УДК 519.213.2:004.02

Махнист Л.П., Каримова Т.И., Гладкий И.И., Рубанов В.С.

МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И НЕКОТОРЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Введение. Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. В то же время при решении практических задач возникает необходимость знать числовые параметры, которые позволяют представить основные особенности случайной величины в сжатой форме. К таким величинам относятся начальные и центральные моменты.

В настоящей работе рассматриваются связи между начальными, центральными и факториальными моментами случайных величин, способы вычисления одних моментов, используя другие, и вычисление моментов случайных величин, используя числа Стирлинга первого и второго рода.

О моментах случайных величин. *Моментом* n *-го порядка* ($n = 0,1,2,\ldots$) [1] случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left(\left(X - a\right)^n\right)$.

Начальным моментом n *-го порядка* ($n = 0,1,2,\ldots$) [1] случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$. Заметим, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом n *-го порядка* случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a = M\left(X\right)$) [1] называется $\mu_n = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^n\right)$.

Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D\left(X\right)$.

Факториальным моментом n *-го порядка* ($n = 0,1,2,\ldots$) [2] случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left(\left(X-a\right)\left(X-a-1\right)\ldots\left(X-a-n+1\right)\right)$.

Начальным факториальным моментом n *-го порядка* ($n = 0,1,2,\ldots$) [2] случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = M\left(X\left(X-1\right)\ldots\left(X - n + 1\right)\right)$. Заметим, что $\alpha_{[0]} = 1$, $\alpha_{[1]} = M(X)$.

Центральным факториальным моментом n *-го порядка* ($n = 0,1,2,\ldots$) [2] случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a = M\left(X\right)$) называется

$$\mu_{[n]} = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^{[n]}\right) = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(X - M\left(X\right) - 1\right)\ldots\left(X - M\left(X\right) - n + 1\right)\right).$$

Заметим, что $\mu_{[0]} = 1$, $\mu_{[1]} = 0$, $\mu_{[2]} = D\left(X\right)$.

Центральные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением

$$\mu_n = M\left(\left(X - M(X)\right)^n\right) = M\left(\left(X - \alpha_1\right)^n\right) =$$
$$= M\left(\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m X^{n-m}\alpha_1^m\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} M\left((-1)^m C_n^m X^{n-m}\alpha_1^m\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m \alpha_{n-m}\alpha_1^m.$$

Так, например,

$$\mu_2 = \sum_{m=0}^{2}(-1)^m C_2^m \alpha_{2-m}\alpha_1^m =$$
$$= C_2^0\alpha_2\alpha_1^0 - C_2^1\alpha_1\alpha_1^1 + C_2^2\alpha_0\alpha_1^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \sum_{m=0}^{3}(-1)^m C_3^m \alpha_{3-m}\alpha_1^m = C_3^0\alpha_3\alpha_1^0 -$$
$$-C_3^1\alpha_2\alpha_1^1 + C_3^2\alpha_1\alpha_1^2 - C_3^3\alpha_0\alpha_1^3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3.$$

Начальные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее центральными моментами соотношением

$$\alpha_n = M\left(X^n\right) = M\left(\left(X - M(X) + \alpha_1\right)^n\right) =$$
$$= M\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m\left(X - M(X)\right)^{n-m}\alpha_1^m\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} M\left(C_n^m\left(X - M(X)\right)^{n-m}\alpha_1^m\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m M\left(X - M(X)\right)^{n-m}\alpha_1^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m\mu_{n-m}\alpha_1^m.$$

Так, например,

$$\alpha_2 = \sum_{m=0}^{2} C_2^m\mu_{2-m}\alpha_1^m = C_2^0\mu_2\alpha_1^0 + C_2^1\mu_1\alpha_1^1 +$$
$$+C_2^2\mu_0\alpha_1^2 = \mu_2 + \alpha_1^2,$$
$$\alpha_3 = \sum_{m=0}^{3} C_3^m\mu_{3-m}\alpha_1^m = C_3^0\mu_3\alpha_1^0 + C_3^1\mu_2\alpha_1^1 +$$
$$+C_3^2\mu_1\alpha_1^2 + C_3^3\mu_0\alpha_1^3 = \mu_3 + 3\mu_2\alpha_1 + \alpha_1^3.$$

Для установления связи между факториальными моментами и моментами случайной величины рассмотрим следующие определения и соотношения.

Выражение

$$k^{[n]} = k\left(k-1\right)\ldots\left(k - n + 1\right) =$$
$$= S_n^{(n)}k^n + S_{n-1}^{(n)}k^{n-1} + \ldots + S_1^{(n)}k = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)}k^m$$

***Махнист Леонид Петрович**, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики Брестского государственного технического университета.*
***Каримова Татьяна Ивановна**, к.ф-м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
***Гладкий Иван Иванович**, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
***Рубанов Владимир Степанович**, к.ф-м.н., доцент, проректор по научной работе Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

называется *факториальным многочленом степени* n. Коэффициенты $S_i^{(n)}$ называются *числами Стирлинга первого рода* и могут быть получены с помощью рекуррентной формулы

$$S_i^{(n)} = S_{i-1}^{(n-1)} - (n-1)S_i^{(n-1)}.$$

Действительно, $k^{[1]} = S_1^{(1)}k$ и $S_1^{(1)} = 1$;

$k^{[2]} = k(k-1) = k^2 - k = S_2^{(2)}k^2 + S_1^{(2)}k$ и $S_2^{(2)} = 1$, $S_1^{(2)} = -1$; $k^{[3]} = k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k =$ $= S_3^{(3)}k^3 + S_2^{(3)}k^2 + S_1^{(3)}k$ и $S_3^{(3)} = 1$, $S_2^{(3)} = -3$, $S_1^{(3)} = 2$.

Докажем рекуррентную формулу для чисел Стирлинга первого рода.

$$k^{[n]} = k(k-1)\dots(k-n+2)(k-n+1) =$$

$$= k^{[n-1]}(k-n+1) = \sum_{m=1}^{n-1} S_m^{(n-1)}k^m\,(k-n+1) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} S_m^{(n-1)}k^{m+1} - (n-1)\sum_{m=1}^{n-1} S_m^{(n-1)}k^m.$$

В первой сумме полученной формулы введем замену $m+1 = m$, тогда формула примет вид:

$$\sum_{m=2}^{n} S_{m-1}^{(n-1)}k^m - (n-1)\sum_{m=1}^{n-1} S_m^{(n-1)}k^m =$$

$$= S_{n-1}^{(n-1)}k^n + \sum_{m=2}^{n-1} S_{m-1}^{(n-1)}k^m - (n-1)\sum_{m=2}^{n-1} S_m^{(n-1)}k^m -$$

$$-(n-1)S_1^{(n-1)}k^1 = S_{n-1}^{(n-1)}k^n +$$

$$+\sum_{m=2}^{n-1}\left(S_{m-1}^{(n-1)} - (n-1)S_m^{(n-1)}\right)k^m - (n-1)S_1^{(n-1)}k^1.$$

Т.к. $k^{[n]} = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)}k^m$, то имеют место формулы:

$S_n^{(n)} = S_{n-1}^{(n-1)}$, $S_m^{(n)} = S_m^{(n-1)} - (n-1)S_{m+1}^{(n-1)}$,

$S_1^{(n)} = -(n-1)S_1^{(n-1)}$.

Итак, получена следующая рекуррентная формула: $S_i^{(n)} = S_{i-1}^{(n-1)} - (n-1)S_i^{(n-1)}$, полагая $S_i^{(n)} = 0$, если $i < 1$ или $i > n$.

Так, например, если $n = 3$, то $S_i^{(3)} = S_{i-1}^{(2)} - 2S_i^{(2)}$ и:

$S_1^{(3)} = S_0^{(2)} - 2S_1^{(2)} = 0 - 2\cdot(-1) = 2$,

$S_2^{(3)} = S_1^{(2)} - 2S_2^{(2)} = -1 - 2\cdot 1 = -3$,

$S_3^{(3)} = S_2^{(2)} - 2S_3^{(2)} = 1 - 2\cdot 0 = 1$.

Следовательно, факториальный многочлен степени $n = 3$ равен

$$k^{[3]} = k(k-1)(k-2) = S_3^{(3)}k^3 + S_2^{(3)}k^2 + S_1^{(3)}k =$$

$$= k^3 - 3k^2 + 2k.$$

Некоторые значения $S_i^{(n)}$ внесем в таблицу 1.

Начальные факториальные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением

$$\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = M\left(X(X-1)\dots(X-n+1)\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} M\left(S_m^{(n)}X^m\right) = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)}\alpha_m,$$

где $S_i^{(n)}$ – числа Стирлинга первого рода.

Центральные факториальные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее центральными моментами соотношением, которое легко получить из соответствующего соотношения для начальных моментов, полагая $X = X - M(X)$

$$\mu_{[n]} = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)}\mu_m = S_1^{(n)}\mu_1 + \sum_{m=2}^{n} S_m^{(n)}\mu_m =$$

$$= \sum_{m=2}^{n} S_m^{(n)}\mu_m,$$

где $S_i^{(n)}$ – числа Стирлинга первого рода, так как $\mu_1 = 0$.

Так, например, $\mu_{[2]} = \mu_2$; $\mu_{[3]} = \mu_3 - 3\mu_2$; $\mu_{[4]} = \mu_4 - 6\mu_3 + 11\mu_2$.

Для установления связи между моментами и факториальными моментами случайной величины рассмотрим следующие соотношения.

Заметим, что имеет место соотношение

$$k^n = a_n^{(n)}k^{[n]} + a_{n-1}^{(n)}k^{[n-1]} + \dots + a_1^{(n)}k^{[1]} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} a_m^{(n)}k^{[m]} = \sum_{m=1}^{n} a_m^{(n)}\prod_{j=0}^{m-1}(k-j).$$

Коэффициенты $a_i^{(n)}$ называются *числами Стирлинга второго рода*.

Очевидно, что

$k^1 = a_1^{(1)}k^{[1]} = k$ и $a_1^{(1)} = 1$;

$k^2 = a_2^{(2)}k^{[2]} + a_1^{(2)}k^{[1]} = k(k-1) + k$ и $a_2^{(2)} = 1$, $a_1^{(2)} = 1$.

Докажем рекуррентную формулу для чисел $a_i^{(n)}$.

$$k^n = k\cdot k^{n-1} = k\sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(n-1)}k^{[m]} = \sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(n-1)}k^{[m]}(k-m+m) =$$

Таблица 1

n	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$	$S_5^{(n)}$	$S_6^{(n)}$	…
1	1						
2	–1	1					
3	2	–3	1				
4	–6	11	–6	1			
5	24	–50	35	–10	1		
6	–120	274	–225	85	–15	1	
…	…	…	…	…	…	…	…

$$= \sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(n-1)} k^{[m]}(k-m) + \sum_{m=1}^{n-1} m a_m^{(n-1)} k^{[m]} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(n-1)} k^{[m+1]} + \sum_{m=1}^{n-1} m a_m^{(n-1)} k^{[m]}.$$

В первой сумме полученной формулы введем замену $m+1=m$, тогда формула примет вид:

$$\sum_{m=2}^{n} a_{m-1}^{(n-1)} k^{[m]} + \sum_{m=1}^{n-1} m a_m^{(n-1)} k^{[m]} =$$

$$a_{n-1}^{(n-1)} k^{[n]} + \sum_{m=2}^{n-1} a_{m-1}^{(n-1)} k^{[m]} + \sum_{m=2}^{n-1} m a_m^{(n-1)} k^{[m]} + a_{12}^{(n-1)} k^{[1]} =$$

$$= a_{n-1}^{(n-1)} k^{[n]} + \sum_{m=2}^{n-1} \left(a_{m-1}^{(n-1)} + m a_m^{(n-1)} \right) k^{[m]} + a_1^{(n-1)} k^{[1]},$$

т.к. $k^n = \sum_{m=1}^{n} a_m^{(n)} k^{[m]}$, то справедливы формулы:

$$a_n^{(n)} = a_{n-1}^{(n-1)},\ a_m^{(n)} = a_{m-1}^{(n-1)} + m a_m^{(n-1)},\ a_1^{(n)} = a_1^{(n-1)}.$$

Таким образом, для чисел Стирлинга второго рода получена рекуррентная формула:

$$a_i^{(n)} = a_{i-1}^{(n-1)} + i a_i^{(n-1)},$$

полагая $a_i^{(n)} = 0$, если $i < 1$ или $i > n$.

Так, например, если $n = 3$, то $a_i^{(3)} = a_{i-1}^{(2)} + i a_i^{(2)}$ и

$a_1^{(3)} = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} = 0 + 1 = 1$;

$a_2^{(3)} = a_1^{(2)} + 2a_2^{(2)} = 1 + 2 = 3$;

$a_3^{(3)} = a_2^{(2)} + 3a_3^{(2)} = 1$.

Следовательно, имеет место соотношение:

$$k^3 = \sum_{m=1}^{3} a_m^{(3)} k^{[m]} = a_3^{(3)} k^{[3]} + a_2^{(3)} k^{[2]} + a_1^{(3)} k^{[1]} =$$

$$= k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k.$$

Некоторые значения $a_i^{(n)}$ внесем в таблицу 2.

Начальные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением

$$\alpha_n = M\left(X^n\right) =$$

$$= M\left(a_0^{(n)} X^{[n]} + a_1^{(n)} X^{[n-1]} + \ldots + a_{n-1}^{(n)} X^{[1]}\right) = \sum_{m=1}^{n} a_m^{(n)} \alpha_{[m]},$$

где коэффициенты $a_i^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода.

С учетом последней формулы, начальные моменты n-го порядка случайной величины X можно найти так:

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{T_m^{(n)}}{m!} \alpha_{[m]},$$

где коэффициенты $T_m^{(n)}$ – последовательность A019538 в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей). $T_m^{(n)}$ могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $T_m^{(n)} = m\left(T_{m-1}^{(n-1)} + T_m^{(n-1)}\right)$, полагая $T_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$.

Центральные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее центральными факториальными моментами соотношением

$$\mu_n = \sum_{m=1}^{n} a_m^{(n)} \mu_{[m]} = a_1^{(n)} \mu_{[1]} + \sum_{m=2}^{n} a_m^{(n)} \mu_{[m]} = \sum_{m=2}^{n} a_m^{(n)} \mu_{[m]},$$

где коэффициенты $a_i^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода.

Это соотношение легко получить из соответствующего соотношения для начальных моментов, полагая $X = X - M(X)$ и учитывая, что $\mu_{[1]} = 0$.

Так, например,

$$\mu_2 = \mu_{[2]},\ \mu_3 = \mu_{[3]} + 3\mu_{[2]},\ \mu_4 = \mu_{[4]} + 6\mu_{[3]} + 7\mu_{[2]}.$$

Заключение. В работе представлен общий подход к вычислению моментов распределений случайных величин. Полученные результаты могут быть использованы при вычислении моментов законов распределений.

Так, например, в [3] получены соответствующие формулы для вычисления начальных и центральных моментов биномиального, геометрического распределения и распределения Пуассона и установлена их взаимосвязь с некоторыми целочисленными последовательностями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1977. – 831 с.
3. Махнист, Л.П. О моментах некоторых дискретных распределений / Л.П. Махнист, Т.И. Каримова, В.С. Рубанов, И.И. Гладкий // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов региональной науч.-практ. конф., Брест, 22–23 октября 2013 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест: БрГУ, 2013. – С. 93–95.

Таблица 2

n	$a_1^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$a_3^{(n)}$	$a_4^{(n)}$	$a_5^{(n)}$	$a_6^{(n)}$	…
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
…	…	…	…	…	…	…	…

Материал поступил в редакцию 30.12.13

MAKHNIST L.P., KARIMOVA T.I., HLADKI I.I., RUBANOV V.S. Moments of probability distribution and some integer sequences

A common approach to calculating numerical characteristics of discrete random quantities is being examined. Formulae of connection of some numerical characteristics with others are offered and proven. Formulae allowing to calculate numerical characteristics of random quantities with the help of some integer sequences are proven.