересующей нас функции найдем максимум подинтегральной функции $f(\lambda) = \lambda(1 - \alpha \lambda^2)^{2n}$ при $\lambda \in [0, M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s = 1$ функции, оцененной в [1,2]. Поэтому при условии

$$0 < \alpha \leq \frac{5}{4M^2} \quad (5)$$

справедлива следующая оценка $\max_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \leq (4n\alpha e)^{-1/2}$. Следовательно,

$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (4n\alpha e)^{-1/4} \|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = 1/4$ для точного решения.

3. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения

Оценим второе слагаемое в (4). Справедливо равенство

$$x - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E - \alpha A^2)^n \right] (y - y_\delta).$$

$$\text{Отсюда } \|x - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha \lambda^2)^n] d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через $g_n(\lambda)$ подинтегральную функцию и оценим ее сверху. По индукции можно доказать, что при выполнении (5)

$$g_n(\alpha) \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} 4n^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \delta^2, \quad n \geq 1, \quad g_n(\alpha) \leq 4n^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \delta^2, \quad n \geq 2.$$

Нетрудно доказать, что $\max_{\lambda \in [0, M]} g_n(\alpha)$ имеет при $n \rightarrow \infty$ порядок $n^{1/2}$, поэтому найденная оценка для $g_n(\lambda)$ верна по порядку. Значит, при условии (5)

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{5}{4}\right)^3 2n^4 \alpha^4 \delta, n \geq 1, \quad \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq 2n^4 \alpha^4 \delta, n \geq 2.$$

Так как $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + 2n^4 \alpha^4 \delta, n \geq 2$ и $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, достаточно, чтобы $n^{1/4} \delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

В этом случае метод (3) обеспечивает сходимость последовательности приближений к точному решению в энергетической норме гильбертова пространства H . Итак, доказана

Теорема 1. Итерационный процесс (3) при условии (5) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать так, чтобы $n^{1/4} \delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{5}{4}\right)^3 2n^4 \alpha^4 \delta + (4n\alpha e)^{-1/4} \|x\|, n \geq 1, \quad (6)$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq 2n^4 \alpha^4 \delta + (4n\alpha e)^{-1/4} \|x\|, n \geq 2. \quad (7)$$

Оптимизируем полученную оценку (7) по n , то есть при заданном δ найдем такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (7), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-3} \alpha^{-1} e^{-1/2} \delta^{-1} \|x\|. \quad (8)$$

В результате подстановки $n_{\text{опт}}$ в (7) имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{1/8} e^{-1/8} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}, n \geq 2. \quad (9)$$

Оптимальная оценка погрешности не зависит от α , но $n_{\text{опт}}$ зависит от α , поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$, то есть числа итераций, необходимых для достижения оптимальной точности, следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию (5), и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым. Таким образом, доказана

Теорема 2. При условии (5) оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса (3) в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид (9) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (8).

Литература

1. Константинова Я.В., Лисковец О.А. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений 1-го рода // Вестник Белорусского университета. Сер.1.–1973.–№1.–С.9–15.
2. Лисковец О.А., Савчук В.Ф. Метод простых итераций с попеременно-чередующимся шагом для уравнения I рода // Доклады АН БССР.– Т. XXI. –1977. –№1. –С.9–12.