

IVANYUK D.S., GOLOVKO V.V. The neuro-PID controller pasteurization installation

The neuro-PID controller for the pasteurizer was developed. It consists of two parts: the conventional PID (proportional plus integral plus derivative controller) and the neural network, which are based on the multilayer perceptron structure. The outputs of the neural network are proportional (P), integral (I), and derivative (D) gains. The simulation and experimental results show the effectiveness of the proposed approach.

УДК 519.688:004.021

Чичурин А.В., Швычкина Е.Н.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ХЕМОСТАТА ДЛЯ ОДНОГО ПИТАТЕЛЬНОГО РЕСУРСА

Введение. В работе рассматриваются динамические модели хемостата Михаэлиса-Ментена, описывающие процесс непрерывного культивирования бактерий с одним органическим субстратом и двумя видами микроорганизмов в случае, когда константы Михаэлиса-Ментена для обеих конкурирующих популяций микроорганизмов равны. Для такой системы ищутся решения с конечными начальными условиями, принимающие только положительные значения. Поставленная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения первого порядка.

Построены программные модули, использующие численные процедуры, которые позволяют осуществить моделирование процессов хемостатного культивирования при изменяющихся параметрах системы, а также визуализировать динамику процесса развития для каждого микроорганизма. Проведен сравнительный анализ некоторых численных методов, которые использовались для интегрирования результирующего нелинейного дифференциального уравнения.

Описание модели, постановка задачи. Математическое моделирование динамики развития двух видов микроорганизмов, потребляющих один субстрат, является актуальной задачей, часто возникающей при производстве в медицинской и пищевой промышленности, микробиологической промышленности, экологии, а также при производстве генетически модифицированных продуктов. Моделирование конкурирующих популяций микроорганизмов является одной из наиболее сложных задач в математической биологии.

Основополагающий принцип количественного выражения всех проявлений жизни клетки приведен, например, в книге Перта [1], где свойства и поведение клеток описываются математическими моделями. Для изучения скорости роста популяций микроорганизмов можно использовать следующую гипотезу Ж. Моно [1]: зависимости скоростей реакций являются функциями от концентрации субстрата. Эта гипотеза была использована в построении модели Михаэлиса-Ментена. Данная модель описывает процессы, происходящие в хемостате, специальном лабораторном или промышленном приборе для выращивания полезной биомассы микроорганизмов (бактерий). Целью управления хемостатом является обеспечение режима работы, соответствующего максимальной производительности и максимальному выходу полезной биомассы микроорганизмов. Под хемостатом часто понимают также математическую модель, описывающую биологический процесс для непрерывного культивирования бактерий, обеспечивающий оптимальные температурные условия и постоянное поступление свежей питательной среды при одновременном удалении части бактериальной культуры [2]. В данной работе мы будем придерживаться такого определения. В простейших моделях хемостата [2] рассматривается конкуренция нескольких видов микроорганизмов, которые питаются одним ограниченным питательным веществом, называемым субстратом. Если конкуренция двух или более популяций происходит «эксплуататорским образом» при одном лимитируемом субстрате, то выживает только одна из популяций, а остальные – вымирают. Такая ситуация возникает

при большинстве заданных постоянных значений параметров – скорости вымывания и входной концентрации питательного субстрата. Исследование таких процессов приведено в работах [1, 2]; там же было доказано, что теоретически возможно краткосрочное сосуществование двух или более популяций, питающихся одним ограниченным субстратом. В природе существуют примеры, которые демонстрируют сосуществование нескольких популяций, причем довольно длительное время.

В реальных условиях параметры, которые описывают хемостат, не являются постоянными величинами. Наличие природных сезонных изменений приводит к необходимости уточнения модели простого хемостата, а именно, рассмотрения модели с периодически изменяющимися коэффициентами. Существует два основных способа описания такой модели: первый – сделать периодической скорость подачи входной концентрации питательного субстрата, второй – рассмотреть периодическую скорость смыва субстрата. Первая из этих модификаций была изучена в работе [3]. Такой подход является естественным с точки зрения экологии, так как можно ожидать, что уровни питательных веществ во многих экосистемах находятся в зависимости от дня и ночи или имеют более длительную сезонную зависимость. Система дифференциальных уравнений, описывающая такую модель, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = f(t) - s(t) - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = (\mu_1(s(t)) - 1)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - 1)x_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $\mu_i(s(t)) = \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)}$ ($i = 1, 2$), $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата, $x_1(t)$, $x_2(t)$ – плотности микроорганизмов в

момент времени t , остальные параметры m_1 , a_1 , m_2 , a_2 модели (1) являются заданными положительными числами, периодическая функция $f(t)$ определяет скорость подачи питательного субстрата в хемостат. Данная модель хемостата предложена немецкими учёными Л. Михаэлисом и М. Ментеном в 1913 г. [2].

Вторая модификация была изучена в работах [4, 5], и соответствующий эксперимент представляет собой управление скоростью насоса, что изменяет скорость вымывания (модель станции очистки сточных вод). Система дифференциальных уравнений, описывающая данную модификацию, имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (1 - s(t))D(t) - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = (\mu_1(s(t)) - D(t))x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D(t))x_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $D(t)$ – положительная периодическая функция, определяющая

Чичурин Александр Вячеславович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

Беларусь, г. Брест, БрГУ, 224600, бульвар Космонавтов, 21.

Швычкина Елена Николаевна, старший преподаватель кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Физика, математика, информатика

скорость вымывания субстрата. Для обеих рассмотренных моделей результаты схожи и приводят к выводу, что длительное сосуществование популяций возможно. Системы вида (1) и (2) были исследованы с помощью численных, асимптотических и топологических методов, на основе которых были сделаны выводы об эффективности периодических режимов управления хемостатом, позволяющих обеспечить уровни концентраций полезной биомассы, недостижимые при постоянных управляющих воздействиях [4-6].

В данной работе ищутся решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$s(0) = s_0 \geq 0, \quad x_1(0) = x_1^0 \geq 0, \quad x_2(0) = x_2^0 \geq 0 \quad (3)$$

на достаточно больших промежутках времени (в том числе возможен бесконечно большой временной интервал). Начальные концентрации искомым функций, определяемые из условий (3), неотрицательны в силу биологического характера задачи. Поэтому решения задачи Коши (1), (3) для любой ограниченной неотрицательной управляющей функции $f(t)$ (кусочно-непрерывной или измеримой по переменной t), должны являться неотрицательными функциями времени, т.е. $s(t) \geq 0, x_1(t) \geq 0, x_2(t) \geq 0, t \in [0, +\infty)$.

Определим соотношения

$$\omega_i = \frac{a_i}{m_i - 1} \quad (i = 1, 2),$$

называемыми *безубыточными концентрациями* [2].

Исследование асимптотического поведения решений системы уравнений вида (1) при $t \rightarrow +\infty$ содержится в работах [2, 3, 6] и состоит в следующем:

1. При постоянном внешнем воздействии, то есть, при $f(t) \equiv f_0 = const$ с течением времени в хемостате, описываемом системой (1), устанавливается одно из устойчивых состояний [2], при котором происходит либо вымирание одновременно двух микроорганизмов, либо выживание только одного из них, имеющего наименьшее значение параметра ω_i ($i = 1, 2$).

2. При периодическом внешнем воздействии, то есть когда, например, периодическая функция времени $f(t) = b + a \sin(\omega t)$ [3] описывает подачу питательного вещества в процессе хемостата при $t \rightarrow +\infty$, устанавливается один из следующих колебательных режимов:

- оба микроорганизма, участвующие в хемостатном культивировании, погибают;
- выживает только один из двух микроорганизмов;
- имеет место сосуществование двух микроорганизмов в течение неограниченно долгого промежутка времени.

В отличие от случая, когда скорость подачи питательного вещества постоянна ($f(t) \equiv f_0$), при периодической подаче вещества, возможно достигнуть сосуществования обоих микроорганизмов. Более того, изменяя амплитуду и периодичность внешнего воздействия, удается достигнуть выживания или вымирания определенного заранее микроорганизма. Строго говоря, такие результаты справедливы лишь для малых значений амплитуд входных воздействий a , поскольку при анализе колебательных процессов [3] используется приближенный метод, при котором решения $s(t), x_1(t), x_2(t)$ системы (1) ищутся в форме асимптотических разложений по степе-

Таблица 1. Сравнение численных методов решения уравнения (7)

МЕТОД	ЧИСЛО ШАГОВ	ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ	ВРЕМЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ (в секундах)
Automatic	639	1295	0.062500
ImplicitRungeKutta-8	76	1703	0.046875
ImplicitRungeKutta-3	167	832	0.031250
BDF	114	165	0.015625
DoubleStep	294	1465	0.062500
StiffnessSwitching	104	606	0.015625

ням величины a , играющей роль малого параметра.

Компьютерное исследование модели хемостата с равными параметрами Михаэлиса-Ментена. Рассмотрим случай для системы (1), когда коэффициенты Михаэлиса-Ментена удовлетворяют условию $a_1 = a_2$. Без ограничения общности можно принять, что $m_2 = \rho m_1$, где ρ – действительное положительное число, отличное от единицы [7, 8]. При данных коэффициентных условиях система (1) примет вид

$$\begin{aligned} s'(t) &= f(t) - s(t) - \frac{m_1 x_1(t) s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{\rho m_1 x_2(t) s(t)}{a_1 + s(t)}, \\ x_1'(t) &= \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right) x_1(t), \\ x_2'(t) &= \left(\frac{\rho m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right) x_2(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Для системы (4) будем искать решения, принимающие положительные значения и удовлетворяющие начальным условиям (3). Сведем решение поставленной задачи к решению одного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции $x_1(t)$. Для этого складываем все три уравнения системы (4). В результате получим неполное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\Delta(t) = s(t) + x_1(t) + x_2(t)$ вида $\Delta'(t) = f(t) - \Delta(t)$. Интегрируя это уравнение, находим его общее

решение $\Delta(t) = \left(\int_0^t e^{(\tau-t)} f(\tau) d\tau + c_1 \right) e^{-t}$, где c_1 – произвольная

постоянная. Тогда

$$s(t) = \left(\int_0^t e^{(\tau-t)} f(\tau) d\tau + c_1 \right) e^{-t} - x_1(t) - x_2(t). \quad (5)$$

Исключим из второго и третьего уравнений системы (4) функцию $s(t)$ и получим уравнение

$$\rho x_2(t)(x_1(t) + x_1'(t)) = x_1(t)(x_2(t) + x_2'(t)),$$

которое (в силу положительности решений) можно переписать в виде

$$\rho - 1 + \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} - \frac{x_2'(t)}{x_2(t)} = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение. После преобразований запишем функцию $x_2(t)$ в виде

$$x_2(t) = c_2 e^{(\rho-1)t} x_1^\rho(t), \quad (6)$$

где c_2 – произвольная постоянная.

Используя найденные функциональные соотношения (5) и (6) между функциями $s(t), x_1(t), x_2(t)$, перепишем первое уравнение системы (4) в виде

$$x_1'(t) = \frac{x_1(t)(a_1 e^t + (m_1 - 1)(c_1 + e^t x_1(t) + c_2 e^{\rho t} x_1^\rho(t)) - \int_0^t e^{(\tau-t)} f(\tau) d\tau)}{c_1 - \int_0^t e^{(\tau-t)} f(\tau) d\tau - e^t a_1 + e^t x_1(t) + c_2 e^{\rho t} x_1^\rho(t)}. \quad (7)$$

Имеет место следующая теорема [7].

Теорема 1. Решение системы (4) сводится к решению уравнения (7). Более точно, решение системы (4), удовлетворяющее условиям (3), имеет вид (5), (6), (7), где a_1, m_1, ρ – положительные числа, $m_1 \neq 1, \rho \neq 1$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Дифференциальное уравнение (7) является нелинейным уравнением первого порядка не разрешаемым в квадратурах, поэтому для его интегрирования будем использовать численные методы. Для численного интегрирования дифференциальных уравнений в системе *Mathematica* используется функция *NDSolve* [9], которая представляет частное решение в виде интерполяционной функции (*InterpolatingFunction*). Использование дополнительных опций в команде *NDSolve* дает возможность осуществлять контроль над процессом итераций, выбирать последовательность шагов независимой переменной z и определять их оптимальный размер. Выбор подходящего метода для конкретной системы может быть достаточно трудным из-за собственных настроек, которые могут значительно повлиять на эффективность и точность построения решения. Система *Mathematica* выбирает наилучший метод численного интегрирования среди имеющихся численных методов [10, 11].

В качестве примера рассмотрим численное решение уравнения (7) при значениях параметров

$$m_1 = 8, a_1 = 0,3, \rho = 0,4, c_1 = 1, c_2 = 1, \quad (8)$$

начальном условии $x_1(0) = 0,0001$ и постоянной входной скорости подачи субстрата $f(t) \equiv 1$. Приведем сравнение шести решений уравнения (7) при заданных значениях параметров (8), найденных при помощи следующих численных методов:

- 1) численный метод, выбранный автоматически системой *Mathematica*;
- 2) неявный метод Рунге-Кутты восьмого порядка точности;
- 3) неявный метод Рунге-Кутты третьего порядка точности;
- 4) неявный метод обратного дифференцирования (BDF);
- 5) неявный метод Эйлера при условии, что метод-контролер «DoubleStep» адаптирует размер шага по методу «двойного шага»;
- 6) явный метод Рунге-Кутты с автоматическим выбором порядка точности, для которого метод-контролер «StiffnessSwitching» выполняет переход от явного метода к неявному, если обнаружена жесткость решаемого дифференциального уравнения.

При определении опции *Method* в команде *NDSolve* возможно использование методов-контролеров вычислений, которые и включены в описанные методы 5-го и 6-го пунктов.

Сравнительный анализ численных методов приведем в таблице 1, где показано время вычислений, число итераций и оценка точности (суммарная ошибка на конечном интервале).

Анализируя данные таблицы 1, можно сделать вывод об эффективности рассматриваемых численных методов, используемых для интегрирования уравнения (7) по времени и точности расчетов. Наиболее оптимальными являются четвертый (неявный метод обратного дифференцирования) и шестой (явный метод Рунге-Кутты с применением метода-контролера) методы. Оценим теперь погрешности вычислений. Для этого определим функцию

$$r(t) = x_1'(t) - \frac{x_1(t)(0,3e^t + 7(1 - e^t + e^t x_1(t) + e^{0,4t} x_1^{0,4}(t)))}{1 - 1,3e^t + e^t x_1(t) + e^{0,4t} x_1^{0,4}(t)},$$

при помощи которой оценим погрешности найденных численных решений. В силу того, что погрешности зачастую достаточно малы, их удобнее оценить, используя логарифмическую шкалу. Построим в одной системе координат графики функций $\log_{10}|r(t)|$ для сравнения решений, найденных при помощи трех методов: метода, подобранного автоматически системой *Mathematica*, неявного метода Рунге-Кутты третьего порядка точности и метода обратного дифференцирования. Из рисунка 1 можно сделать вывод, что наименьшие погрешности дает неявный метод Рунге-Кутты третьего порядка (*ImplicitRungeKutta-3*). Погрешности решения уравнения (7), с помощью автоматически подобранного метода (*Automatic*, на рисунке 1 серая

сплошная линия), не имеют ярко выраженных скачков и заключены в конечных пределах. Погрешности метода обратного дифференцирования (BDF) изображены на рисунке 1 пунктирной линией. Для этого метода можно отметить, что в начале отрезка интегрирования [0, 75] погрешности достаточно малы, однако при незначительном дальнейшем возрастании переменной, а именно в окрестности значения $t \approx 80$, функция погрешностей $r(t)$ начинает изменяться скачками.

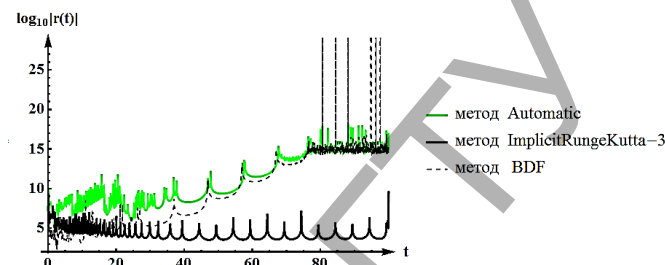


Рис. 1. Сравнение оценок погрешностей, для решений уравнения (7), найденных различными численными методами

на рисунке 2 показаны графики входящих в систему (4) трех неизвестных функций, а в правом нижнем углу построена фазовая кривая на плоскости (x_1, x_2) . Для значений параметров $m_1 = 2, a_1 = 0,01, x_1^0 = 0,1, \rho = 0,95$ показано, что популяция $x_1(t)$ осциллируя численно увеличивается, а популяция $x_2(t)$ наоборот, осциллируя численно уменьшается (при $t \approx 65$ практически обращаясь в нуль). Исходя из вида рисунка на фазовой плоскости, можно сделать вывод о колебании фазовой траектории в окрестности начала координат.

Для того, чтобы использовать вышеприведенный модуль для визуализации и нахождения численных значений концентраций трех функций $S(t), x_1(t), x_2(t)$ при другой выбранной функции подачи субстрата $f(t)$, поступим следующим образом. Пусть, например, $f(t) = 1$. Тогда в модуле после инструкции *NDSolve* заменим дифференциальное уравнение на уравнение (7), где $f(t) = 1$. Явный вид этого уравнения приведен в работе [7]. Следует также в модуле в командах *xMaxs* и *Column[< >]* записать соответствующую функцию $S(t)$ из формулы (5). Для рассматриваемого случая $f(t) = 1$ получим следующую визуализацию (рис. 3).

На рисунке 3 показаны графики входящих в систему (4) трех неизвестных функций, а в правом нижнем углу построена фазовая кривая на плоскости (x_1, x_2) . Для значений параметров $m_1 = 2, a_1 = 0,01, x_1^0 = 0,001, \rho = 0,85$ показано, что две популяции увеличивают свою численность до определенного момента времени (приблизительно $t = 8$), после которого популяция $x_2(t)$ погибает. При этом выполняется главный теоретический результат, сформулированный в работах [1, 4], о том, что при постоянной входной скорости подачи субстрата $f(t) \equiv 1$ выживает только один микроорганизм с меньшей безубыточной концентрацией (в нашем случае $x_1(t)$, поскольку $\omega_1 = 0,01, \omega_2 = 0,014$). Этот же вывод следует из вида кривой, изображенной на фазовой плоскости.

Замечание. У системы (2) существуют решения в аналитической форме. Действительно, пусть $a_1 = a_2$ и $D(t) = m_1 = 2$. Тогда система (2) примет вид

$$s'(t) = -\frac{2a_1(s(t) - 1) + s(t)(m_2 x_2(t) + 2(s(t) - x_1(t) - 1))}{a_1 + s(t)},$$

$$x_1'(t) = -\frac{2a_1 x_1(t)}{a_1 + s(t)}, \quad x_2'(t) = \left(\frac{m_2 s(t)}{a_1 + s(t)} - 2 \right) x_2(t),$$

Проведем численное исследование решений дифференциальной системы (4). При помощи нижеследующего программного модуля, смоделируем возможные состояния динамической системы (4) для различных значений входящих в нее параметров.

`opt=Appearance->"Labeled"; im=ImageSize->Small; th=Thickness[0.006]; dr=Directive[Black, 12];`
`lt={Arrowheads[{0.05}],th, Directive[Black, 12]}; fl=Flatten;lt1={13, Bold, Black};//fl;`

```
Manipulate[sol = First[NDSolve[{x1'[t] =
    x1[t] (m1 - 1 -  $\frac{a1 e^t m1 (1 + \omega^2)}{e^t \alpha (\sin[t \omega] - \omega \cos[t \omega]) + (1 + \omega^2) (1 + e^t (a1 + y0) - e^t x1[t] - e^{t \rho} x1[t]^\rho)}$ ),
    x1[0] = x10}], x1, {t, 0, tt}, MaxSteps -> 10^6]];
xMaxs = NMaximize[{Evaluate[e^{-t} + y0 +  $\frac{\alpha (\sin[t \omega] - \omega \cos[t \omega])}{1 + \omega^2}$  - x1[t] - (e^{-t+\rho} x1[t]^\rho) /. sol], 0 <= t <= tt], t] //
fi; xMax1 = NMaximize[{Evaluate[x1[t] /. sol], 0 <= t <= tt], t] // fi;
xMax2 = NMaximize[{Evaluate[(e^{-t+\rho} x1[t]^\rho) /. sol], 0 <= t <= tt], t] // fi;
plotx = ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], (e^{-t+\rho} x1[t]^\rho) /. sol}, {t, 0, tt}], PlotStyle -> {RGBColor[.33, .6, .6], Thick},
Frame -> True, FrameLabel -> {"x1(t)", "x2(t)"}, AxesStyle -> {lt, lt}, AspectRatio -> 1,
LabelStyle -> Directive[Bold, RGBColor[.31, .4, .6]]];
Column[{
Plot[e^{-t} + y0 +  $\frac{\alpha (\sin[t \omega] - \omega \cos[t \omega])}{1 + \omega^2}$  - x1[t] - (e^{-t+\rho} x1[t]^\rho) /. sol, {t, 0, tt}, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[.30, .25, .5], Thick}, PlotLabel -> "безубыточные концентрации \n" <>
"\omega=" ToString[TraditionalForm[ $\frac{a1}{m1 - 1}$ ]] <> ", " <> "\omega_2=" <>
ToString[TraditionalForm[ $\frac{a1}{m1 \rho - 1}$  // Chop]] <> "\n субстрат s(t)\n",
AxesLabel -> {Style[time, 13, Bold], Style[s, lt1]}, AxesStyle -> {lt, lt}],
Plot[x1[t] /. sol, {t, 0, tt}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotLabel -> Row[{"микрорганнизм x1(t)"}],
PlotStyle -> {RGBColor[.30, .6, .7], Thick}, AxesLabel -> {Style[time, 13, Bold], Style[x1, lt1]},
AxesStyle -> {lt, lt}],
Plot[(e^{-t+\rho} x1[t]^\rho) /. sol, {t, 0, tt}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotLabel -> Row[{"микрорганнизм x2(t)"}],
PlotStyle -> {RGBColor[.33, .6, .9], Thick}, AxesLabel -> {Style[time, 13, Bold], Style[x2, lt1]},
AxesStyle -> {lt, lt}]], Style["Система ", Bold],
Style["

$$s'(t) = b + \alpha \sin(t \omega) - s(t) - \frac{m_1 \rho s(t)}{a_1 + s(t)} x_1(t) - \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} x_2(t),$$

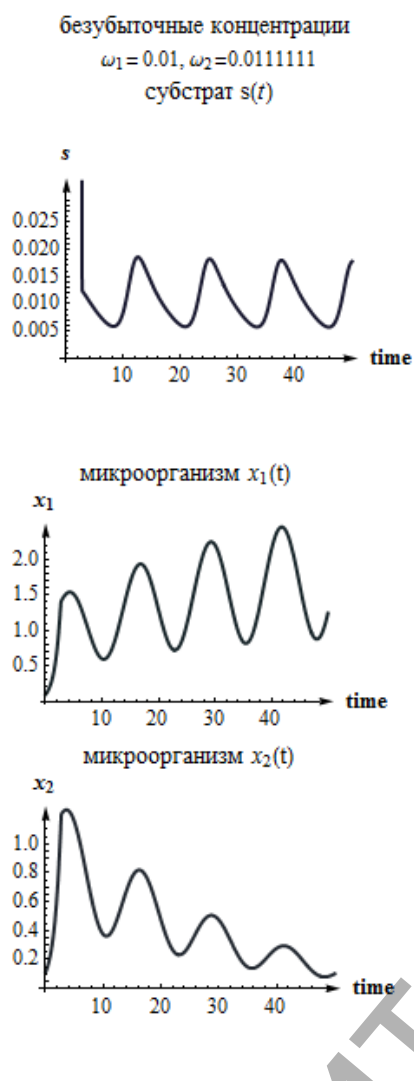

$$x_1'(t) = x_1(t) \left( \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right), x_2'(t) = x_2(t) \left( \frac{\rho m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right),$$

", Bold],
Style[" содержит параметры:", Bold],
{{rho, 0.95, "rho="  $\frac{m_2}{m_1}$  }, 0.7, 1.3, opt, im}, {{a1, 0.01, "a1"}, .001, .9, opt, im}, {{m1, 2, "m1"}, 1.5, 10, opt, im},
{{y0, 1.86, "y"}, 1, 20, opt, im}, {{alpha, 1, "амплитуда alpha"}, .00010, 1.5, opt, im},
{{omega, .5, "частота omega"}, 0.01, 1.1, opt, im},
Delimiter, {{tt, 50, "время"}, 10, 10^2, opt, im}, {{x10, .1, "начальная концентрация x1(t)"}, .00010, 1.5, opt, im},
Delimiter, Style[" Максимальные концентрации:", Bold],
TabView[{"субстрат s(t)" -> xMaxs[[1]] " при значениях " xMaxs[[2]],
"микрорганнизм x1(t)" -> xMax1[[1]] " при значениях " xMax1[[2]],
"микрорганнизм x2(t)" -> xMax2[[1]] " при значениях " xMax2[[2]]}],
Delimiter, Style[" фазовая плоскость", Bold], Dynamic[Show[plotx], SynchronousUpdating -> False],
ControlPlacement -> Right]
```

а ее решение запишется в форме

$$s(t) = 1 - x_1(t) - x_2(t), x_2(t) = c_1 e^{(m_2-2)t} x_1^{m_2/2}(t),$$

$$\frac{4a_1}{(m_2 - 2)^2} \left(\frac{2a_1}{c_1} \exp\left(-\frac{m_2 - 2}{2a_1} (a_1 (\ln x_1(t) + 2t) - x_1(t) + \ln x_1(t))\right) - (m_2 - 2)(x_1(t))^{2a_1} E_{\frac{m_2-2}{2a_1}}\left(-\frac{m_2 - 2}{2a_1} x_1(t)\right) = c_2 \right),$$



Система

$$s'(t) = b + \alpha \sin(t \omega) - s(t) - \frac{m_1 \rho s(t) x_2(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{m_2 s(t) x_1(t)}{a_1 + s(t)},$$

$$x_1'(t) = x_1(t) \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right), x_2'(t) = x_2(t) \left(\frac{\rho m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right);$$

содержит параметры:



Максимальные концентрации:

субстрат $s(t)$	микроорганизм $x_1(t)$	микроорганизм $x_2(t)$
2.58184 при значении $(t \rightarrow 54.378)$		

Фазовая плоскость

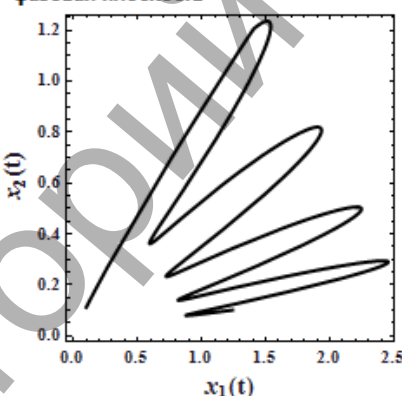


Рис. 2. Численное решение системы (4) при периодической входной скорости подачи субстрата $f(t) = b + a \sin(\omega t)$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, $E_{\frac{m_2-2}{2a_1}}$ обозначает экс-

поненциальный интеграл функции $E_n(z) = \int_1^{\infty} e^{-zt} / t^n dt$

$$\left(n = \frac{m_2 - 2}{2a_1} \right).$$

Заключение. Данная работа посвящена применению инструментария компьютерного моделирования для решения численно-аналитическими методами задач хемостата, описываемых динамической моделью Михаэлиса-Ментена. Отметим, что одной из целей настоящей работы является иллюстрация теоретической возможности появления сложных режимов колебаний численности микроорганизмов. Таким образом, не все моделируемые популяционные структуры, которые могут быть созданы при различных значениях параметров, обязательно должны иметь реальный прототип.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Перт, Д.С. Основы культивирования микроорганизмов и клеток / Д.С. Перт; под ред. проф. И.Л. Работновой. – М.: Издательство «Мир», 1978. – 331 с.

2. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.

3. Hsu, S.B. A competition model for a seasonally fluctuating nutrient / S. B. Hsu // J. Math. Biology. – 1980. – Vol. 9. – P. 115–132.

4. Pilyugin, S.S. Competition in the unstirred chemostat with periodic input and washout / P. Waltman // SIAM J. Appl. Math. – 1999. – Vol. 59, № 4. – P. 1157–1177.

5. Butler, G.J. A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate / G.J. Butler, S.B. Hsu, P. Waltman // SIAM J. Appl. Math. – 1985. – Vol. 45, № 3. – P. 435–449.

6. Sun, K. Universal modelling and qualitative analysis of an impulsive bioprocess / K. Sun, Y. Tian, L. Chen, A. Kasperski // J. Computers & Chemical Engineering. – 2011. – Vol. 35, № 3. – P. 492–501.

7. Чичурин, А.В. Построение решений модели хемостата для одного питательного ресурса / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий»: сб. статей по мат. межд. науч.- практ. конф., Чебоксары, 12–15 августа 2013 г.: в 2 ч. / ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – Чебоксары, 2013. – Ч. 2. Математическое моделирование и информационные технологии. – С. 67–74.

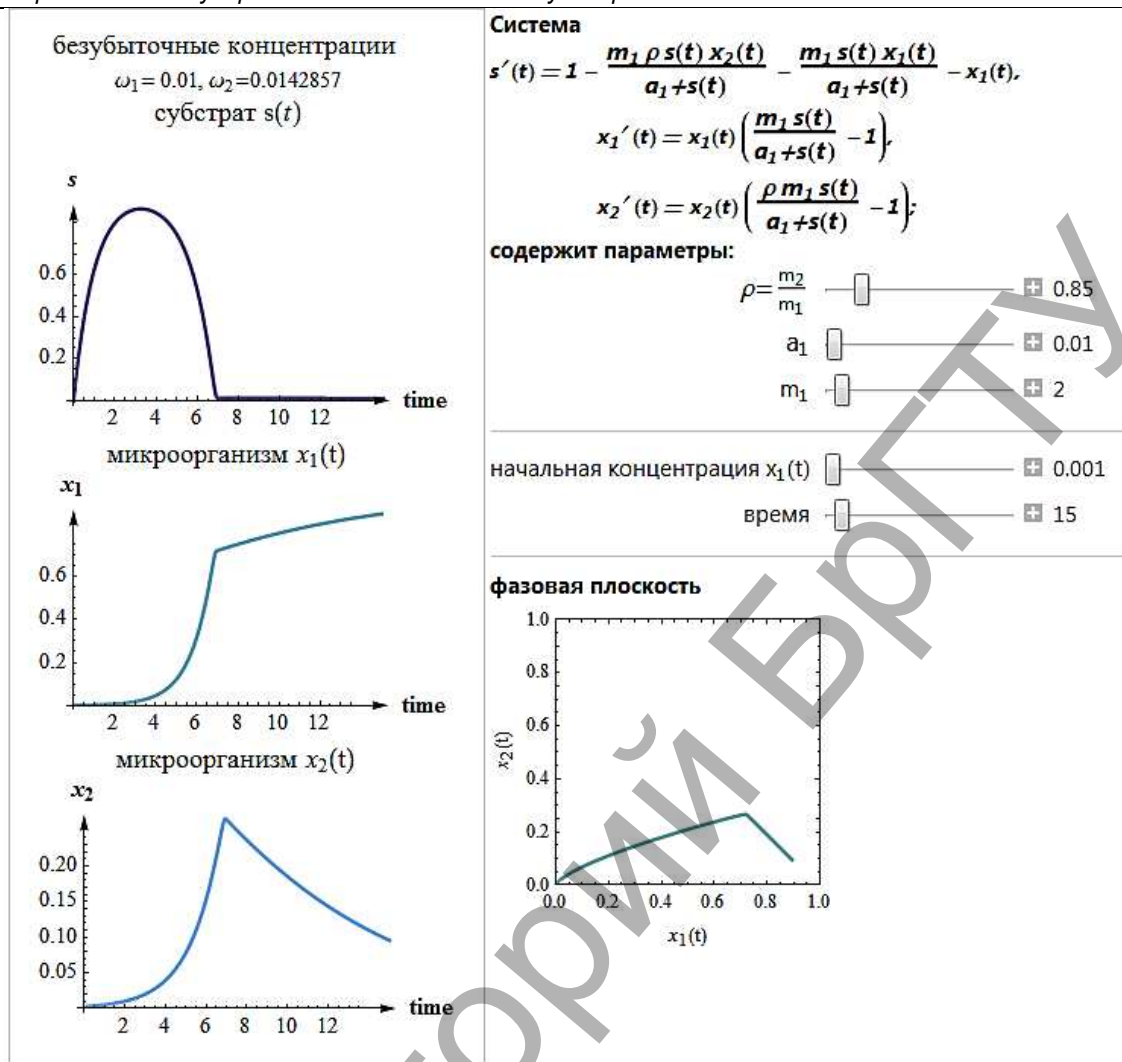


Рис. 3. Численное решение системы (4) при постоянной входной скорости подачи субстрата $f(t) \equiv 1$

8. Чичурин, А.В. Компьютерное исследование решений систем, описывающих модели хемостата / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // XI Белорусская математическая конференция : тез. докладов межд. науч. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Ч.3. – С. 54–55.
9. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / Ed. S. Wolfram. – Champaign, 2013. – Mode of access: www.wolfram.com – Date of access: 30.08.2013.
10. Trott, M. The *Mathematica* GuideBook for programming / M. Trott. – New York: SpringerVerlag, 2006. – 1028 p.
11. Wagon, S. *Mathematica in action: problem solving through visualization and computation* / S. Wagon. – 3rd ed. – New York: Springer, 2010. – 578 p.

Материал поступил в редакцию 10.02.14

SHICHURIN A.V., SHVYCHKINA A.N. Computer simulation of two models of the chemostat nutrient resource

Two dynamic models which are called the Michaelis-Menten chemostat for the case equals of the Michaelis-Menten constants are considered. Software in the form of modules that use numerical procedures and allow simulate and visualize the process of chemostat for different values parameters are build. We compare the some numerical methods, that are used for integration of the nonlinear differential equation of the first order.

УДК 534.29

Камлач П.В.

ПРИМЕНЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКА ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ ДИАГНОСТИКИ ПАРАМЕТРОВ ГЕМОСТАЗА

Введение. Исследование физических характеристик биологических жидкостей является актуальной задачей, имеющей как самостоятельное научное (т.к. организм создает уникальные по своим свойствам жидкости и структуры), так и прикладное значение в об-

ласти медицины и биологии. В настоящее время известен целый ряд физических методов, с помощью которых можно получать разнообразную информацию о биологических жидкостях, представляющих водные растворы и суспензии, содержащих малые молекулы (орга-

Камлач П.В., Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6.