щей при постоянной концентрации. Данный факт может иметь большое практическое значение, поскольку он дает возможность управлять процессами производства полезной биомассы и получать различные выходные продукты, не строя специализированные биореакторы, а просто меняя амплитуду и частоту колебаний концентрации субстрата на входе хемостата.

УДК 517.968

В. Т. ДАЦЫК, Т. В. КОПАЙЦЕВА
Брест, БрГТУ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

В теории суммирования рядов и интегралов Фурье одной из важных задач является нахождение главного члена уклонения функций определенного класса от ее линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такая задача была решена в 1932 г. Е. В. Вороновской, а именно: для функций класса $C^2[0,1]$ с помощью полиномов Бернштейна была доказана следующая асимптотическая формула [1, с. 317]:

$$f(x)-B_n(f;x)=-\frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}f''(x)+o(\tfrac{1}{n}). \qquad (1)$$

Обобщением результата (1) занимались многие математики, например: С. Н. Бернштейн, И. П. Натансон, П. П. Коровкин, А. В. Ефимов и др.

Исходя из результатов работ [2–4] и формулы, полученной А. В. Ефимовым [5, с. 94], найдены асимптотические представления типа Вороновской обобщенных средних интегралов и сопряженных интегралов Фурье выделенных классов функций.

Обозначим через $W^{(2\rho+1)}D$ (ρ – фиксированное целое неотрицательное число) класс абсолютно интегрируемых на числовой прямой функций f вместе со своими существующими $(2\rho+1)$ первыми производными, причем $\left|f^{(2\rho+1)}(t)\right|\le D<\infty$.

Видно, что все производные до порядка 2ρ включительно, а также сама функция $f(t)$ принадлежат классу Липшица порядка $\alpha = 1$. Тогда для функций введенного класса $W^{(2\rho+1)}D$ справедливы представления ($m = 0,1,\ldots,2\rho$) [6]:

$$f^{(m)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}u^m du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(u(x-t)+\tfrac{m\pi}{2})dt \qquad (2)$$

и

$$\overline{f^{(m)}}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}u^m du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(u(x-t)+\tfrac{m+1}{2}\pi)dt\,. \qquad (3)$$

Введем обобщенные средние сопряжённого интеграла Фурье.

$$\bar{U}_\sigma(f;x):=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\sigma}K(\sigma,u)du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(x-t)dt\,, \qquad (4)$$

где

$$K(\sigma,u):=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\sigma)\left(\frac{u}{\sigma}\right)^m \qquad (5)$$

есть абсолютно сходящийся ряд по степеням $\dfrac{u}{\sigma}$, $0\le u\le\sigma,\sigma>0$, с коэффициентами $a_m(\sigma)$ такими, что ряд

$$A_\sigma:=a_0(\sigma)+\sum_{m=1}^{\infty}m|a_m(\sigma)| \qquad (6)$$

сходится.

Справедлива теорема:

Теорема. *Если* $f\in W^{(2\rho+1)}D$, то

$$\bar{U}_\sigma(f;x)=\sum_{\upsilon=0}^{\rho}(-1)^\upsilon\,\bar{f}^{(2\upsilon)}(x)\frac{a_{2\upsilon}(\sigma\ )}{\sigma^{2\upsilon}}+\sum_{\upsilon=1}^{\rho+1}(-1)^{\upsilon+1}f^{(2\upsilon-1)}(x)\frac{a_{2\upsilon-1}(\sigma)}{\sigma^{2\upsilon-1}}+$$

$$+\tfrac{(-1)^\rho}{\sigma^{2\rho+1}}J_{\sigma,\rho}(x)\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\sigma)+\tfrac{1}{\sigma^{2\rho+1}}\Big(O(\omega_2(\tfrac{1}{\sigma};f^{(2\rho+1)}))+B_{\sigma,\rho}\Big)A_\sigma,, \qquad (7)$$

где $B_{\sigma,\rho}=o(1)$;

$$J_{\sigma,\rho}(x):=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}\varPhi_x^{(2\rho+1)}(t)\frac{\sin\sigma t}{t}dt\,,$$

$$\varPhi_x^{(2\rho+1)}(t):=f^{(2\rho+1)}(x+t)-2f^{(2\rho+1)}(x)+f^{(2\rho+1)}(x-t)\,\mathbf{.}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 512 с.
2. Семенчук, Н. П. Об одной асимптотической формуле типа Вороновской / Н. П. Семенчук, В.Т. Дацык // Вес. АН Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 1993. – № 1. – С. 76–79.
3. Семенчук, Н. П. Асимптотические формулы типа Вороновской для обобщенных средних сопряженного интеграла Фурье / Н. П. Семенчук, В. Т. Дацык // Вес. АН Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 1996. – №2. – С. 130–131.
4. Дацык, В. Т. Обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье функции с существенно ограниченной дробной производной / В. Т. Дацык // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 35–42.
5. Ефимов, А. В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера / А. В. Ефимов // Изв. Акад. наук СССР. Сер. мат. – 1958. – № 1, т. 22. – С. 81–116.
6. Дацык, В. Т. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений со старшей производной дробного порядка / В. Т. Дацык, Н. П. Семенчук // Докл. Нац. акад. навук Беларусі. – 2002. – № 6, т. 46.– С. 35-39.

УДК 519.63

В. М. ВОЛКОВ[1], Е. И. КУЛЬГУН[2]
[1]Минск, БГУ
[2]Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ В РЕАЛИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y), \qquad (1)$$

$$u(x=\pm 1,y)=u(x,y=\pm 1)=0. \qquad (2)$$