

Теорема. Если аналитическая функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области D , то для любой матрицы A последовательность интерполяционных многочленов $L_n(f; A)$ вида (2) при $n \rightarrow \infty$ сходится к матрице $f(A)$.

Данная теорема является аналогом утверждения, доказанного в работе [4] для случая алгебраического интерполирования скалярных функций с узлами произвольной кратности.

В заключение отметим, что основы теории интерполирования функций от матричных переменных с умножением в обычном смысле, а также умножением по Йордану, Адамару, Фробениусу и др. изложены в монографии [2].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магнус, Я. Р. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике : пер. с англ. / Я. Р. Магнус, Х. Нейдеккер ; под ред. С. А. Айвазяна. – М. : Физматлит, 2002. – 496 с.
2. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко ; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики. – Минск : Беларус. навука, 2016. – 281 с.
3. Крылов, В. И. Об определении наименьшей области, голоморфность в которой обеспечивает сходимость эрмитовского интерполирования при любой системе узлов / В. И. Крылов // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 78, № 5. – С. 857–859.
4. Янович, Л. А. Сходимость интерполирования по скалярным матричным узлам в классе аналитических функций / Л. А. Янович, А. В. Тарасевич // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 102–111.

УДК 517.9

Е. В. КУЗЬМИНА

Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМИРУЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$u' + \frac{s}{x}u = 0, \text{ где } s \in \mathbf{N}.$$

При переходе в пространство распределений этому уравнению соответствует семейство уравнений с обобщенными коэффициентами вида

$$u' + s \left(P \left(\frac{1}{x} \right) + M \delta \right) u = 0. \quad (1)$$

Обобщенный коэффициент $q = s \left(P \left(\frac{1}{x} \right) + M \delta \right)$ заменим на его аппроксимацию гладкими функциями q_ε и рассмотрим семейство уравнений

$$u'_\varepsilon(x) + q_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = 0, \quad (2)$$

решение задачи Коши с условием $u_\varepsilon(-1) = (-1)^s$ для (2) обозначим $u_\varepsilon(x)$.

Если семейство гладких функций $u_\varepsilon(x)$ сходится в пространстве распределений, то его предел u будем называть *обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1) при заданном способе аппроксимации* [1].

Согласно [2], решения аппроксимирующих уравнений (2) при

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{s}{x + i\varepsilon} + (1 - \lambda) \frac{s}{x - i\varepsilon}, \quad (3)$$

где $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{M}{2\pi i}$, представляются в виде

$$u_\varepsilon(x) = \left(\frac{1 + i\varepsilon}{x - i\varepsilon} \right)^s \left(\frac{x - i\varepsilon}{x + i\varepsilon} \cdot \frac{-1 + i\varepsilon}{-1 - i\varepsilon} \right)^{\lambda s}$$

и при $x \neq 0$ точно сходятся к формальному решению

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^s}, & x < 0; \\ \frac{(-1)^s \cdot e^{-sM}}{x^s}, & x > 0. \end{cases}$$

Теорема. *Обобщенное решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (1), где $M = i\pi \left(1 - \frac{2m}{s} \right)$, при аппроксимации (3) существует тогда и только тогда, когда m целое и при этом $m \geq s$ или $m \leq 0$.*

Рассмотрим более подробно случай $s = 2$ и поясним графически отличие поведения $u_\varepsilon(x)$ при $m = 1$ и при $m = 0$. При $m = 1$

$$u_{\varepsilon}(x) = \frac{1 + \varepsilon^2}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Это семейство, в котором первое слагаемое представляет собой дельта-функцию с бесконечно большим коэффициентом, не имеет предела в пространстве распределений, так как интегралы от этих функций стремятся к бесконечности. График функции $u_{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon = 0,5$ изображен на рисунке 1.

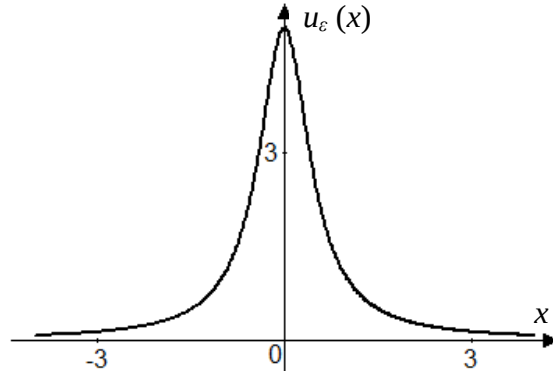


Рисунок 1

При целом $m \neq 1$ обобщенное решение уравнения (1) существует. Например, при $m = 0$

$$u_{\varepsilon}(x) = \left(\frac{1 + i\varepsilon}{x - i\varepsilon} \right)^2 = \frac{(x - \varepsilon^2)^2 - \varepsilon^2(x + 1)^2}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} + 2\varepsilon i \frac{(x - \varepsilon^2)(x + 1)}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}.$$

Получаем, что для $x \neq 0$ $\text{Im } u_{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к производной дельта-функции. При этом $\text{Re } u_{\varepsilon}(x) = 0$, если $x = \frac{\varepsilon^2 \pm \varepsilon}{1 \mp \varepsilon}$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ выражение

$\frac{\varepsilon^2 \pm \varepsilon}{1 \mp \varepsilon} \rightarrow 0$, т. е. абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox стремятся к нулю. Схематичный график вещественной части $u_{\varepsilon}(x)$ (рисунок 2) существенно отличается от графика этой функции для случая $m = 1$.

При этом предел семейства $u_{\varepsilon}(x)$ есть распределение $P\left(\frac{1}{x^2}\right) - i\pi\delta'$.

Если $m = 2$, то

$$u_{\varepsilon}(x) = \left(\frac{1 - i\varepsilon}{x + i\varepsilon} \right)^2 = \frac{(x - \varepsilon^2)^2 - \varepsilon^2(x + 1)^2}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} - 2\varepsilon i \frac{(x - \varepsilon^2)(x + 1)}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}.$$

Семейство $u_\varepsilon(x)$ для такого случая отличается от $u_\varepsilon(x)$ при $m = 0$ только знаком мнимой части.

Итак, для уравнения с обобщенным коэффициентом (1) даже для случая $s = 2$ и целых m поведение решений аппроксимирующих уравнений может быть разным.

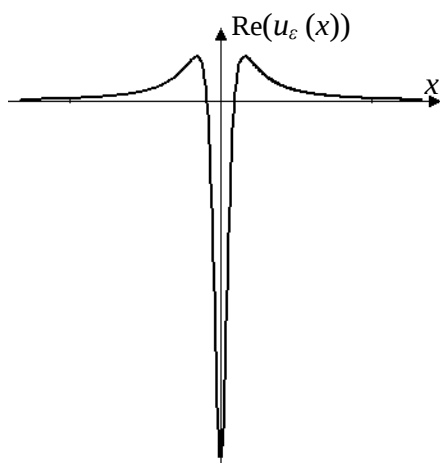


Рисунок 2

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневи́ч, А. Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А. Б. Антоневи́ч, Т. Г. Шагова // Таврический вестн. информатики и математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.

2. Антоневи́ч, А. Б. Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А. Б. Антоневи́ч, Е. В. Кузьмина // Весн. Гродз. Дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.

УДК 378.14

А. А. КУЛЬГОВЕНЯ, Н. Н. СЕНДЕР

Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

В данной статье рассмотрим уравнение неразрывности, задачу обтекания и уравнение акустики.