

( )

**Введение.** При прогнозировании свойств напрягающего бетона преобладающей характеристикой будет являться величина самонапряжения [1–5]. В данных исследованиях для определения величины самонапряжения использована трехкомпонентная пространственная модель композита, состоящая из заполнителя, цементной матрицы, и расположенной между ними транзитной зоны.

**Основные положения модели.** При построении модели в данной работе приняты следующие предпосылки:

- расширяющийся композит можно условно представить в виде континуума активной матрицы, в теле которой дискретно расположен пассивный заполнитель;
- рассматриваемая моделируемая система расширяется равномерно по объему без нарушения сплошности контактов.

При прогнозировании процесса расширения для упрощения расчетов в модели был использован ряд допущений, не искажающих физический смысл рассматриваемого явления:

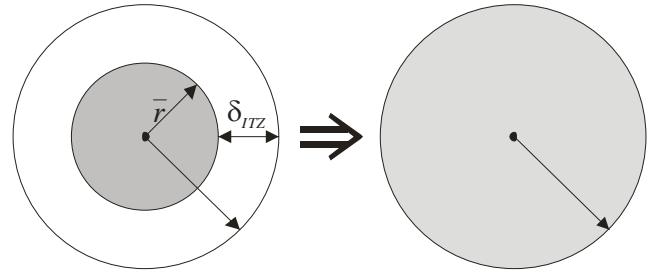
- моделируемая система содержит равномерно распределенные по объему матрицы равновеликие шарообразные зерна заполнителя;
- в процессе расчета в качестве пассивной компоненты рассмотрен заполнитель с транзитной зоной вокруг него, для которого согласно основным положениям, рассчитывают некоторые усредненные деформативные характеристики.

**Жесткостные характеристики элементов модели и их изменение во времени.** В силу специфики структурообразования расширяющегося композита, транзитную зону в дальнейшем рассматриваем как неактивную компоненту, вынужденными деформациями которой с целью упрощения расчетов можно пренебречь. В расчетной модели в качестве заполнителя рассматривается некоторый идеализированный сферический заполнитель с размером зерна, равным размеру зерна заполнителя с транзитной зоной вокруг него, и с усредненными, так называемыми эффективными, упругими характеристиками (см. рис. 1). Для определения эффективных деформативных характеристик идеализированного моноразмерного заполнителя использованы положения Дифференциальной Теории Эффективной Среды (англ. *Differential Effective Medium Theory*, в дальнейшем D–EMT) [6, 7].

В соответствии с правилами, сформулированными в D–EMT, частица заполнителя с размером  $\bar{r}$  и деформативными характеристиками  $G_{agg}$ ,  $K_{agg}$ , помещенная в транзитную зону размером  $\bar{r} + \delta_{ITZ}$  с деформативными характеристиками  $G_{itz}$ ,  $K_{itz}$ , заменяется новой эффективной частицей с размером  $a = \bar{r} + \delta_{itz}$  и соответствующими деформативными характеристиками  $G_{id}$ ,  $K_{id}$ .

Для пространственной модели эффективный модуль сдвига  $G_{id}$  композитного включения с учетом транзитной зоны находят из решения соответствующего квадратного уравнения:

$$A \left( \frac{G_{id}}{G_{itz}} \right)^2 + 2B \left( \frac{G_{id}}{G_{itz}} \right) + C = 0, \quad (1)$$



**Рис. 1.** Трансформация композитного включения в эффективную частицу с размером  $a$  в соответствии с правилами D–EMT

Эффективный объемный модуль  $K_{id}$  для данного «приведенного» заполнителя с учетом свойств транзитной зоны может быть рассчитан по следующей зависимости:

$$K_{id} = K_{itz} + \frac{p(K_{agg} - K_{itz})}{1 + (1-p) \left[ \frac{K_{agg} - K_{itz}}{K_{itz} + \frac{4}{3}G_{itz}} \right]}. \quad (2)$$

Пользуясь зависимостями (1) и (2), рассчитывают характеристики бетона к некоторому фиксированному моменту времени  $\tau$  (как правило, к возрасту 28 сут.). Однако процессы структурообразования в расширяющемся композите развиваются во времени, в течение которого в бетоне возникают как силовые, так и не силовые воздействия, приводящие к изменению деформаций системы.

При прогнозировании рассматривается процесс расширения во времени, поэтому следующим допущением является вид функции  $E(\tau)$ . Для решения данной проблемы в настоящих исследованиях использована функция, применяемая для описания упрочняющегося во времени материала:

$$E(\tau) = \beta(\tau) [1 - \delta(\tau)] \bar{E}, \quad (3)$$

где  $\bar{E}$  – модуль упругости материала, установленный без учета эффектов старения при  $\beta = 1$  и  $\delta = 0$ ;

$\beta(\tau)$  – степень упрочнения материала;

$\delta(\tau)$  – степень старения материала. Параметры  $\beta$  и  $\delta$  варьируются в пределах от 0 до 1 и монотонно возрастают с течением времени.

В работах Laube для описания процессов упрочнения бетонного композита предложена функция  $\beta(\alpha)$ , описывающая процесс упрочнения материала в зависимости от степени гидратации  $\alpha(\tau)$ :

$$\beta(\alpha) = \left[ \frac{\alpha(\tau) - \alpha_0}{1 - \alpha_0} \right]^{2/3} \geq 0. \quad (4)$$

**Напряжения и деформации расширяющейся композитной системы.** Для начала рассмотрим наиболее простой, с точки зрения реализации решения, случай одиночного включения, располагаемого в активной матрице цементного камня. В работе [7] указывается

граничная концентрация заполнителя  $c_{agg}=0,05$ , при которой не наблюдается эффекта влияния соседних частиц. Для случая изолированного сферического включения, окруженного оболочкой произвольной толщины, погруженного в однородную матрицу (все три фазы имеют некоторые произвольные, условные модули и деформации расширения) получены аналитические решения, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние деформирующейся системы. В реальной структуре бетона близкое расположение частиц заполнителя будет играть важную роль, однако на начальном этапе расчета и для случая изолированного заполнителя будут сохраняться все закономерности формирования напряжений и перемещений, свойственных композиту. В данном случае в моделируемой системе рассматриваются только перемещения и напряжения, вызываемые расширением активной матрицы.

Для единичного сферического включения, помещенного в бесконечную активную матрицу, при определении напряженно-деформированного состояния композита использованы стандартные решения осесимметричной задачи с привлечением функции напряжений Airy. В сферических полярных координатах радиальная компонента перемещения, обозначенная  $u$ , будет являться функцией от радиуса  $r$ . Тогда три диагональные составляющие тензора деформаций (деформации сдвига равны 0) будут соответственно равны:  $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u}{r}$ , где  $\theta$  и  $\phi$  – углы в сферических полярных координатах.

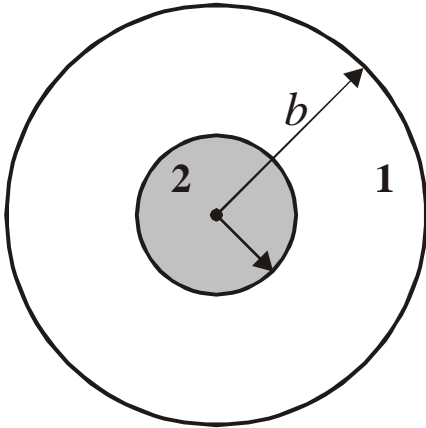


Рис. 2. Схематическое представление анализируемой системы: (1) – активная матрица,  $a < r < b$ , (2) – заполнитель,  $0 < r < a$ , где  $r$  – радиальная координата

В  $i$ -ой фазе две независимые составляющие (при  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$ ) тензора деформаций могут быть соответственно записаны:

$$\sigma_{rr} = \left( K_i + \frac{4}{3} G_i \right) \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \left( K_i - \frac{2}{3} G_i \right) \frac{u}{r} - 3 K_i \varepsilon_i^0, \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \left( K_i - \frac{2}{3} G_i \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left( 2 K_i + \frac{2}{3} G_i \right) \frac{u}{r} - 3 K_i \varepsilon_i^0, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_i^0$  – свободные деформации расширения  $i$ -ой фазы.

Для решения дифференциальных уравнений (5), (6) воспользуемся решением Лямэ: для  $i$ -ой фазы общее решение для радиальной компоненты вектора перемещений ( $u$ ) будет иметь вид  $u(r) = \alpha_i r + \frac{\beta_i}{r^2}$ , где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  – некоторые неизвестные коэффициенты, различные для каждой фазы, определяемые из соответствующих граничных условий. Тогда с учетом принятой функции перемещений, и учитывая, что для заполнителя  $\beta = 0$ , уравнения (5) и (6) примут вид:

$$\sigma_{rr} = 3 K_i \alpha_i - 4 G_i \frac{\beta_i}{r^3} - 3 K_i \varepsilon_i^0, \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 3 K_i \alpha_i + 2 G_i \frac{\beta_i}{r^3} - 3 K_i \varepsilon_i^0, \quad (8)$$

Для нахождения оставшихся неизвестных коэффициентов в уравнениях (7), (8) могут быть использованы:

- условия неразрывности перемещений и напряжений на границе раздела «заполнитель – матрица» при  $r = a$ ;
- условие равенства нулю напряжений в радиальном направлении при  $r = b$ .

С учетом принятых граничных условий может быть записана следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_m + \frac{\beta_m}{a^3} - \alpha_{id} = 0 \\ K_m \alpha_m - \frac{4}{3} G_m \frac{\beta_m}{a^3} - K_{id} \alpha_{id} - K_m \varepsilon_m^0 = 0 \\ K_m \alpha_m - \frac{4}{3} G_m \frac{\beta_m}{b^3} - K_m \varepsilon_m^0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Относительные деформации расширения, развивающиеся в композитной системе, в общем случае будут равны:

$$\varepsilon_{0,CE} = \frac{u(r=b)}{b} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{0,CE} = \alpha_m + \frac{\beta_m}{b^3}, \quad (10)$$

где  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  – коэффициенты, определяемые из решения системы (9).

Получив решение для одиночного включения в соответствии с основными положениями D–EMT, выполняем замену существующей системы, состоящей из одиночного включения и активной матрицы (система «первого уровня»), некоторой идеализированной однородной средой, имеющей в процессе расширения относительные деформации  $\varepsilon_0$  и жесткостные характеристики:

$$K_0 = K_m + K_m k(K_{id}, K_m, G_m) c + O(c^2), \quad (11)$$

$$G_0 = G_m + G_m g(G_{id}, K_m, G_m) c + O(c^2), \quad (12)$$

где  $k$  и  $g$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от формы моделируемых частиц и соотношения  $K_m/K_{id}$  и  $G_m/G_{id}$ .

В соответствии с положениями D–EMT для данной однородной системы часть объема ( $c=0,05$ ) заменяем заполнителем и в свою очередь находим  $K_j$  и  $G_j$ , воспользовавшись соответствующими уравнениями. Затем, подставив в систему уравнений (9) соответствующие значения  $K_m, G_m$  и  $\varepsilon_m^0 = \varepsilon_0$ , найдем относительную

деформацию расширения  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ , причём  $\sum_{j=1}^n c = c_{agg}$ )

(«второй уровень»). Так, путем последовательной замены, переходя от уровня к уровню, для реальной концентрации заполнителя  $c_{agg}$  определяют текущие значения жесткостных характеристик  $K, G$  и относительную деформацию расширения  $\varepsilon$  композитной системы в момент времени  $t$ . Полученная деформация  $\varepsilon$  соответствует деформации «свободного» расширения композита  $\varepsilon_{CE}$ .

Для расчета прогнозируемой величины самонапряжения в условиях стандартного ограничения идеализированный однородный массив с установленными жесткостными характеристиками и деформацией расширения  $\varepsilon$  помещают в стальную оболочку с жесткостью, эквивалентной жесткости упругого ограничения при коэффициенте армирования  $\rho_j$ . Для модели «расширяющееся ядро в упругой оболочке», воспользовавшись уравнениями (7) и (8), была определена относительная деформация расширения бетона  $\varepsilon$  в условиях внешнего упругого ограничения. Для случая одноосного

ограничения относительные связанные деформации можно определить по следующей зависимости:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{1 + 3 \cdot \rho_l \cdot \frac{K_s}{K_c(\tau)}} \cdot \varepsilon(\tau), \quad (13)$$

где  $\varepsilon_c$  – объемный модуль бетона;  
 $\varepsilon_s$  – объемный модуль стали;

$\varepsilon_{TOT}$  – деформация «свободного» расширения бетона.

Тогда величина самонапряжения для рассматриваемой модели определяется по традиционной формуле:

$$\sigma_{CE} = \varepsilon_c \rho_l E_s. \quad (14)$$

Отношение прогнозируемой величины самонапряжения к марке по самонапряжению в стандартных условиях ограничения будет равно:

$$\frac{\sigma_{CE}}{f_{CE,d}} = \frac{1 + 0,03 \cdot \left(\frac{K_s}{K_c}\right)}{1 + 3 \cdot \rho_l \cdot \left(\frac{K_s}{K_c}\right)} \cdot \rho_l \cdot 10^2. \quad (15)$$

Для сравнения положений модели были использованы опытные данные В.А. Марчука [8].

Сравнение опытных данных с данными, получаемыми в результате расчетов по зависимости (15) и зависимости, предложенной В.В. Михайловым [3] для случая плоского ограничения (см. ф. 16), представлено на рис. 3.

$$\sigma_{CE} = f_{CT,d} \cdot \rho_l^\alpha \quad (16)$$

где  $\alpha$  – эмпирический коэффициент, определяемый по формуле:

$$\alpha = 0,702 - 0,00278 f_{CE,d}. \quad (17)$$

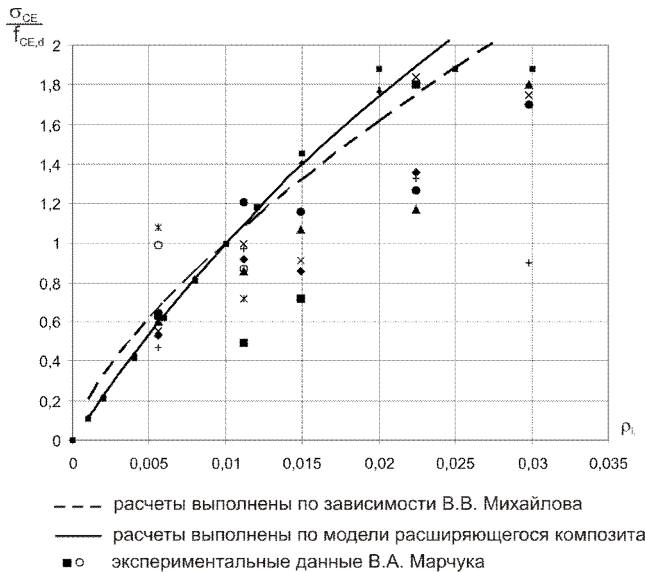


Рис. 3. Сравнение опытных данных с прогнозируемыми

Как видно из представленных графических интерпретаций зависимостей, не взирая на достаточно обширный разброс экспериментальных данных, обе теоретических зависимости достаточно адекватно описывают влияние изменения процента армирования на величину самонапряжения в условиях плоского ограничения деформаций.

**Заключение.** Следует отметить, что обе зависимости, не взирая на то, что получены абсолютно различными путями: зависимость В.В. Михайлова базируется на обработке экспериментальных данных, в то время как зависимость (15) базируется на теоретических подходах и является итогом достаточно сложной расчетной процедуры, – представляют собой семейство аналогичных кривых. В таком случае возникает закономерный вопрос: какая зависимость имеет преимущество при расчетах? Стоит ли прибегать к громоздким расчетам или достаточно воспользоваться эмпирической зависимостью?

Необходимо четко представлять, что любая эмпирическая зависимость является корректной только при определенных условиях и для достаточно узкого диапазона рассматриваемых бетонов. Поэтому к числу несомненных преимуществ модели расширяющегося бетонного композита следует отнести ее универсальность. Данная модель дает возможность рассчитать итоговые деформации и напряжения для различных условий ограничения (модель позволяет получать адекватные характеристики расширения как в условиях одноосного ограничения [6], так для плоского и объемного ограничений). В то время как зависимости, предложенные В.В. Михайловым и соавторами, базируются на обработке данных, полученных при заданных условиях ограничения, и поэтому применимы только для определенных условий ограничения. Кроме того, модель РБК более гибко реагирует на изменение входных параметров и позволяет оценить влияние структуры композита на итоговые связанные деформации.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Красильников, К.Г. Природа объемных деформаций при твердении расширяющихся цементов / К.Г. Красильников, Л.В. Никитина // Физико-химические исследования цементного камня и бетона: сб. тр. / Под ред. А.Е. Десова – Москва: Стройиздат, 1972. – С. 4–20.
2. Литвер, С.Л. Самонапряженный железобетон и его применение в строительстве // Опыт и перспективы применения бетонов на напрягающем цементе в строительстве: Материалы науч.-техн. совещ. / Центр. Росс. Дом знаний. – М., 1992. – С. 12–17.
3. Михайлов, В.В. Расширяющие и напрягающие цементы и самонапряженные конструкции / В.В. Михайлов, С.Л. Литвер – М.: Стройиздат, 1974. – 389 с.
4. Панченко, А.И. Критерии оценки расширяющихся вяжущих и бетонов на их основе / А.И. Панченко, Г.В. Несветаев // Проблемы технологии производства строительных материалов, изделий и конструкций, строительства зданий и сооружений: сб. тр. / Под ред. Н.П. Блещика и В.В. Тура – Брест: БПИ, 1998. – С. 179–190.
5. Тур, В.В. Экспериментально-теоретические основы предварительного напряжения конструкций при применении напрягающего бетона. – Брест: Изд. БПИ, 1998. – 243 с.
6. Павлова, И.П. Приложение теории эффективной среды к моделированию жесткостных характеристик бетонного композита / И.П. Павлова, В.В. Тур // Строительная наука и техника – Минск, 2005. – № 3. – С. 3–8.
7. Garboczi E. J., Berryman J. G. Elastic Moduli of a Material Containing Composite Inclusions: Effective Medium Theory and Finite Element Computations // Mechanics of Materials, 2001. – P. 455–470.
8. Марчук, В.А. Результаты исследований плоских образцов из напрягающего бетона при двухосном ограничении деформаций расширения // Напрягающие цементы, бетоны и самонапряженные конструкции: сб. тр. Междунар. науч.-практ. конф. / Под ред. Тура В.В. – Брест: БГТУ, 2001 – С. 193–198.

02.12.09

#### PAVLOVA I.P. Expansive concrete composite model for prediction self-stress magnitude in biaxial restriction conditions

In present paper expansive concrete composite model for prediction self-stress magnitude in biaxial restriction conditions are presented. Main model conditions on the basis of Effective Medium Theory and Solidification Theory are founded. Model allow with adequate degree of accuracy prognoses main characteristic of self-stressed concrete – self-stressing.