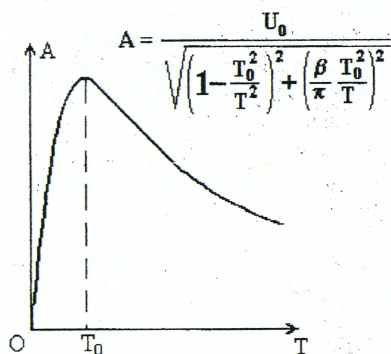


Министерство образования Республики Беларусь
Брестский политехнический институт
Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ



Э6. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ (Методические указания)

Брест 1998

УДК 53 (076.5)

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.
Методические указания по выполнению лабораторной работы
Э6 “ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ
КОНТУРЕ”, Брест, БПИ, 1998

В методических указаниях приведено описание лабораторной работы Э6 “Исследование вынужденных колебаний в колебательном контуре”, в которой экспериментально проверяются зависимости между физическими величинами, характеризующими вынужденные колебания в колебательном контуре, а также изучается явление резонанса.

Лабораторная работа предназначена для студентов всех специальностей и всех форм обучения в БПИ.

Автор: А.Н.Прокопеня, к.ф.-м.н., доцент.

Рецензент: В.С.Секержицкий, доцент кафедры физики и астрономии БрГУ



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА Э6

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы:

- исследование зависимости периода собственных колебаний от емкости и определение индуктивности катушки;
- построение резонансных кривых и определение добротности колебательного контура;
- исследование зависимости амплитуды вынужденных колебаний от сопротивления контура.

Приборы и принадлежности: Двухканальный осциллограф типа С1-137, генератор, магазин сопротивлений, катушка индуктивности, набор конденсаторов, соединительные провода.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Общий вид установки и схема подключения приборов приведены на рис. 1.

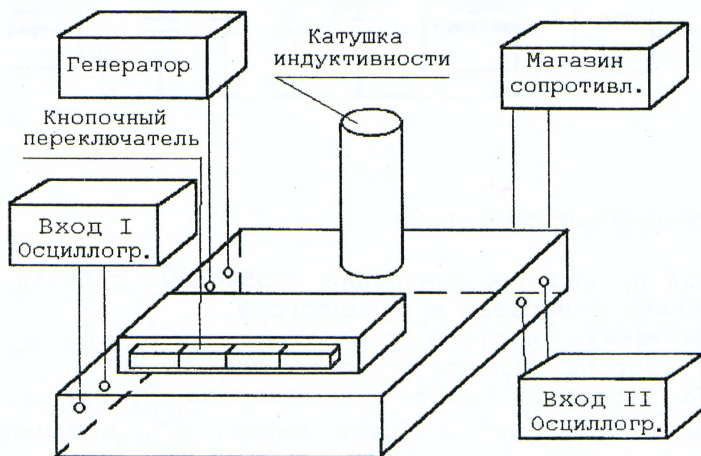


Рис. 1

Экспериментальная установка состоит из колебательного контура, помещенного в корпус, генератора, магазина сопротивлений и двухканального осциллографа. Генератор вырабатывает синусоидальный сигнал, который подается с гнезда

" $\Theta \sim$ " на колебательный контур и вход I осциллографа. При этом в колебательном контуре возникают вынужденные колебания. Напряжение с конденсатора колебательного контура подается на вход II осциллографа.

Принципиальная схема установки изображена на рис. 2. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L , ёмкости C_1 и активного сопротивления R_k (сопротивление катушки, соединительных проводов и т.д.). С помощью магазина сопротивлений $R_{доб.}$, подключенного последовательно с катушкой индуктивности L , можно изменять активное сопротивление контура. Изменение емкости колебательного контура осуществляется с помощью кнопочных переключателей K_1, K_2, K_3 , которые позволяют подключать параллельно к конденсатору C_1 соответственно конденсаторы C_2, C_3, C_4 в различной комбинации.

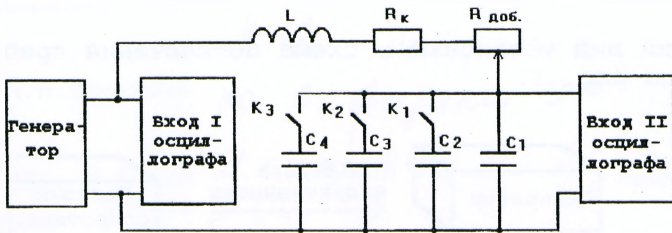


Рис. 2

ПРОВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Для проведения измерений необходимо собрать установку и включить генератор и осциллограф.

Множитель частоты генератора поставить в положение " 10^3 ", уровень сигнала - в положение "0 dB".

На передней панели осциллографа С1-137 должны быть нажаты кнопки " μs " и "Сеть внешн. I". Остальные кнопки должны находиться в отжатом положении. Ручку управления "Время/дел" установить в пределах $5 \div 20$.

С помощью ручек "Уровень", "V/дел I" и "V/дел II" получите на экране осциллографа устойчивую картину, изображенную на рис. 3. Одна из синусоид соответствует сигналу, подаваемому на колебательный контур с генератора, вторая - напряжению на конденсаторе. Ручки " \updownarrow ", встроенные в переключатели "V/дел I" и "V/дел II", позволяют перемещать

каждую синусоиду как целое по вертикали. Вращение ручек "↓" позволяет легко выяснить, какая из синусоид соответствует сигналам, подаваемым на входы I и II осциллографа.

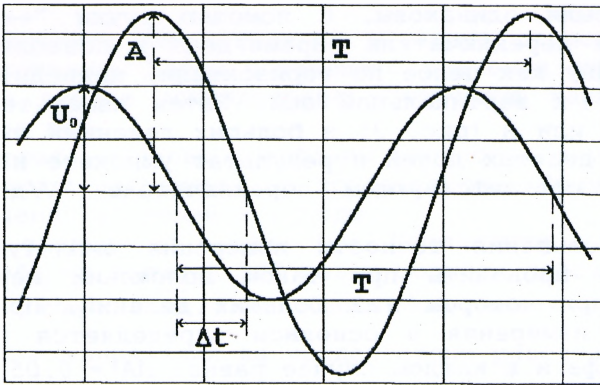


Рис. 3

а) Измерение периода колебаний

Период колебаний T определяется как промежуток времени между двумя последовательными моментами, в которые напряжение достигает максимального или минимального значения (рис. 3). Для измерения периода колебаний с помощью ручки "↓" совместите вершины синусоиды с горизонтальной осью на экране осциллографа и определите расстояние между соседними вершинами в больших делениях шкалы с точностью до десятых долей. Полученный результат умножьте на показания метки на переключателе "Время/дел". Если кнопка " μs " на передней панели осциллографа нажата, то значение периода колебаний получается в микросекундах.

Период колебаний можно также определить, измеряя промежуток времени между двумя последовательными моментами, в которые напряжение обращается в нуль, изменяясь в одну и ту же сторону, например, убывает (рис. 3). В этом случае необходимо предварительно установить синусоиду таким образом, чтобы ее максимальные отклонения вверх и вниз относительно горизонтальной оси были одинаковы.

Для увеличения точности измерения периода колебаний необходимо установить ручку переключателя "Время/дел" в такое положение, при котором на экране осциллографа наблюдается не более двух периодов колебаний. При этом погрешность измерения периода в основном определяется параметрами осциллографа и в каждом случае равна: $\Delta T = 0.05 \cdot T$.

б) Измерение амплитуды сигнала

Установите синусоиду таким образом, чтобы ее максимальные отклонения вверх и вниз относительно горизонтальной оси были одинаковы. С помощью ручки " \leftrightarrow ", которая встроена в переключатель "Время/дел" и позволяет перемещать картину как целое по горизонтали, подведите вершину синусоиды к вертикальной оси. Затем измерьте амплитуду сигнала U_0 или A (рис. 3) в больших делениях шкалы с точностью до десятых долей и результат умножьте на показания метки на соответствующем переключателе "V/дел I" или "V/дел II".

Для повышения точности измерения амплитуды сигнала необходимо проводить при таком положении переключателя "V/дел", при котором $A \geq 2$ больших делений. При этом погрешность измерения в основном определяется параметрами осциллографа и в каждом случае равна: $\Delta A = 0.05 \cdot A$.

в) Измерение разности фаз колебаний

Установите обе синусоиды так, чтобы максимальные отклонения каждой из них вверх и вниз относительно горизонтальной оси на экране осциллографа были одинаковы. Сдвиг фаз напряжений, подаваемых на входы I и II осциллографа, определяется промежутком времени Δt между соответствующими точками пересечения синусоид с горизонтальной осью (рис. 3), причем значение Δt выбирается из интервала $0 \leq \Delta t \leq \frac{T}{2}$. Измеряя это расстояние в больших делениях шкалы с точностью до десятых долей и умножая полученный результат на показания метки на переключателе "Время/дел", определите промежуток времени Δt в микросекундах (при условии, что кнопка " μs " нажата). Тогда модуль сдвига фаз между напряжениями вычисляется по формуле: $|\phi| = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$ (рад) или $|\phi| = 360^\circ \frac{\Delta t}{T}$. Знак ϕ можно определить из следующих соображений. Если первый максимум на экране осциллографа соответствует сигналу, подаваемому на вход I (сигнал с генератора), то напряжение на конденсаторе колебательного контура будет отставать по фазе по отношению к сигналу, подаваемому на контур с генератора, т.е. $\phi = -2\pi \frac{\Delta t}{T}$.

Для уменьшения погрешности определения Δt измерения необходимо проводить при таком положении переключателя "Время/дел", когда на экране осциллографа наблюдается только исследуемый участок сигнала.

ЗАДАНИЕ 1. Исследование зависимости периода собственных колебаний от емкости и определение индуктивности катушки.

1. Установите переключатели магазина сопротивлений в нулевое положение. Затем установите значение емкости C_1 и получите на экране осциллографа устойчивую картину, изображенную на рис. 3.

2. Измерьте периоды колебаний входного синусоидального напряжения и напряжения на конденсаторе. Сравните полученные значения и сделайте выводы.

3. Как следует из теории (см. Приложения 1 и 2), если период колебаний внешней ЭДС равен периоду собственных колебаний $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, то сдвиг фаз между колебаниями внешней ЭДС и напряжения на конденсаторе равен $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, т.е.

$\Delta t = \frac{T}{4}$. Поэтому условие $\Delta t = \frac{T}{4}$ можно рассматривать как критерий равенства периода колебаний внешней ЭДС периоду собственных колебаний.

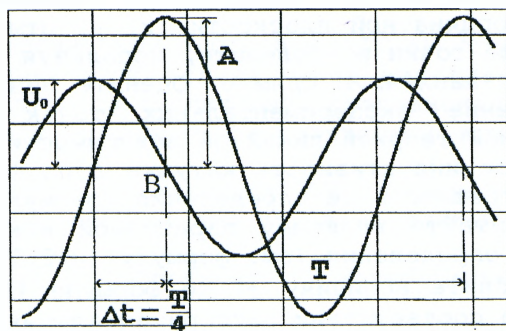


Рис. 4

Плавно изменяя частоту сигнала, подаваемого с генератора на колебательный контур, добейтесь выполнения равенства $\Delta t = \frac{T}{4}$. При этом вершина синусоиды с амплитудой A , соответствующей напряжению на конденсаторе (см. рис. 4), должна находиться на одной вертикали с точкой B пересечения синусоиды, соответствующей сигналу с генератора, с горизонтальной осью (если вторая синусоида установлена так, что ее максимальные отклонения вверх и вниз относительно горизонтальной оси одинаковы).

Измерьте период колебаний T , при котором выполняется условие: $\Delta = \frac{T}{4}$.

4. Установите значение емкости ($C_1 + C_2$) и повторите измерения п. 3.

5. Повторите измерения п. 3 для всех возможных значений емкости C .

В результате получится набор пар соответствующих значений (C_i, T_i), где i - номер опыта, при которых сдвиг фаз между колебаниями внешней ЭДС и напряжения на конденсаторе

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

6. Теория, изложенная в Приложении 2, предсказывает линейную зависимость между переменными $y = T^2$ и $x = C$:

$$y = a \cdot x + b,$$

где $a = 4\pi^2 \cdot L$, $b = 4\pi^2 LC_0$ - постоянные.

Располагая измеренными значениями T_i при различных $x_i = C_i$, вычислите $y_i = T_i^2$ и по формулам (П.2.5) найдите значения постоянных a и b . Затем рассчитайте погрешности их определения Δa и Δb (см. формулы (П.2.6), (П.2.7)).

7. На координатной плоскости (x, y) отметьте все экспериментальные точки и проведите, используя найденные значения a и b , наилучшую прямую. Оцените визуально, хорошо ли расположение экспериментальных точек соответствует предсказываемой теорией линейной зависимости.

8. Найдите индуктивность катушки L по формуле (П.2.8) и оцените погрешность ее определения (формула (П.2.9)).

9. Рассчитайте величину паразитной емкости C_0 и погрешность ее определения (см. формулу (П.2.10)).

10. Вычислите величину χ^2 по формуле (П.2.11) и сделайте вывод о соответствии экспериментальных данных линейной зависимости (П.2.5).

Задание 2. Построение резонансных кривых и определение добротности колебательного контура.

1. Установите переключатели магазина сопротивлений в нулевое положение.

2. Установите значение емкости C по указанию преподавателя и получите на экране осциллографа устойчивую картину, изображенную на рис. 3.

3. Плавно изменяя частоту сигнала, подаваемого с генератора на колебательный контур, установите период коле-

баний $T = 20$ мкс. С помощью ручки “~” на передней панели генератора установите амплитуду сигнала $U_0 = 1 \div 2$ В.

В дальнейшем амплитуду сигнала с генератора U_0 необходимо поддерживать постоянной.

4. Измерьте амплитуду A напряжения на конденсаторе и время его запаздывания Δt относительно напряжения, подаваемого с генератора (см. п.п. б), в) раздела Проведение измерений).

5. Установите период колебаний $T = 25$ мкс и подкорректируйте, если необходимо, амплитуду входного сигнала U_0 . Затем опять измерьте амплитуду A и время запаздывания Δt и т.д..

6. Увеличивая период колебаний через 5 мкс до значения 80 мкс, измерьте при каждом значении T амплитуду A и время запаздывания Δt .

Не забывайте следить за тем, чтобы амплитуда входного сигнала U_0 оставалась постоянной.

7. В области значения T , при котором амплитуда A колебаний напряжения на конденсаторе достигает максимума, измерения A и Δt проведите, изменяя период колебаний через 2 мкс.

8. На координатной плоскости (T , A) отметьте экспериментальные точки и проведите через них плавную кривую. В результате получится амплитудная резонансная кривая. Сравните полученную кривую с теоретической кривой (см. рис. П.1.3).

9. По графику зависимости $A(T)$ определите период колебаний T_0 , при котором амплитуда напряжения на конденсаторе максимальна.

Рассчитайте добротность колебательного контура $Q = \frac{A_{\max}}{U_0}$.

10. Измерьте ширину резонансной кривой ΔT . Рассчитайте величину $\frac{T_0}{\Delta T}$, сравните полученный результат со значением Q и сделайте выводы.

11. Используя измеренные значения Δt , определите сдвиг фаз φ между колебаниями внешней ЭДС и напряжения на конденсаторе при каждом значении T . На координатной плоскости (T , φ) отметьте экспериментальные точки и проведите через них фазовую резонансную кривую (см. рис. П.1.4). По графику зависимости $\varphi(T)$ определите значение T , при котором $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, сравните его с T_0 и сделайте выводы.

12*. С помощью магазина сопротивлений установите некоторое значение $R_{доб}$ по указанию преподавателя и повторите измерения п.п. 3-7. Постройте амплитудную резонансную кривую, соответствующую выбранному значению $R_{доб}$, сравните ее со случаем $R_{доб} = 0$ и сделайте выводы.

Задание 3. Исследование зависимости амплитуды вынужденных колебаний от сопротивления контура.

1. Установите на магазине сопротивлений все переключатели в нулевое положение.

2. Установите значение емкости C по указанию преподавателя и получите на экране осциллографа устойчивую картину, изображенную на рис. 3.

3. Плавно изменяя частоту сигнала, подаваемого с генератора на колебательный контур, добейтесь, чтобы сдвиг фаз между колебаниями напряжения на конденсаторе и внешней ЭДС был равен $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 4). Затем измерьте период колебаний T .

4. Установите амплитуду входного сигнала $U_0 = 1 + 2$ В и измерьте амплитуду A колебаний напряжения на конденсаторе.

В дальнейшем амплитуду сигнала с генератора U_0 необходимо поддерживать постоянной.

5. С помощью магазина сопротивлений установите $R_{доб} = 500$ Ом. Убедитесь, что при этом не произошло нарушения условия $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Подкорректировав, если необходимо, амплитуду входного сигнала U_0 , измерьте амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе A .

6. Повторите измерения амплитуды A не менее 10 раз при сопротивлениях магазина $R_{доб} = 1000$ Ом, 1500 Ом, 2000 Ом и т.д., не забывая корректировать U_0 .

7. Теория, изложенная в Приложении 3, предсказывает линейную зависимость между сопротивлением магазина $x = R_{доб}$ и величиной $y = \frac{U_0}{A}$:

$$y = a \cdot x + b,$$

где $a = \frac{T}{2\pi L}$, $b = \frac{T}{2\pi L} R_k$ - неизвестные постоянные.

На координатной плоскости (x , y) отметьте экспериментальные точки и оцените визуально, хорошо ли расположение

этих точек соответствует линейной зависимости, предсказываемой теорией.

8. По формулам (П.2.5) вычислите a и b и проведите на координатной плоскости (x, y) прямую $y = a \cdot x + b$ с найденными значениями a и b .

9. Вычислите χ^2 по формуле (П.3.6) и сделайте вывод о соответствии экспериментальных данных теоретической модели.

10. Найдите индуктивность L и сопротивление катушки R_k (см. формулы (П.3.4), (П.3.5)).

11*. Измените значение емкости контура C и повторите п. п. 1 - 10.

Сделайте выводы относительно зависимости R_k от T .

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Теория вынужденных колебаний в колебательном контуре

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных емкости C , индуктивности L и проводника с электрическим сопротивлением R (рис. П.1.1).

Предположим, что внешняя электродвижущая сила создает между точками 1 и 2 разность потенциалов, которая изменяется с течением времени по закону: $U(t) = U_0 \cdot \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t)$. Тогда в контуре возникает электрический ток, сила которого также зависит от времени: $I = I(t)$. Будем считать, однако, что изменения силы тока в контуре происходят достаточно медленно, так что в каждый момент времени значения силы тока во всех участках контура одинаковы.

Выберем положительное направление обхода контура по ходу часовой стрелки и запишем закон Ома для участка цепи 1 - 2:

$$I \cdot R + U_C = U_0 \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) + \varepsilon, \quad (\text{П.1.1})$$

где U_C - напряжение на конденсаторе, а $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$ - ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке. Обозначив через q заряд той из обкладок конденсатора, направление от которой к другой совпадает с положительным направлением обхо-

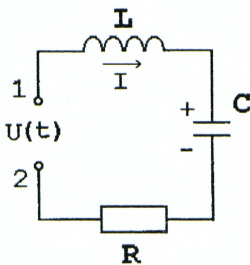


Рис. П.1.1

да контура, запишем для силы тока выражение: $I = \frac{dq}{dt}$. Так как $q = C \cdot U_C$, то сила тока в цепи равна $I = C \frac{dU_C}{dt}$, и соотношение (П.1.1) принимает вид:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right). \quad (\text{П.1.2})$$

Вводя обозначения $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\beta = \frac{R}{2L}$, получаем для напряжения на конденсаторе следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + 2\beta \frac{dU_C}{dt} + \omega_0^2 \cdot U_C = \omega_0^2 \cdot U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right). \quad (\text{П.1.3})$$

Общее решение уравнения (П.1.3) можно представить в виде:

$$U_C(t) = U_1(t) + U_2(t),$$

где $U_1(t)$ - общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} + 2\beta \frac{dU_1}{dt} + \omega_0^2 \cdot U_1 = 0, \quad (\text{П.1.4})$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний, а $U_2(t)$ - какое-либо частное решение уравнения (П.1.3).

Решение уравнения (П.1.4) хорошо известно:

$$U_1(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega \cdot t + \alpha), \quad (\text{П.1.5})$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а A_0 и α - постоянные, которые определяются из начальных условий.

Частное решение уравнения (П.1.3) будем искать в виде:

$$U_2(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right) = A \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\varphi - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\varphi\right), \quad (\text{П.1.6})$$

где A и φ - некоторые постоянные.

Подставляя (П.1.6) в (П.1.3), получаем:

$$A \cdot \left(\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\varphi - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\varphi\right) - 2\beta \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot A \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\varphi + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\varphi\right) = \omega_0^2 \cdot U_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right).$$

Приравнивая к нулю множители при $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ и $\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$, получаем:

$$A = \frac{U_0 \cdot \omega_0^2 \cdot T^2}{\sqrt{(\omega_0^2 \cdot T^2 - 4\pi^2)^2 + (4\pi \cdot \beta \cdot T)^2}}, \quad (\text{П.1.7})$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4\pi \cdot \beta \cdot T}{\omega_0^2 \cdot T^2 - 4\pi^2}. \quad (\text{П.1.8})$$

Функция $U_1(t)$ описывает свободные колебания в контуре, причем за время $\tau = \frac{1}{\beta}$ амплитуда этих колебаний убывает в e раз. Поэтому, при $t \gg \tau$ свободные колебания практически совсем затухнут, т.е. $U_1(t) \rightarrow 0$, и в контуре будут наблюдаться установившиеся вынужденные колебания, при которых напряжение на конденсаторе (а также сила тока в цепи $I = C \frac{dU_C}{dt}$) изменяется с течением времени по гармоническому закону:

$$U_C(t) = A \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right) = A \cdot \operatorname{Cos}(\omega \cdot t + \varphi), \quad (\text{П.1.9})$$

причем период этих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$ равняется периоду колебаний внешней ЭДС. Амплитуда A и начальная фаза колебаний φ (см. (П.1.7), (П.1.8)) не зависят от начальных условий, а определяются только параметрами контура ω_0 и β , а также амплитудой U_0 и периодом колебаний T внешней ЭДС.

Полученное решение (П.1.9) можно представить очень наглядно с помощью векторной диаграммы. Напомним, что на векторной диаграмме гармонические колебания изображаются вектором, длина которого равна амплитуде колебаний, а направление вектора образует с осью Ox угол, равный начальной фазе колебаний. Подставляя (П.1.9) в уравнение (П.1.3), для каждого из трех слагаемых в левой части (П.1.3) получаем:

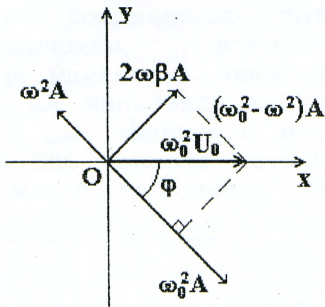


Рис. П.1.2.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_C}{dt^2} &= -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{Cos}(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{Cos}(\omega \cdot t + \varphi + \pi), \\ 2\beta \frac{dU_C}{dt} &= -2\beta \cdot A \cdot \omega \cdot \operatorname{Sin}(\omega \cdot t + \varphi) = 2\beta \cdot A \cdot \omega \cdot \operatorname{Cos}\left(\omega \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\omega_0^2 \cdot U_C = \omega_0^2 \cdot A \cdot \operatorname{Cos}(\omega \cdot t + \varphi).$$

Согласно (П.1.3), в результате сложения этих трех колебаний получаются гармонические колебания $\omega_0^2 \cdot U_0 \cdot \operatorname{Cos}(\omega \cdot t)$ с амплитудой $\omega_0^2 \cdot U_0$, начальная фаза которых равна нулю. Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис. П.1.2.

Соотношения (П.1.7), (П.1.8) теперь легко получить из прямоугольного треугольника, образованного векторами $2\omega\beta A$, $\omega_0^2 U_0$ и разностью $\omega_0^2 \cdot A - \omega^2 \cdot A$, причем $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

График зависимости (П.1.7) амплитуды вынужденных колебаний от периода колебаний внешней ЭДС представлен на рис. П.1.3. При $T = 0$ напряжение на конденсаторе равняется нулю. При возрастании периода колебаний T амплитуда вынужденных колебаний A сначала также возрастает до максимального значения $A_{MAX} = \frac{U_0 \cdot \omega_0^2}{2\beta \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ при $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$ а затем убывает до U_0 при $T \rightarrow \infty$. Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний в контуре при приближении периода колебаний внешней ЭДС к значению T_0 называется резонансом, а график зависимости $A(T)$ называется амплитудной резонансной кривой.

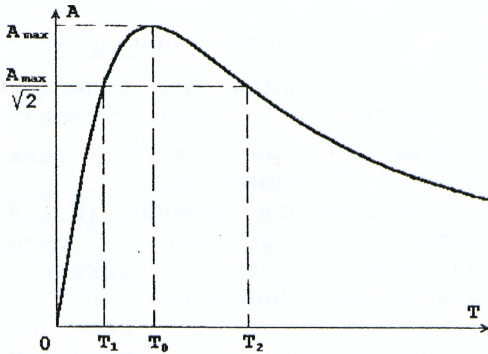


Рис. П.1.3.

Одной из характеристик резонансной кривой является максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний A_{MAX} . При этом отношение A_{MAX} к амплитуде внешней ЭДС зависит только от параметров контура β и ω_0 и называется добротностью колебательного контура:

$$Q = \frac{A_{MAX}}{U_0} = \frac{\omega_0^2}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (\text{П.1.10})$$

Как следует из (П.1.10) добротность контура тем выше, чем меньше величина $\beta = \frac{R}{2L}$, т.е. чем меньше сопротивление R и больше индуктивность контура L .

Другой важной характеристикой является ширина резонансной кривой (см. рис. П.1.2), т.е. разность значений периода колебаний внешней ЭДС $\Delta T = T_2 - T_1$, при которых амплитуда вынужденных колебаний равна $\frac{A_{MAX}}{\sqrt{2}}$. Из уравнения

$A(\Omega) = \frac{A_{MAX}}{\sqrt{2}}$ находим:

$$T_{1,2} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - 2\beta^2 \pm 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})^{1/2}}.$$

Тогда

$$\Delta T = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - 2\beta^2 - 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})^{1/2}} - \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - 2\beta^2 + 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})^{1/2}}. \quad (\text{П.1.11})$$

Если затухание в контуре невелико ($\beta \ll \omega_0$), то резонансное значение периода T_0 и период свободных затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ практически будут равны периоду собствен-

ных колебаний в контуре $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Тогда $A_{MAX} = \frac{U_0 \cdot \omega_0}{2\beta}$ и выражение для добротности контура (П.1.10) примет вид:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

В этом случае ширина резонансной кривой равна:

$$\Delta T = \frac{4\pi \cdot \beta}{\omega_0^2} = \frac{2\pi}{\omega_0 \cdot Q} = \frac{T_0}{Q}.$$

Таким образом, чем больше добротность колебательного контура, тем уже резонансная кривая.

График зависимости (П.1.8) представлен на рис. П.1.4 и называется фазовой резонансной кривой. Как видно из гра-

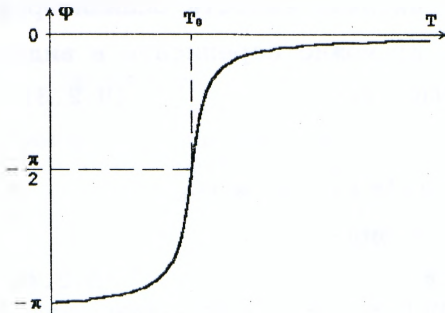


Рис. П.1.4.

фика, если, $T \rightarrow \infty$, то $\varphi \rightarrow 0$, т.е. при низких частотах напряжение на конденсаторе колеблется в фазе с внешней ЭДС. При $T \rightarrow 0$ колебания совершаются в противоположных фазах. Если период колебаний внешней ЭДС совпадает с периодом собственных колебаний ($T = T_0$), то напряжение на конденсаторе отстает по фазе от внешней ЭДС на $\frac{\pi}{2}$. При

этом сила тока в цепи

$$I = C \frac{dU_c}{dt} = -C \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = C \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = C \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \cos\left(\omega \frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$

будет совершать колебания в фазе с внешней ЭДС, причем амплитуда колебаний силы тока принимает максимально возможное значение:

$$I_0 = C \cdot A \cdot \frac{2\pi}{T_0} = \frac{U_0}{R}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Теоретическая модель для проверки зависимости периода собственных колебаний от емкости и определение индуктивности катушки.

Как следует из (П.1.8), если период колебаний внешней ЭДС равняется периоду собственных колебаний в контуре $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, то сдвиг фаз между колебаниями внешней ЭДС и напряжения на конденсаторе равняется $-\frac{\pi}{2}$. Предположим, что при заданных значениях емкости C и индуктивности L мы подобрали такую частоту сигнала, подаваемого с генератора на колебательный контур, что условие $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ оказалось выполненным. Тогда период колебаний будет равен:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (\text{П.2.1})$$

Возводя обе стороны равенства (П.2.1) в квадрат, получаем:

$$T^2 = 4\pi^2 LC. \quad (\text{П.2.2})$$

Емкость контура C включает в себя емкость конденсатора C_1 (см. рис. 2) и некоторую паразитную емкость C_0 (выходная емкость генератора, входная емкость осциллографа и т.д.). Поэтому формулу (П.2.2) можно переписать в виде:

$$T^2 = 4\pi^2 L(C_1 + C_0). \quad (\text{П.2.3})$$

Вводя обозначения

$$y = T^2, \quad x = C_1, \quad a = 4\pi^2 L, \quad b = 4\pi^2 LC_0$$

зависимость (П.2.3) перепишем в виде

$$y = ax + b. \quad (\text{П.2.4})$$

Теория, таким образом, предсказывает линейную зависимость между переменными y и x .

Располагая рядом экспериментальных значений периода колебаний T_i при различных значениях емкости C_i , можно с помощью, например, метода наименьших квадратов (МНК), найти наилучшие в смысле МНК значения постоянных a и b в (П.2.4):

$$a = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle x \rangle}, \quad b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle, \quad (\text{П.2.5})$$

где

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

n - число измерений. Для доверительной вероятности $P = 95\%$ погрешности Δa и Δb определяется формулами:

$$\Delta a = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{n(n-2)(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)} \right]^{1/2}, \quad (\text{П.2.6})$$

$$\Delta b = \left[\frac{\langle x^2 \rangle}{n(n-2)(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{П.2.7})$$

По найденной на основе МНК величине a можно определить индуктивность катушки L по формуле:

$$L = \frac{a}{4\pi^2}, \quad (\text{П.2.8})$$

а также погрешность ее определения:

$$\Delta L = \frac{\Delta a}{4\pi^2}. \quad (\text{П.2.9})$$

Аналогично находим паразитную емкость C_0 и погрешность ее определения:

$$C_0 = \frac{b}{a}, \quad \Delta C_0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2} \Delta a\right)^2}. \quad (\text{П.2.10})$$

Проверить, насколько хорошо линейная зависимость (П.2.5) соответствует экспериментальным данным, можно, например, используя критерий Пирсона (хи-квадрат). Для этого необходимо вычислить величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\Delta y_i} \right)^2, \quad (\text{П.2.11})$$

где $\Delta y_i = 2T_i \cdot \Delta T_i$, ΔT_i - погрешность измерения периода колебаний в i -ом опыте.

Вычисленная величина χ^2 сравнивается с табличным значением (таблица приведена на рабочем месте) так, как это делалось в работе М-1, и на основе этого сравнения определяется вероятность соответствия линейной зависимости экспериментальным данным.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Теоретическая модель для проверки зависимости амплитуды вынужденных колебаний от сопротивления контура.

Согласно (П.1.7), (П.1.8), если период колебаний внешней ЭДС равняется периоду собственных колебаний ($T=T_0=2\pi\sqrt{LC}$), то амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе равна:

$$A = \frac{U_0 \omega_0}{2\beta} = \frac{U_0 \cdot \pi}{\beta \cdot T} = \frac{U_0 \cdot 2\pi L}{R \cdot T}. \quad (\text{П.3.1})$$

При этом сдвиг фаз между колебаниями внешней ЭДС и напряжения на конденсаторе $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Соотношение (П.3.1) можно переписать в виде:

$$\frac{U_0}{A} = \frac{T}{2\pi L} \cdot R. \quad (\text{П.3.2})$$

Сопротивление контура $R = R_K + R_{\text{доб}}$ (см. рис. 2) может изменяться за счет сопротивления $R_{\text{доб}}$, включаемого с помощью магазина. При этом подключение к контуру дополнительного сопротивления приводит к изменению индуктивности контура L , так как проволочные катушки магазина сопротивлений также имеют некоторую индуктивность. Предположим, однако, что изменением индуктивности контура при добавлении катушек магазина сопротивлений можно пренебречь. Тогда при фиксированной емкости контура величина $\frac{T}{2\pi L} = \sqrt{\frac{C}{L}}$ постоянна и соотношение (П.3.2) можно переписать в виде:

$$y = \frac{U_0}{A} = a \cdot x + b, \quad (\text{П.3.3})$$

где $x = R_{\text{доб}}$, а $a = \frac{T}{2\pi L}$, $b = \frac{T}{2\pi L} \cdot R_K$ - постоянные.

Таким образом, теория предсказывает линейную зависимость между переменными $y = \frac{U_0}{A}$ и $x = R_{\text{доб}}$ при постоянной емкости C .

Располагая рядом значений амплитуды вынужденных колебаний A_i при различных значениях $x_i = R_{\text{доб}}$, можно с помощью МНК найти наилучшие значения параметров a и b и погрешности их определения (см. форм. (П.2.5), (П.2.6), (П.2.7)). По найденным значениям a и b можно найти индуктивность контура

$$L = \frac{T}{2\pi \cdot a}, \quad (\text{П.3.4})$$

а также сопротивление катушки:

$$R_k = \frac{b}{a}. \quad (\text{П.3.5})$$

После этого может быть произведена проверка адекватности теоретической зависимости (П.3.3) на основе критерия χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a \cdot x_i + b - y_i}{\Delta y_i} \right)^2, \quad (\text{П.3.6})$$

где $\Delta y_i = \frac{\Delta A}{A_i} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{U_0}{A_i} \right)^2}$ - погрешность определения величины

$$y = \frac{U_0}{A}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие колебания называются вынужденными ?
2. Вывести дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в контуре.
3. Как зависит амплитуда и фаза вынужденных колебаний от периода колебаний внешней ЭДС ?
4. Что называется добротностью колебательного контура?
5. Что представляет собой явление резонанса ?
6. Что такое ширина резонансной кривой и как она зависит от добротности колебательного контура ?

ЛИТЕРАТУРА

1. И.В.Савельев. Курс физики. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика.- М.: Наука, 1989.- С. 272 - 284.
2. Д.В.Сивухин. Общий курс физики. Т. III. Электричество.- М.: Наука, 1977.- С. 561 - 568.

3НОЕ ИЗДАНИЕ

Составитель: Прокопеня Александр Николаевич

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ.
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.

Методические указания по выполнению
лабораторной работы Э6.

Ответственный за выпуск Прокопеня А.Н.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 2.06.98 г. Формат 60x84/16. Печать
офсетная. Усл.п.л. 1,2. Уч.изд.л. 1,06. Тираж 200 экз.
Заказ № 396. Бесплатно. Отпечатано на ротапринтере Брест-
ского политехнического института.
224017, Брест, ул.Московская, 267.