СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Швычкина, Е. Н. Использование СКА Mathematica при математической подготовке студентов в техническом университете / Е. Н. Швычкина// Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. ст. / Брест, гос. ун-т им. А. С. Пушкина. − Брест : БрГУ, 2015. – С. 110−113.

2. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2013. − Mode of access: http: // www/wolfram.com. − Date of access: 01.02.2014.

3. Mode of access: http: // www.demonstrations.wolfram.com/RearrangingThe AlternatingHarmonicSeries/.

**М.М. Юхимук**
Беларусь, Брест, БрГТУ

## ОБ ИСЧЕЗАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ В БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В краевых задачах теории аналитических функций часто требуется найти решение в классе функций, исчезающих на бесконечности. Мероморфную функцию $f(z)$ такого типа легко построить в виде $f(z)=r(z)\cdot\varphi(z)$, где $r(z)$ – правильная рациональная функция, а $\varphi(z)$ – мероморфная функция, ограниченная вне окрестностей своих полюсов (методы построения таких функций, полученных вариацией полюсов эллиптических функций, описаны в [1]). Рассмотрим способ построения ограниченной мероморфной функции, имеющей полюсы только первого порядка. Пусть члены последовательности $\left(A_j\right)_{j=1}^{\infty}\subset\mathbf{C}$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|A_j|=A<+\infty$, а последовательность $\left(\gamma_j\right)_{j=1}^{\infty}\subset\mathbf{C}$ такова, что $\inf\limits_{\substack{j,k\in\mathbf{N}\\ j\neq k}}\left|\gamma_j-\gamma_k\right|=d>0$. Рассмотрим функцию $\varphi(z)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{A_j}{z-\gamma_j}$. Пусть $\delta<\dfrac{d}{2}$ – произвольное положительное число. Тогда $\forall z\in\bigcap\limits_{j\in\mathbf{N}}\left\{z\in\mathbf{C}\,\middle|\,|z-\gamma_j|\geq\delta\right\}$ получим $|\varphi(z)|\leq\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{|A_j|}{|z-\gamma_j|}\leq\dfrac{1}{\delta}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|A_j|=\dfrac{A}{\delta}$. Таким образом, функция $\varphi(z)$ ограничена вне $\delta-$окрестностей своих полюсов, а функция $f(z)=r(z)\cdot\varphi(z)$, где $r(z)$ – произвольная правильная рациональная функция, будет стремиться к нулю при $z\to\infty$ вне окрестности полюсов функций $r(z)$ и $\varphi(z)$.

Построим теперь пример задачи о скачке в бесконечно связной области с исчезающим на бесконечности решением. Рассмотрим семейство контуров $L_k:|z-2k|=r\ (k\in\mathbf{N},\ r<1)$. Введем обозначия: $D_k^+=\left\{z\in\mathbf{C}\,\middle|\,|z-2k|<r\right\}$, $D^+=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}}D_k^+$, $D^-=\mathbf{C}\setminus\overline{D^+}$. Поставим задачу нахождения кусочно-аналитической в бесконечно связной области $D^-\cup D^+$ функции $\Phi(z)$, предельные значения которой непрерывны вплоть до кривых $L_k$ и удовлетворяют на них краевым условиям

$\Phi_k^+(t)-\Phi^-(t)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2t(t-j)}$, $t\in L_k$ $\left(k\in\mathbf{N}\right)$. Следуя [2], на каждом из контуров $L_k$ представим правую часть задачи в виде $f_k(t)=g_k(t)+r_k(t)+\tilde{f}_k(t)$, где $g_k(z)$ – целая функция, $r_k(z)$ – рациональная функция, все полюсы которой лежат в области $D_k^+$, а $\tilde{f}_k(z)$ – мероморфная функция, все полюсы которой лежат в области $\mathbf{C}\setminus\overline{D_k^+}$. Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2t(t-j)}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^3(t-j)}-\dfrac{1}{t}\zeta_3$, где $\zeta_3=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^3}$, то при $t\in L_k$ получим:

$$f_k(t)=\underbrace{0}_{g_k(t)}+\underbrace{\left\{\frac{1}{(2k)^3(t-2k)}\right\}}_{r_k(t)}+\underbrace{\left\{\sum_{j\in\mathbf{N}\setminus\{2k\}}\frac{1}{j^2(t-j)}-\frac{1}{t}\zeta_3\right\}}_{\tilde{f}_k(t)}.$$

В [2] доказано, что задача о скачке имеет бесконечное число решений вида

$$\Phi(z)=\begin{cases}h(z)-\sum\limits_{l=1}^{\infty}\left\{r_l(z)-Q_l(z)\right\}, & z\in D^-;\\ h(z)+\left\{g_k(z)+Q_k(z)\right\}+\tilde{f}_k(z)-\sum\limits_{l\in\mathbf{N}\setminus\{k\}}\left\{r_l(z)-Q_l(z)\right\}, & z\in D_k^+,\end{cases}$$

где $h(z)$ – произвольная целая функция, а $Q_k(z)$ $\left(k\in\mathbf{N}\right)$ – некоторые многочлены, обеспечивающие сходимость соответствующих рядов. Поскольку мы ищем исчезающие на бесконечности решения, то положим $h(z)\equiv 0$.

$$\forall\delta>0\ \ \forall z\in\bigcap_{l\in\mathbf{N}}\left\{z\in\mathbf{C}\,\middle|\,|z-2l|\ge\delta\right\}\ \left(\sum_{l=1}^{\infty}|r_l(z)|=\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(2l)^3(z-2l)}\right|\le\frac{1}{8\delta}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^3}=\frac{\zeta_3}{8\delta}\right),$$

поэтому «корректирующие» многочлены $Q_l(z)\equiv 0$ $\left(l\in\mathbf{N}\right)$. Таким образом, мероморфное решение имеет вид: $\Phi(z)=\begin{cases}-\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2l)^3(z-2l)}, & z\in D^-;\\ \sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2l-1)^3(z-2l)}-\dfrac{1}{z}\zeta_3, & z\in D^+.\end{cases}$

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2z(z-j)}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2(z-j)}$, а ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2}$ сходится, то, по доказанному выше, $\Phi(z)\to 0$ при $z\in D^-\cup D^+$, $z\to\infty$.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юхимук, М. М. О вариациях полюсов эллиптических функций / М. М. Юхимук // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальнаятэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2010. – № 2 (96). – С. 4–9.

2. Юхимук, М. М. Задача о скачке для бесконечно связных областей / М. М. Юхимук, Т. Ю. Юхимук // Вестн. Брест. гос. тех. ун-та. Сер. «Физика, математика, информатика».–2013. – № 5. – С. 50–53.