

Рис. 9. Эпюра изгибающего момента M_x

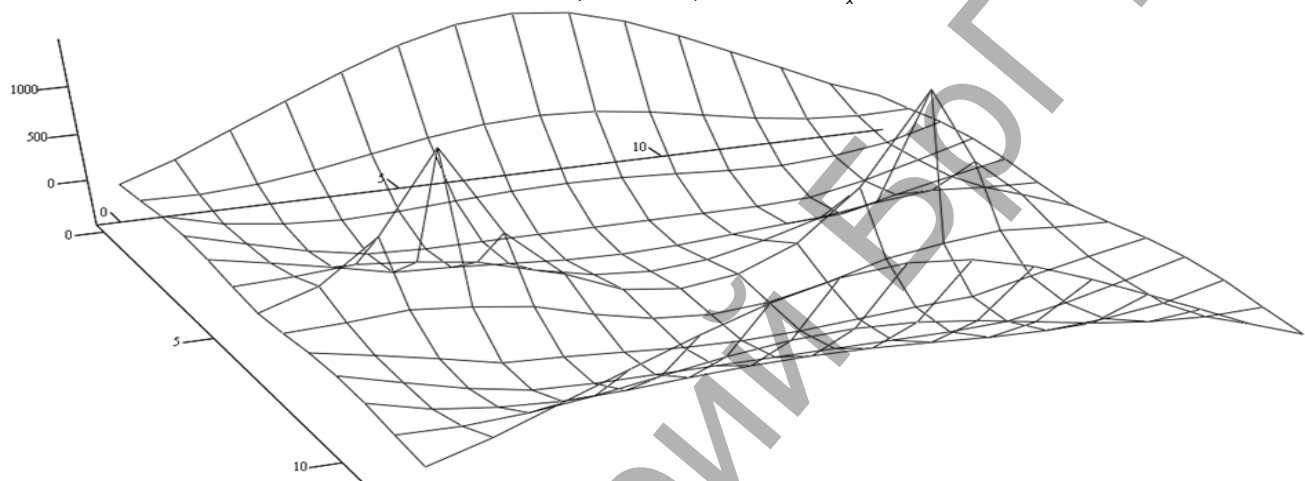


Рис. 10. Эпюра изгибающего момента M_y

Материал поступил в редакцию 11.04.13

VIERENICH A.A., IGNATIUK V.I. On the calculation of bent plates using the finite difference method

In this article, the principles of bent plate calculation using the finite difference method are discussed. Examples of calculating plates with intermediate supports are shown.

УДК 656.13.05

Шуть В.Н.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЗАТОРА НА РЕГУЛИРУЕМОМ ПЕРЕКРЕСТКЕ ПОСРЕДСТВОМ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

Введение. Граф называется *регулярным* (или *однородным*), если степени всех его вершин равны; *степенью* регулярного графа называется степень его вершин.

Регулярные (однородные) графы применяются в разнообразных областях. Например, при идентификации молекул веществ, при разработке баз знаний интеллектуальных систем, в моделях механического вращения, в пиринговых сетях (некоторые из которых базируются на **связных регулярных неориентированных графах**). Графы также применяются в информационных системах, развитие которых привело к их объединению в локальные и глобальные компьютерные сети. Это потребовало оптимизации топологии соединений. К примеру, когда необходимо наилучшим образом связать большое количество однородных элементов, например, концентраторов. Для такой оптимизации регулярные графы являются наилучшим инструментом.

В природе регулярность положения молекул и связей между ними прослеживается в кристаллах. Регулярные структуры широко используются в технике построения программируемых логических матриц (ПЛМ), в однородных вычислительных средах (ОВС), при

построении и настройке цифровых интегрирующих структур, при проектировании нейронных сетей и т.д.

Регулярные графы являются математической моделью систем, где прослеживаются регулярные бинарные отношения между частями системы. К таким объектам можно отнести регулируемый с использованием светофорного объекта перекресток. Здесь в качестве единиц, вступающих во взаимодействие (отношение), выступают транспортные потоки, поступающие к перекрестку с различных направлений.

Постановка задачи. *Дорожный затор, или автомобильная пробка* – скопление транспортных средств на дороге, существенно снижающее её пропускную способность. Пробки возникают, когда количество транспортных средств на дороге превышает её максимальную пропускную способность. Транспортный поток уплотняется, снижаются интервалы между автомобилями, и водители вынуждены снижать скорость своих автомобилей. Пробка в улично-дорожной сети (УДС) города приводит к плохому использованию инфраструктуры сети с увеличением времени прохождения через неё транспортных средств (АТС) и плохой эффективностью использова-

ния энергии (пережёт топлива). Причиной пробок на дорогах является поступление потока машин, превышающего их пропускную способность из-за увеличения АТС в часы «пик» или снижения пропускной способности дороги.

На рис. 1а) изображена абстрактная улично-дорожная сеть. Автотранспортные средства (АТС) могут двигаться, например, из пункта А в пункт В, по вертикальным и горизонтальным направлениям, не встречая препятствий в местах пересечения горизонталей и вертикалей. Для такой абстрактной сети на основе основного закона теории транспортных потоков [1] возможно рассчитать максимальное число N АТС, при котором сеть еще обеспечивает максимальную пропускную способность. С увеличением этого числа N пропускная способность сети падает.

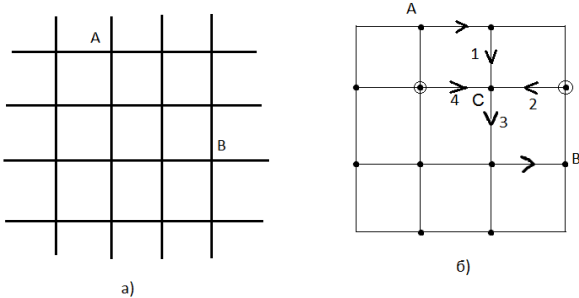


Рис. 1. Абстрактная и реальная УДС

Реальная УДС представляет собой граф, вершины которого отображают перекрёстки, а рёбра – улицы. Помеченные (кружками) вершины графа соответствуют регулируемым перекрёсткам, т.е. таким, на которых установлен светофорный объект (СФО), остальные вершины графа относятся к нерегулируемым перекрёсткам.

Пропускная способность реальной УДС намного меньше из-за наличия как регулируемых, так и нерегулируемых перекрёстков. В первом случае автомобиль может стать перед красным сигналом светофора, во втором случае он обязан пропустить транспорт с высшим приоритетом (главная улица).

Из пункта А в пункт В автомобиль может прибыть различными маршрутами. На рис. 1б) водитель выбрал маршрут, исключая СФО. Это совсем не означает, что он в пункт В прибедёт быстрее, нежели, если бы он предпочёл маршрут с одним или даже двумя СФО. Так, в вершине С он должен будет пропустить транспорт, движущийся по рёбрам 2 и 4, если у него не главная улица.

Таким образом, введение светофорного регулирования позволяет во многих случаях расширить пропускную способность сети. Целью настоящей работы является анализ регулируемого перекрёстка методами теории графов, а также формализация задачи разгрузки перекрёстка при заторе.

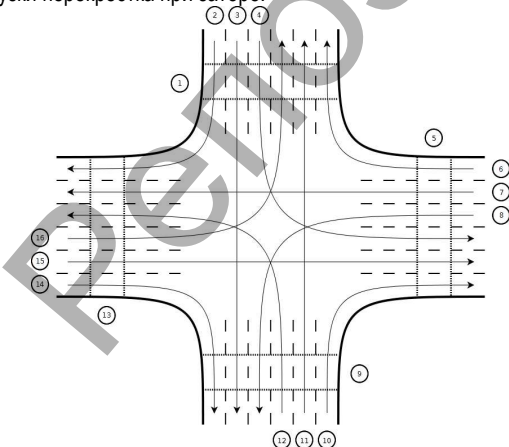


Рис. 2. Транспортные потоки перекрестка

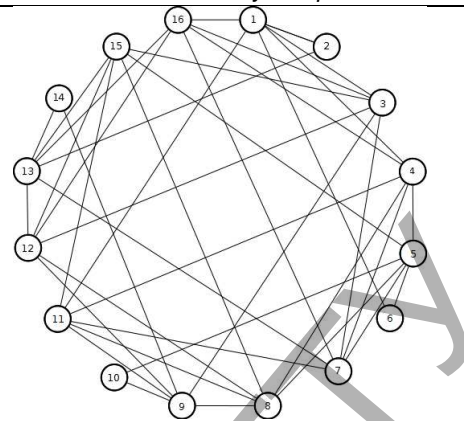


Рис. 3. Граф пешеходно-транспортных потоков

Модель перекрёстка и его графы. Перекрёсток в УДС является конфликтной зоной (КЗ). Светофорное регулирование (СФР) предназначено для поочерёдного пропуска конфликтующих участников дорожного движения (ДД). Так, на рис. 2 число конфликтующих участков ДД равно 16, то есть по числу транспортно-пешеходных потоков. Здесь имеем:

- четыре пешеходных потока $Xп=\{Xп1, Xп5, Xп9, Xп13\}$;
- четыре транзитных транспортных потока $Xтт=\{Xтт3, Xтт7, Xтт11, Xп15\}$;
- четыре правоповоротных транспортных потока $Xтп=\{Xтп2, Xтп6, Xтп10, Xтп14\}$;
- четыре левоповоротных транспортных потока $Xтл=\{Xтл4, Xтл8, Xтл12, Xтл16\}$.

Переменная X означает число пешеходов либо транспортных единиц на перекрёстке. Каждому потоку отведена собственная полоса движения, и переменная X отображает текущее число единиц транспорта либо пешеходов на этой полосе. Построим граф перекрёстка или граф пешеходно-транспортных потоков (рис. 3). Вершины графа соответствуют транспортным потокам. Две вершины графа соединены ребром, если соответствующие траектории движения этих потоков в зоне перекрёстка имеют точки пересечения (конфликтные точки).

Вынесение пешеходных потоков из зоны перекрёстка путём обустройства подземных переходов позволяет упростить граф транспортных потоков, резко сократить число конфликтных точек (рис. 4).

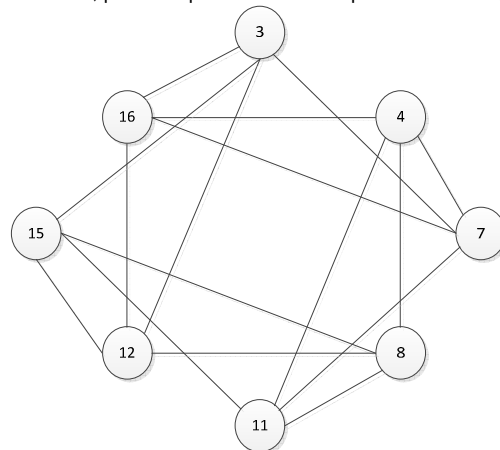


Рис. 4. Граф G транспортных потоков

Следует заметить, что в графе пешеходно-транспортных потоков правоповоротные транспортные средства вступали в конфликт с пешеходами (рис. 3). Устранение пешеходных потоков повлекло и ликвидацию конфликтных точек с правоповоротными АТС. Поэтому они из графа транспортных потоков удалены (рис. 4).

Построим граф G дополнительный к графу G транспортных потоков (рис. 5а). Преобразуем его путем построения гамильтонового

контура. Процесс построения гамильтонового контура показан стрелками на рис. 5а). Полученный граф назовем графом светофорного регулирования.

Пара вершин, инцидентных одному ребру этого графа, указывает на то, что данные потоки могут двигаться через перекресток одновременно, то есть они не имеют конфликтных точек соприкосновения. Таким образом, процесс оптимального управления развозом транспорта на перекрестке сводится к формированию групп не конфликтующих потоков максимального объема.

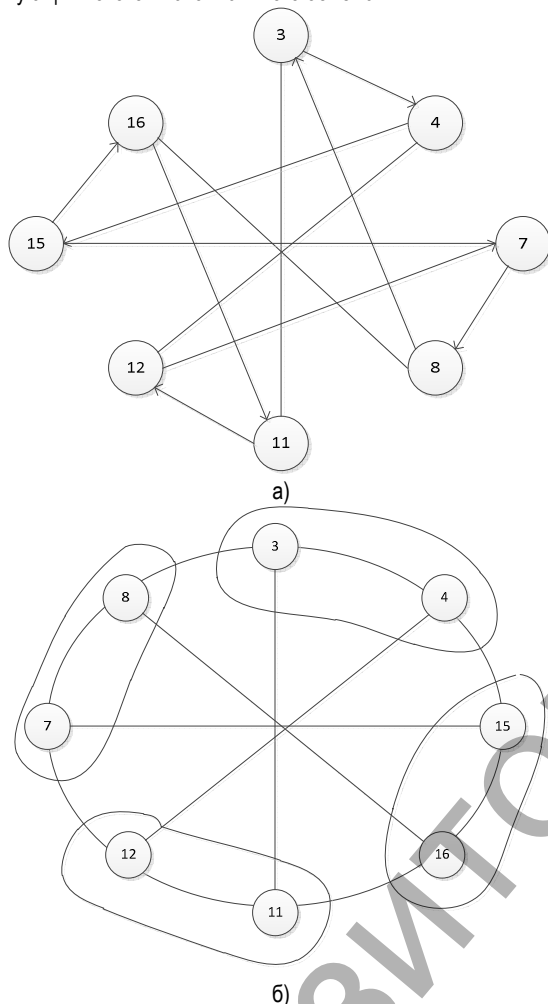


Рис. 5. Граф \bar{G} светофорного регулирования

Приведем данную постановку к известной в теории графов задаче о выделении в графе клик максимального размера. Известно следующее определение клики: «подмножество V' вершин графа G называется кликой, если любые две входящие в него вершины смежны, т.е. если порожденный подграф $G(V')$ является полным» [2].

Клика называется максимальной, если она не содержится в клике с большим числом вершин, и наибольшей, если число вершин в ней наибольшее среди всех клик. Число вершин в наибольшей клике графа G называется его плотностью (или кликовым числом) и обозначается через $\Phi(G)$ [2].

Характеристика регулярных графов

Граф светофорного регулирования относится к регулярным (однородным) графам, и в частности, к кубическим графам (степень его вершин равна 3). Обозначается K_n^m , где n – порядок графа, определяемый числом вершин графа, а m – степень вершин графа. Число вершин в графе светофорного регулирования равно 8, следовательно, он относится к классу кубических графов K_8^3 . Число таких гра-

фов равно 5. В таблице 1 приведены все 5 графов с полной характеристикой каждого из них.

Известны различные алгоритмы получения (генерации) регулярных графов [3–5]. Они делятся на точные (алгоритм прямого произведения множеств, алгоритм дерева и др.) и приближенные (генетический алгоритм). Точные алгоритмы обеспечивают генерацию всех возможных графов с заданными параметрами, но отличаются большой трудоемкостью. Приближенные алгоритмы выполняются гораздо быстрее, но не гарантируют генерацию всех возможных графов. Однако одной из основных проблем генерации графов оказалось не само их создание, а отбор неизоморфных графов, т.к. все алгоритмы генерируют графы с большой избыточностью. Существующие алгоритмы поиска изоморфизма (метод анализа вектора степеней вершин, метод поиска с возвратом и т.д.) в большинстве своем не пригодны для регулярных графов.

Граф с порядковым номером 5 является графом светофорного регулирования. Это тот же граф, что на рис. 5б) с перенумерованными вершинами. Он является трёхсвязным, непланарным (согласно [6]), имеет изотоп. Под изотопом понимается изоморфный исходному графу, но не совпадающий с ним по операции вращения вокруг центра окружности, являющейся гамильтоновым контуром. Получен изотоп путём построения нового гамильтонового контура в исходном графе. Как видно из таблицы 1, не каждый граф имеет изотоп. Так, графы 1, 3 и 4 изотопов не имеют.

Более важной характеристикой графа светофорного регулирования является кликовое число $\Phi(G)$. Оно определяет число фаз в светофорном цикле. Фаза регулирования – это совокупность основного такта и следующего за ним переходного интервала. В основной такт (зелёный сигнал светофора) даётся разрешение на проезд перекрёстка группе АТС, не конфликтующих между собой. Затем следует переходной интервал в форме желтого сигнала светофора. После чего наступает следующая фаза, предназначенная для второй группы не конфликтующих АТС.

Управление перекрестком по графу светофорного регулирования

Общее уравнение продолжительности цикла регулирования имеет вид [7]:

$$C = t_{z1} + t_{np1} + t_{z2} + t_{np2} + \dots, \quad c, \quad (1)$$

где t_z – продолжительность горения зеленого сигнала, с;

t_{np} – продолжительность переходного интервала, с.

Сразу следует заметить, что продолжительность переходного интервала относится к разряду потерянного времени в цикле светофорного регулирования, поскольку только после него начинается следующая фаза разрешения на движение. Отсюда следует, что чем меньше фаз в светофорном цикле, тем лучше, меньше потери времени на СФО.

Рассчитаем число фаз регулирования для нашего случая:

$$n = N_{пот} / \Phi(G) = 8 / 2 = 4, \quad (2)$$

где $N_{пот}$ – число транспортных потоков перед перекрестком или число вершин в графе светофорного регулирования.

Реализация четырехфазного цикла регулирования выполняется естественным образом, то есть по часовой стрелке на перекрестке (рис. 2). В каждой фазе пропускаются два потока бесконфликтных транспортных средств (т.к. $\Phi(G) = 2$), относящихся к въезду на перекресток с одной улицы. Одна фаза активная, остальные три заблокированы (с них нет разрешения въезда на перекресток). Включение фаз идет по графу светофорного регулирования против часовой стрелки: (3, 4), (7, 8), (12, 11) и (16, 15).

СФО устроен так, что позволяет выдавать разрешение на движение любому потоку в отдельности, а следовательно, возможно организовать любые комбинации движения этих потоков. Разумеется, комбинации из бесконфликтных потоков. Например, вместо (3, 4) возможна комбинация (3, 8), а также (3, 11) (рис. 5б)).

Для удобства дальнейшего рассмотрения будем пользоваться переобозначенным графом (рис. 6) светофорного регулирования из таблицы 1. Рядом с вершинами графа стоят переменные $x_j, x_i, j=1, 8$

Таблица 1. Класс регулярных графов K_8^3

№	Граф	Изотоп графа	Связность	Планарность	Наличие Гамильтоновой контура	Кликовое число	Число фаз цикла светофора
1	2	3	4	5	6	7	8
1		-	2-связный	+	+	3	3
2			3-связный	+	+	3	3
3		-	3-связный	-	+	3	4
4		-	3-связный	+	+	2	4
5			3-связный	-	+	2	4

$i=1,2,3,\dots$, которые показывают число АТС на j -полосе в i -м светофорном цикле. Множество $X_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_8^i\}$ есть совокупность транспортных потоков, расположенных на отведенной каждому из них дорожной полосе в i -м цикле светофорного регулирования. При отсутствии затора в i -м светофорном цикле (состоящем из 4-х фаз) все эти АТС под управлением СФО должны покинуть перекресток. В $(i+1)$ -светофорном цикле значения переменных x_j^i будут другими, т.к. АТС прибывают к перекрестку случайным образом и переменная X_j^i для каждой полосы дороги является случайной величиной.

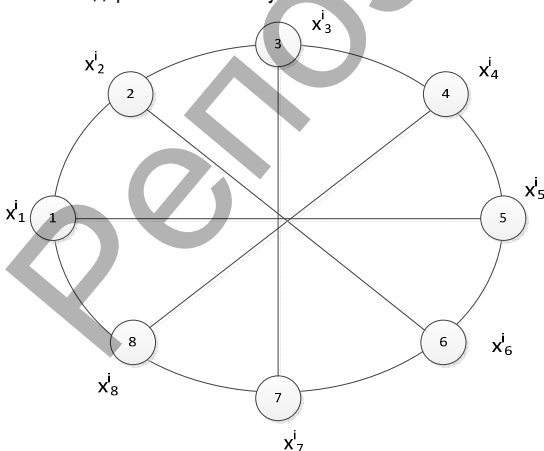


Рис. 6. Переобозначенный граф светофорного регулирования

Определим условия движения АТС через перекресток без затора. Для этого необходимо, чтобы для каждой светофорной фазы i -го светофорного цикла выполнялось:

$$\frac{(L + d) \cdot \max(x_j^i, x_{j+1}^i) + D}{v} \leq t_{zk} \quad (3)$$

Здесь $k = \overline{1, n}$, где k – номер светофорной фазы; n – число фаз светофорного цикла (2); L – средняя длина АТС; d – расстояние между парой АТС; D – длина перекрестка; v – скорость движения АТС через перекресток;

Если в какой-то момент для одной из фаз, а фазе соответствуют две конкретные полосы движения, нарушается неравенство 3, то следовательно, в отведённое время, равное ширине фазы t_{zk} , все АТС не могут пройти перекресток. Тогда эта фаза может быть продлена за счёт следующей за ней и т.д. Заимствование времени может идти вплоть до последней фазы светофорного цикла, то есть все АТС, предназначенные для пересечения перекрестка в данном цикле, его покинули, то затора нет.

Тем не менее, это ведёт к ухудшению ситуации, несёт определённые потери в дорожном движении. Действительно, сужение фазы зелёного сигнала будет вести к остановке подходящего к СФО транспорта с направления, соответствующего данной фазе. Если бы сужения не было, то он бы прошёл транзитом без остановки, то есть это нарушает просчитанный план координации, в который включён данный СФО.

Запишем условие наступления затора:

$$\sum_{j \in \{1,3,5,7\}} \frac{(L + d) \max(x_j^i, x_{j+1}^i) + D}{v} > C - n \cdot t_{np} \quad (4)$$

где t_{np} – продолжительность переходного интервала при смене фаз.

То есть затор наступает, когда на светофорный объект (СФО) поступает слишком большое количество АТС. СФО не успевает их пропустить, т.к. величина C – продолжительность светофорного цикла ограничена и постоянна. Если СФО находится в координированной сетке других СФО, то увеличивать длительность светофорного цикла C нельзя. Это нарушит синхронизацию пропуска АТС через систему СФО.

Как только система «светофорный объект» идентифицирует наступление затора, сразу управление формированием потоков (комбинация потоков) переходит в режим свободного формирования таких пар, чтобы быстрее устранить затор. Возможность такая имеется. Если в режиме беззаторовой работы постоянно функционирует пара (1, 2), то 1 еще можно комбинировать с 5 и 8 (рис. 6).

Заключение. Таким образом, разработана графовая модель регулируемого перекрестка. Для оптимального управления СФО предложено использовать граф светофорного регулирования, являющийся производным графа перекрестка. Получен критерий наступления затора. В дальнейшем необходимо разработать алгоритм эффективного устранения затора. В настоящей работе не рассматривается алгоритм борьбы с затором. Это отдельный режим работы СФО, который требует отдельного исследования.

SHUT V.N. Research of the mechanism of emergence of the jam at the adjustable intersection by means of regular counts

Developed graph model controlled intersection. For optimal control of the SFO proposed to use graph of traffic light control, which is a derivative of the graph intersection. Obtain a criterion for the onset of congestion.

УДК 536.3:539.21-17

Кушнер Т.Л., Чугунов С.В.

ВКЛАД ТЕПЛООВОГО РАСШИРЕНИЯ РЕШЕТКИ В ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ШИРИНЫ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ ПОЛУПРОВОДНИКА CuGa_5Se_8

Введение. Фазы I–III–VI_m широко изучаются с целью управления фундаментальными свойствами тройных халькогенидов [1]. К материалу указанного типа относятся и тройные соединения $\text{CuB}^{\text{III}}\text{C}^{\text{VI}}_5$ и $\text{CuB}^{\text{III}}_5\text{C}^{\text{VI}}_8$ (где B^{III} –Al, Ga, In; C^{VI} –S, Se, Te). Указанные соединения образуются на разрезах $\text{A}_2\text{C}^{\text{VI}}$ – $\text{B}^{\text{III}}_2\text{C}^{\text{VI}}_3$, которые являются квазибинарными, либо близко к ним расположены. Соединение CuGa_5Se_8 , как и CuIn_3Se_5 , CuGa_3Se_5 , в случае расположения вакансий в определенных узлах кристаллической решетки называют соединениями с упорядоченными вакансиями (OVC). Однако в материалах могут образовываться донорно-акцепторные дефектные пары $\text{Ga}_{\text{Cu}}^{2+} + 2\text{V}_{\text{Cu}}^{-1}$, и в таком случае их называют соединениями с упорядоченными дефектами (ODC).

Наличие прямых межзонных переходов с энергией около 1,9 эВ для CuGa_5Se_8 при комнатной температуре дает возможность использовать это соединение для создания высокоэффективных, радиационно-стойких преобразователей солнечной энергии, ИК-детекторов и других устройств. О получении качественных монокристаллов имеются единичные сообщения в литературе. В основном исследования физических свойств проходят на объемных поликристаллических образцах или тонких пленках. Известно, что многие электрические и оптические свойства многокомпонентных соединений $\text{CuB}^{\text{III}}_5\text{C}^{\text{VI}}_8$ (где B^{III} –Al, Ga, In; C^{VI} –S, Se, Te) зависят от их стехиометрии. В данной работе будут рассмотрены результаты исследования ширины запрещенной зоны полупроводника CuGa_5Se_8 , монокристаллы которого были получены двухтемпературным методом Бриджмена-Стокбаргера [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дрю, Д. Теория транспортных потоков и управления ими // Пер. с англ. – М.: Транспорт, 1972. – 423 с.
2. Харари, Ф. Теория графов – М.: Мир, 1973. – 34 с.
3. Kim, J.H. Random matchings which induce Hamilton cycles, and Hamiltonian decompositions of random regular graphs / J.H. Kim, N.C. J. Combin // Theory – Ser. B 81, 2001. – P. 20–44.
4. Meringer. Erzeugung regulärer Graphen. Diplomarbeit bei Prof. Dr. Laue Lehrstuhl für Mathematik der Universität Bayreuth. Bayreuth, Januar, 1996.
5. Шуть, В.Н. Компьютерная генерация трехсвязных однородных плоских графов, не имеющих гамильтонова контура // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения», Минск, 2009. – С. 128–129.
6. Шуть, В.Н. Критерий планарности графов, обобщающий теорему Понтрягина-Куратовского // Доклады Одесского семинара по дискретной математике, Одесса, «Экология», № 13, август 2012. – С. 59–61.
7. Кременец, Ю.А. Технические средства регулирования дорожного движения / Ю.А. Кременец, М.П. Печерский – М.: Транспорт, 1981. – 92 с.

Материал поступил в редакцию 20.12.12

Лишь в ограниченном количестве работ имеются результаты исследований зависимости ширины запрещенной зоны соединения CuGa_5Se_8 от температуры [3–5]. Дальнейшее описание экспериментальной зависимости $E_g(T)$ связано с физически корректной аналитической интерпретацией полученных результатов. В большинстве случаев данные анализировались при помощи модели, которая позволяла получить физически адекватные величины для широкозонных полупроводников в определенном интервале температур с учетом дисперсии фононов, но не учитывала эффект теплового расширения кристаллической решетки [6]. В работе [7] данный эффект учтен, но с помощью простого, эмпирически подобранного выражения. Обе модели проверялись для полупроводника CuGa_5Se_8 , но полученные результаты не во всех случаях можно считать физически достоверными [5]. Следовательно, для получения более надежных физических параметров, необходимо учитывать не только зависимость ширины запрещенной зоны от температуры, обусловленную электрон-фононным взаимодействием, но и температурные изменения коэффициентов теплового расширения кристаллической решетки.

Теоретические исследования показали, что вклад собственных колебаний решетки в сокращение интервала $E_g(T) - E_g(0)$ пропорционален среднему значению числа фононов [8], кроме того, зависит от их дисперсии. В изменении ширины запрещенной зоны полупроводников от температуры данный вклад является доминирующим. В работе [9] было предложено описывать зависимость $E_g(T)$ формулой:

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{\chi \cdot \Theta}{2} \left(\sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{6} \cdot \left(\frac{2T}{\Theta}\right)^2} + \left(\frac{2T}{\Theta}\right)^4 - 1 \right), \quad (1)$$

Кушнер Татьяна Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, декан факультета довузовской подготовки Брестского государственного технического университета.

Чугунов Сергей Владимирович, старший преподаватель кафедры физики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.