

**Желткович А.Е., Махнист Л.П., Горбачевский В.М.,  
Винник Н.С., Лавринюк Е.Ю.**

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАДЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

**Введение.** В работе получены уравнения движения материальной точки в поле притяжения Земли, в зависимости от влияния на относительное движение точки углового вращения Земли. На основе решения систем из трех взаимозависимых линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков получены точные решения, описывающие изменение траектории и скорости точки.

Задача определения величины отклонения при падении от вертикальной прямой материальной точки находящейся в северном полушарии Земли, падающей с высоты 500 метров, когда точка находится на некоторой параллели, была сформулирована в [1]. Некоторые подходы к ее решению сформулированы в работе [2].

В [2] при решении задачи о свободном падении материальной точки пренебрегают двумя проекциями относительной скорости на оси  $Y$  и  $X$  (см. рис. 1) и влиянием, соответственно, на относительное движение точки в этих направлениях углового вращения Земли, что, на наш взгляд, достоверно отражает ситуацию, если изучать движение материальной точки при сбрасывании ее с нулевой начальной скоростью и с небольшой высоты  $h$ .

Когда же речь идет о падении точки с начальной скоростью отличной от нуля, принятое допущение не дает достаточную для практики точность.

$$\begin{cases} ma_x = P - \Phi_{(V_z^{отн})}^{кор} \cdot \cos(\varphi) - \Phi_{ц.б.}^{пер} \cdot \cos(\varphi), \\ ma_y = -\Phi_{(V_z^{отн})}^{кор} \cdot \sin(\varphi) - \Phi_{ц.б.}^{пер} \cdot \sin(\varphi), \\ ma_z = \Phi_{(V_x^{отн})}^{кор} + \Phi_{(V_y^{отн})}^{кор}. \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе рассматривается точное решение полученных дифференциальных уравнений, где  $m$  – масса точки;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\varphi$  – угол, обозначающий данную параллель северного полушария;  $a_x, a_y, a_z$  – проекции относительных ускорений на оси координат  $x, y, z$ ;  $\Phi_{(V_z^{отн})}^{кор}$  – Кориолиса сила инерции от скорости  $V_z^{отн}$  ( $V_z^{отн}$  – проекция относительной скорости на ось  $Z$ );  $\Phi_{(V_x^{отн})}^{кор}$  – Кориолиса сила инерции от скорости  $V_x^{отн}$  ( $V_x^{отн}$  – проекция относительной скорости на ось  $X$ );  $\Phi_{(V_y^{отн})}^{кор}$  – Кориолиса сила инерции от скорости  $V_y^{отн}$  ( $V_y^{отн}$  – проекция относительной скорости на ось  $Y$ );  $\Phi_{ц.б.}^{пер}$  – переносная центробежная сила;  $\Pi$  – плоскость, параллельная экваториальной.

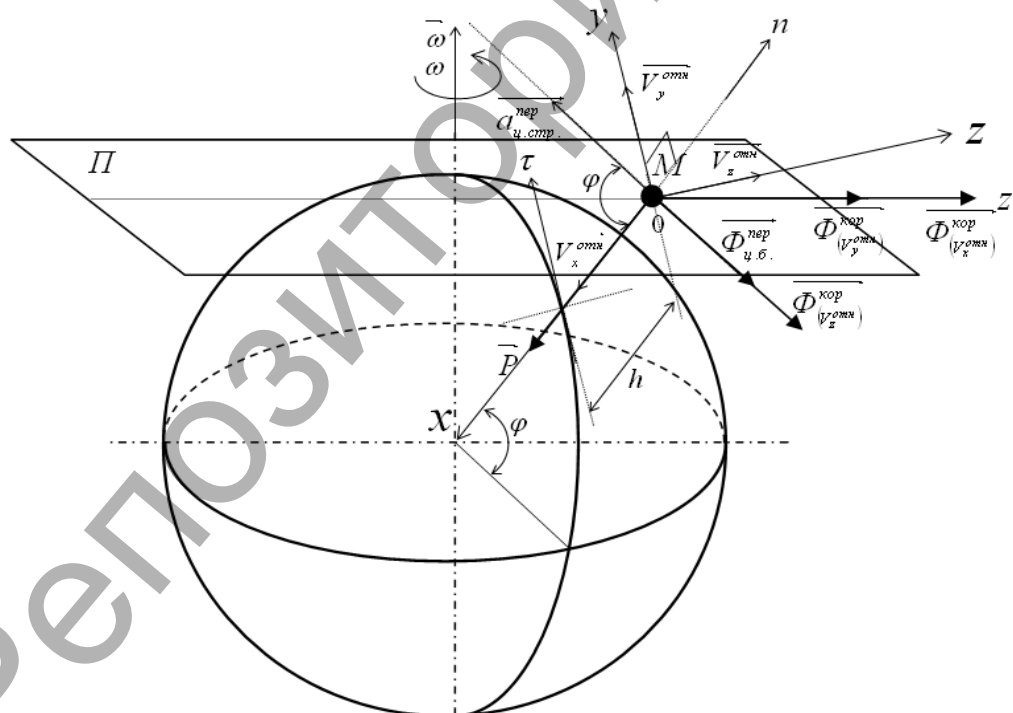


Рис. 1. Падение материальной точки  $M$  с высоты  $h$

**Желткович Андрей Евгеньевич**, к.т.н., старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

**Горбачевский Виталий Владимирович**, магистр технических наук, ассистент кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

**Винник Наталья Семеновна**, зав. кафедрой начертательной геометрии и инженерной графики Брестского государственного технического университета.

**Лавринюк Евгений Юрьевич**, студент машиностроительного факультета Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

**О решении системы дифференциальных уравнений.** Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} V'_x = \alpha_x V_x + \beta_x \\ V'_y = \alpha_y V_y + \beta_y \\ V'_z = \alpha_z V_x + \beta_z V_y \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями  $V_x(0) = v_x^0$ ,  $V_y(0) = v_y^0$ ,  $V_z(0) = v_z^0$ .

Продифференцируем по  $t$  третье уравнение системы:  $V''_z = \alpha_z V'_x + \beta_z V'_y$ .

Учитывая первое и второе уравнения системы, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$V''_z = \alpha_z V'_x + \beta_z V'_y = \alpha_z (\alpha_x V_x + \beta_x) + \beta_z (\alpha_y V_y + \beta_y) = (\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) V_z + \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$$

или уравнение  $V''_z - (\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) V_z = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$ .

Введем обозначения:  $p^2 = -(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)$ , так как  $\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z < 0$  и  $q = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$ .

Тогда получим уравнение  $V''_z + p^2 V_z = q$ . Найдем решение соответствующего однородного уравнения  $V''_z + p^2 V_z = 0$ .

Решая характеристическое уравнение  $\lambda^2 + p^2 = 0$ , получим  $\lambda = \pm i\sqrt{p}$ , где  $p = \sqrt{-(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)}$ .

Тогда  $V_z^0 = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt)$  – решение однородного уравнения второго порядка  $V''_z + p^2 V_z = 0$ .

Частное решение дифференциального уравнения  $V''_z + p^2 V_z = q$  будем отыскивать в виде  $V_z^1 = A$ , так как корни характеристического уравнения  $\lambda = \pm i\sqrt{p}$  отличны от 0.

Подставляя  $V_z^1 = A$ ,  $(V_z^1)'' = 0$  ( $(V_z^1)' = 0$ ) в уравнение  $V''_z + p^2 V_z = q$ , получим  $p^2 A = q$ .

Откуда  $A = \frac{q}{p^2}$ . Следовательно,  $V_z^1 = \frac{q}{p^2}$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами  $V''_z + p^2 V_z = q$ . Поэтому  $V_z = V_z^0 + V_z^1 = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2}$  – общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами  $V''_z + p^2 V_z = q$ .

Подставляя  $V_z = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2}$  в первое и второе уравнения системы (2), получим, что

$$V'_x = \alpha_x \left( c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \right) + \beta_x \text{ и}$$

$$V'_y = \alpha_y \left( c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \right) + \beta_y.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим, что

$$V_x = -\frac{\alpha_x c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_x c_2}{p} \sin(pt) + \left( \alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t + c_3 \text{ и}$$

$$V_y = -\frac{\alpha_y c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_y c_2}{p} \sin(pt) + \left( \alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t + c_4.$$

Учитывая третье уравнение системы, получим, что

$$\begin{aligned} V'_z = \alpha_z V_x + \beta_z V_y = \alpha_z \left( -\frac{\alpha_x c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_x c_2}{p} \sin(pt) + \left( \alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t + c_3 \right) + \beta_z \left( -\frac{\alpha_y c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_y c_2}{p} \sin(pt) + \left( \alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t + c_4 \right) = \\ = -(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) \cdot \frac{c_1}{p} \cos(pt) + (\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) \cdot \frac{c_2}{p} \sin(pt) + \left( (\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) \frac{q}{p^2} + \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z \right) t + \alpha_z c_3 + \beta_z c_4. \end{aligned}$$

Так как  $p^2 = -(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)$  и  $q = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$ , получим

$$V'_z = p^2 \cdot \frac{c_1}{p} \cos(pt) - p^2 \cdot \frac{c_2}{p} \sin(pt) + \left( -p^2 \cdot \frac{q}{p^2} + q \right) t + \alpha_z c_3 + \beta_z c_4 = c_1 p \cos(pt) - c_2 p \sin(pt) + \alpha_z c_3 + \beta_z c_4.$$

С другой стороны  $V'_z = c_1 p \cos(pt) - c_2 p \sin(pt)$ ,

так как  $V_z = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2}$ .

Тогда выполняется условие  $\alpha_z c_3 + \beta_z c_4 = 0$ . Откуда

$$c_4 = -\frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3, \text{ учитывая, что } \beta_z \neq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} V_x = -\frac{\alpha_x c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_x c_2}{p} \sin(pt) + \left( \alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t + c_3 \\ V_y = -\frac{\alpha_y c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_y c_2}{p} \sin(pt) + \left( \alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t - \frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3 \\ V_z = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \end{cases}$$

– общее решение системы линейных дифференциальных уравнений (2).

Учитывая начальные условия  $V_x(0) = v_x^0$ ,  $V_y(0) = v_y^0$ ,

$V_z(0) = v_z^0$ , получим

$$V_x(0) = -\frac{\alpha_x c_1}{p} + c_3 = v_x^0; \quad V_y(0) = -\frac{\alpha_y c_1}{p} - \frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3 = v_y^0;$$

$$V_z(0) = c_2 + \frac{q}{p^2} = v_z^0.$$

$$\text{Откуда } c_2 = v_z^0 - \frac{q}{p^2}. \text{ Тогда } \begin{cases} -\frac{\alpha_x c_1}{p} + c_3 = v_x^0 \\ -\frac{\alpha_y c_1}{p} - \frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3 = v_y^0 \end{cases}.$$

Откуда  $c_1 = \frac{\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0}{p}$ ,  $c_1 = \frac{\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0}{p}$ ,

$c_3 = -\beta_z \cdot \frac{\alpha_y v_x^0 - \alpha_x v_y^0}{p^2}$ .

Следовательно,

$$\begin{cases} V_x = -\frac{\alpha_x(\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0)}{p^2} \cos(pt) + \frac{\alpha_x}{p} \cdot \left(v_z^0 - \frac{q}{p^2}\right) \sin(pt) + \\ + \left(\alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x\right) t - \frac{\beta_z(\alpha_y v_x^0 - \alpha_x v_y^0)}{p^2}, \\ V_y = -\frac{\alpha_y(\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0)}{p^2} \cos(pt) + \frac{\alpha_y}{p} \cdot \left(v_z^0 - \frac{q}{p^2}\right) \sin(pt) + \\ + \left(\alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y\right) t + \frac{\alpha_z(\alpha_y v_x^0 - \alpha_x v_y^0)}{p^2}, \\ V_z = \frac{\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0}{p} \sin(pt) + \left(v_z^0 - \frac{q}{p^2}\right) \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \end{cases}$$

– решение системы линейных дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями  $V_x(0) = v_x^0$ ,  $V_y(0) = v_y^0$ ,  $V_z(0) = v_z^0$ , где  $p = \sqrt{-(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)}$  и  $q = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$ .

В частном случае, если  $V_x(0) = 0$ ,  $V_y(0) = 0$ ,  $V_z(0) = 0$ , получаем решение

$$\begin{cases} V_x = -\frac{\alpha_x q}{p^3} \sin(pt) + \left(\alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x\right) t \\ V_y = -\frac{\alpha_y q}{p^3} \sin(pt) + \left(\alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y\right) t \\ V_z = -\frac{q}{p^2} \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \end{cases}$$

Интегрируя уравнения системы, получим

$$\begin{cases} x(t) = \int V_x(t) dt = \frac{\alpha_x q}{p^4} \cos(pt) + \frac{\beta_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 + C_x \\ y(t) = \int V_y(t) dt = \frac{\alpha_y q}{p^4} \cos(pt) - \frac{\alpha_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 + C_y \\ z(t) = \int V_z(t) dt = -\frac{q}{p^3} \sin(pt) + \frac{q}{p^2} t + C_z \end{cases}$$

Учитывая начальные условия  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $z(0) = 0$ , получим

$$c_y = -\frac{\alpha_y q}{p^4}, c_x = -\frac{\alpha_x q}{p^4}, c_z = 0.$$

Таким образом, окончательно перемещения материальной точки запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\alpha_x q}{p^4} \cos(pt) + \frac{\beta_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 - \frac{\alpha_x q}{p^4} \\ y(t) = \frac{\alpha_y q}{p^4} \cos(pt) - \frac{\alpha_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 - \frac{\alpha_y q}{p^4} \\ z(t) = -\frac{q}{p^3} \sin(pt) + \frac{q}{p^2} t \end{cases}$$

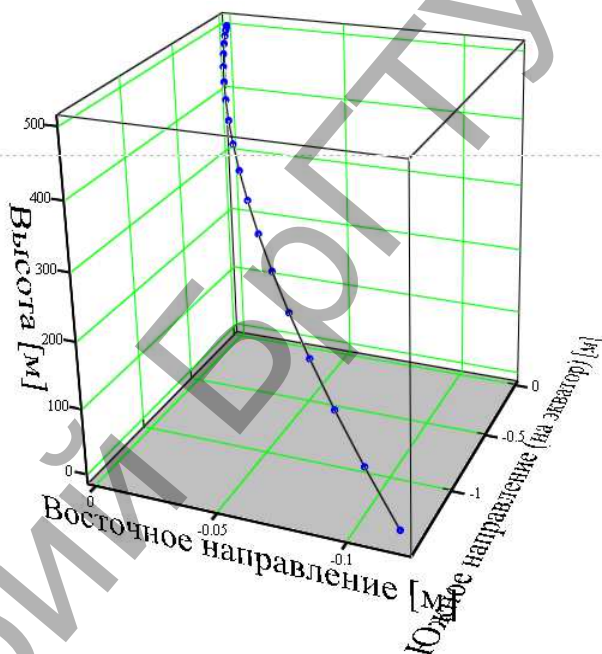


Рис. 2. Траектория падения материальной точки

Как видно из рисунка 2, при сбрасывании тела (имеющего массу во много раз меньше земной) с 500-метровой высоты (с нулевой начальной относительной скоростью) материальная точка будет отклоняться от прямолинейной «отвесной» траектории на юг (к экватору) на 1,5 м и на восток (по широте) на 12 см, за счет центробежной силы инерции (стремящейся отклонить точку к экватору) и силы инерции Кориолиса.

Данное решение может быть адаптировано и для любых других начальных условий. Например, если точно установлено, что на подлете траектории проникновение тела в атмосферу Земли произойдет под заданным углом атаки при известной начальной скорости.

**Заключение.** Область применения данного решения может быть распространена на решение прикладных задач, связанных с расчетом точной скорости, траектории и места падения сводимых с орбиты космических объектов, отработавших свой срок (спутники различного назначения, мусор, оставшийся от пилотируемых станций, ступени разгонных блоков ракет), представляющих в настоящий момент серьезную проблему для орбитальной навигации, не только существующих автоматических спутников, международной космической станции, но и других планируемых и осуществляемых миссий.

**СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. 49-е изд., стер. / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 448.: ил.
2. Теоретическая механика. Динамика. Практикум: учеб. пособие: в 2 ч. / В.А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А.В. Чигарева и доц. Н.И. Горбача. – Минск: Новое знание. – М.: ЦУПЛ. – Ч. 1. Динамика материальной точки. – 2010. – 528 с.: ил.

Материал поступил в редакцию 30.12.13

This work provides the obtained equations of the motion of a material point in the gravitational field of the Earth depending on the influence on the relative motion of a point of the angular rotation of the Earth.

Exact solutions describing the change of the path and the speed of a particle were obtained based on the solution of the systems of three interdependent linear nonhomogeneous second- and third-order differential equations.

The field of use of the given solution can be extended to solving applied problems related to the calculation of the accurate speed, path and place of fall of the deorbited extraterrestrial objects which have completed their service life.

УДК 004.5;621.38

Бутов А.А.

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ БУЛЕВОЙ ФОРМУЛЫ МНОГУГОЛЬНИКА В ДИЗЬЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

**Введение.** Для описания геометрических объектов (например, в системах автоматизированного проектирования топологии интегральных схем [1, 2]) обычно используются методы аналитической геометрии, векторной алгебры, теории матриц [1–5].

Альтернативные способы описания, появившиеся в последнее время, основаны на использовании булевых формул в скобочной [6] и в дизьюнктивной нормальной [7–9] формах. В частности, метод, предлагаемый в работе [9], хотя и удобен с точки зрения практической реализации, однако имеет недостаток, связанный с существованием класса задач, для которых решение находится лишь приближенно. Усовершенствованный метод, описываемый в данной работе, всегда позволяет находить точное решение. Это означает, что для любой задачи элементы решения, интерпретируемые как выпуклые компоненты, будут покрывать в совокупности всю область плоскости, занимаемую многоугольником.

### 1 Основные определения, постановка задачи

Многоугольник на плоскости задается своей границей – замкнутой не пересекающейся ломаной линией, состоящей из отрезков прямых или сторон многоугольника. Эту границу можно определить последовательностью угловых точек или вершин многоугольника  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , получаемых при последовательном обходе его вдоль границы (рис. 1, где  $n = 11$ ).

Так как каждая пара соседних угловых точек ограничивает соответствующую сторону многоугольника, то его границу можно задать также последовательностью сторон многоугольника:  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , где  $s_1 = (p_1, p_2), s_2 = (p_2, p_3), \dots, s_n = (p_n, p_1)$ .

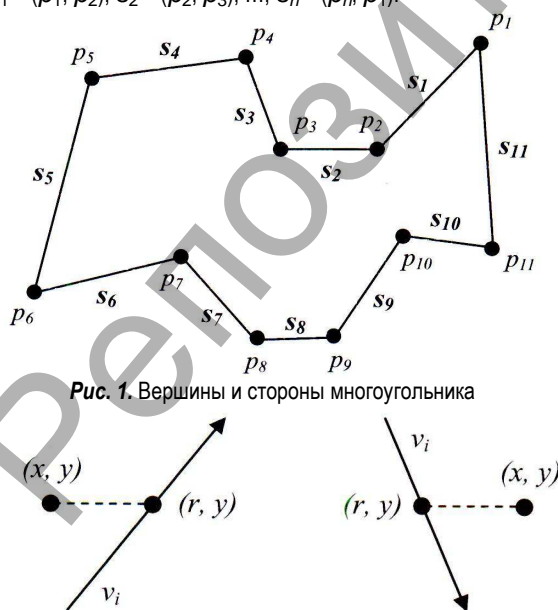


Рис. 1. Вершины и стороны многоугольника

Рис. 2. Варианты левостороннего расположения точки относительно ориентированной прямой

Вершина  $p_1$ , которая служит начальной угловой точкой для последовательного обозначения отрезков, образующих границу многоугольника, называется *начальной*. В качестве начальной будем выбирать вершину, наиболее удаленную от начала координат.

Каждой стороне  $s_i$  многоугольника поставим в соответствие ориентированную прямую  $v_i$ , содержащую точки  $p_i$  и  $p_{i+1}$ . Будем считать, что она ориентирована от  $p_i$  к  $p_{i+1}$ .

Рассмотрим некоторую произвольную точку плоскости  $p$ , заданную парой декартовых координат  $(x, y)$ . Будем считать, что точка  $p$  расположена *слева от прямой*  $v_i$ , если она принадлежит полуплоскости, расположенной слева от ориентированной прямой  $v_i$  или лежит на прямой  $v_i$ . Все возможные варианты левостороннего расположения точки  $p$  относительно ориентированной прямой  $v_i$  представлены на рисунке 2 (последние два варианта соответствуют случаю, когда прямая  $v_i$  параллельна координатной оси  $X$ ).

Как и в работе [6], будем обозначать отрезки ломаной буквами  $a, b, c, \dots$ , границу многоугольника как  $abc\dots$ , а полуплоскости, расположенные слева от соответствующих ориентированных прямых, – буквами  $A, B, C, \dots$  (считая, что каждая из этих полуплоскостей включает в себя еще и все точки порождающей ее ориентированной прямой). Введем также предикаты  $a, b, c, \dots$  для описания положения некоторой точки  $p$  на плоскости, полагая, что  $a(p) = 1$ , если и только если  $p \in A$ .

Основываясь на таких предикатных переменных, в работе [6] описан метод построения скобочной булевой формулы  $F$ , представляющей многоугольник и обладающей следующим свойством: если выполнить подстановку предикатных координат произвольной точки плоскости, то формула  $F$  примет значение 1 в случае, когда точка принадлежит данному многоугольнику, и значение 0 – в противном случае.

Аналогичная задача решается и в работах [7–9], однако булева формула  $F$  там строится в дизьюнктивной нормальной форме (ДНФ).

Целью настоящей работы является доработка метода нахождения булевой формулы многоугольника в ДНФ, изложенного в работе [9]. Усовершенствованный метод позволяет устранить недостаток, связанный с невозможностью всегда находить точное решение рассматриваемой задачи.

**2. Выпуклые и вогнутые углы многоугольника.** Рассмотрим пару соседних сторон, задающую некоторый угол многоугольника.