МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра начертательной геометрии и инженерной графики

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Курс лекций
с задачами для самостоятельной работы

для студентов специальности
1 - 70 01 01 – «Производство строительных изделий и конструкций»

Брест 2005

УДК К 515 (076.8)

Курс лекций разработан в соответствии с учебной и рабочей программами курса «Начертательная геометрия». Изложены теоретические основы построения чертежа, общие положения построения моделей геометрических образов, характерные их особенности и свойства. К каждой лекции разработаны задачи для самостоятельного решения. Курс лекций предназначен для студентов специальности 70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций» и других технических специальностей.

Авторы: З.Н. Уласевич – доцент, к.т.н.
Т.В. Чипурных - ассистент

Рецензенты: В.Н. Куценко к.т.н., доцент кафедры ИГ БГУиР,
И.Д. Бушило к.т.н., доцент кафедры инженерной графики машиностроительного профиля БНТУ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс начертательной геометрии сформировался в середине 19 столетия и до настоящего времени существенно не изменился. Однако стремительный рост развития всех отраслей научно-технического прогресса, несомненно, вносит коррективы и в методические аспекты начертательной геометрии. В этом направлении целенаправленно осуществляется совершенствование, методики преподавания, представления графической информации в доступной для студентов форме; разработке методических и учебных пособий и т.д.

Такой подход является весьма актуальным с педагогической точки зрения и требует своевременной корректировки читаемой дисциплины при организации учебного процесса. С одной стороны, важность и значимость начертательной геометрии неоспорима, т.к. она занимает достойное место в ряде изучаемых фундаментальных наук, формирует пространственное воображение студента, его инженерное мышление как будущего инженера. С другой стороны, изучаемый курс начертательной геометрии для студента-первокурсника является достаточно сложным, так как требует достаточно развитого абстрактного мышления. В этой связи и возникает необходимость в разработке лекционного курса. При этом имеет существенное значение общепринятая терминология начертательной геометрии, способствующая взаимосвязи изучаемого абстрактного образа и его моделей, а также обратной связи в обозначенном пространстве. Тогда студенту проще рассматривать поставленную задачу, конструировать соответствующую геометрическую модель, выявлять на ней метод решения задачи, формировать графический алгоритм ее решения. При этом необходимо учитывать то, что в современных условиях необходимо стремиться к организации учебного процесса с оснащением занятий специальными методическими устройствами: лекционной аудиторией с мультимедийным оборудованием, наличием демонстрационных моделей и плакатов. В процессе чтения лекции студент должен работать с ее конспектом.

Приводятся задачи для самостоятельной и управляемой самостоятельной работы студента, рекомендованные для выполнения их после прослушанной лекции. По некоторым характерным темам приведено поэтапное графическое решение задач в виде слайдов. Это дает возможность студенту разрабатывать самостоятельно графические алгоритмы решаемых задач, а затем, представлять графический материал в виде слайдов.

Такой подход в итоге способствует формированию пространственного мышления студента, активизации его познавательной деятельности при изучении разделов начертательной геометрии. Сознательное освоение студентами курса начертательной геометрии является основой для проявления интереса к студенческой научно-исследовательской работе.

Лекции разработаны кандидатом технических наук, доцентом Уласевич З.Н.

Задачи для самостоятельной работы разработаны ассистентом кафедры начертательной геометрии и инженерной графики Чипурных Т.В.

Авторы выражают благодарность кандидату технических наук, профессору кафедры строительных конструкций БГТУ Уласевичу В.П. за оказанную методическую и техническую помощь при разработке компьютерного макета.

Авторы выражают благодарность рецензентам:

– кандидату технических наук, доценту Бушило И.Д. (кафедра инженерной графики машиностроительного профиля БНТУ);

– кандидату технических наук, доценту Куценко В.Н. (кафедра инженерной графики БГУиР).

Пожелания и замечания по данному курсу лекций можно высказать по адресу: 224017, г. Брест, ул. Московская, 267, Брестский государственный технический университет, кафедра «Начертательная геометрия и инженерная графика», Уласевич Зинаиде Николаевне.

ЛЕКЦИЯ 1

Тема. Основные проекционные методы построения чертежей

Вопросы:

1. Введение. Предмет начертательной геометрии;
2. Метод проекций;
3. Условные обозначения, символы и терминология.

Выводы.

1. Введение. Предмет начертательной геометрии

Прогресс в освоении какой-либо дисциплины, в том числе и начертательной геометрии, не может быть плодотворен без знания исторического процесса становления и развития этой области знаний.

К концу XVIII столетия знания методов изображения достигли высокой степени развития. Один из них, такой как перспектива, имел и определенное теоретическое обоснование. Другие, – например, ортогональные проекции преимущественно основывались на положениях, вытекающих из практического опыта, и использовались различно в зависимости от конкретных задач без их теоретического обобщения. Этот метод изображения, как наиболее простой, полнее других отвечающий запросам бурно развивающейся техники и архитектуры, стал преобладающим и требовал своего теоретического обоснования.

Это удалось сделать французскому ученому Гаспару Монжу (1746-1818 гг.), благодаря трудам которого ортогональные проекции сформировались как научно обоснованный метод изображения.

На основе анализа применявшихся ранее изображений ему удалось выделить в них основные теоретические положения, свести большое разнообразие практических случаев к выполнению основных задач, решаемых с помощью изображений на двух либо трех взаимно-перпендикулярных плоскостях проекций с их последующим совмещение в одну плоскость, используя при построении чертежа ортогональное проецирование. Это подвело теоретическую базу под ранее применявшиеся подобные изображения и свело в стройную систему весь ранее разрозненный материал. Г. Монж по заслугам считается творцом метода ортогональных проекций как науки. Впервые труд Г.Монжа был опубликован в 1799 г.

Значительную роль в совершенствовании методов изображений сыграли русские народные мастера-умельцы - Рублев, Барма, Кулибин, Ползунов и др. Они создали условия для освоения и дальнейшего развития “метода Монжа” и преподования его как предмета в учебных заведениях России.

Через очень короткий для того времени промежуток времени с момента опубликования труда Г. Монжа в 1810 г. курс начертательной геометрии, как обязательный, вводится в институте корпуса инженеров путей сообщения, куда приглашается ученик Г. Монжа – К.И. Потье.

С 1818 года курс ведет уже Я.А. Севастьянов – первый русский профессор по этой дисциплине. Он создает первые оригинальные труды по различным разделам дисциплины, стоявшие на уровне лучших мировых работ.

В последующий период издаются преимущественно учебные курсы на высоком научном уровне, которые можно признать классическими, в отдельных случаях представляющие интерес и до сих пор.

Первый полный курс, с основательно разработанной теорией поверхностей, метода конического проецирования с решением обратных задач в перспективе издает проф. Макаров Н.И. (1824-1906).

Проф. В.И. Курдюмов (1858-1906) в своих работах приводит систематический и углубленный материал по всем основным методам изображений с практическим их использованием.

Проф. Н.А. Рынин (1887-1943) в многочисленных трудах способствует развитию прикладных вопросов в ряде областей.

Дальнейшие успехи в развитии и самосовершенствовании методов изображений достигаются в результате педагогической и научной работы видных ученых, которые являются руководителями организованных в эти годы самостоятельных кафедр начертательной геометрии в ведущих ВУЗах России. Помимо педагогического направления, создаются учебники и учебные пособия, защищаются докторские и кандидатские диссертации, организуются научные семинары и конференции.

Много труда в становлении начертательной геометрии и развитии научных достижений внесли профессора: Добряков А.И., Гордон В.О., Иванов Н.Н., Колотов С.М., Бубенников А.В., Четверухин Н.Ф., Рыжов Н.Н. и др.

Определенный вклад в научно-методическое обеспечение преподавания начертательной геометрии в технических вузах, в издание учебной литературы по совершенствованию методики преподавания данной дисциплины внесли белорусские ученые: Шабека Л.С., доктор педагогических наук, профессор БНТУ; Виноградов В.Н. доктор педагогических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы Республики Беларусь и др.

Цель начертательной геометрии – изучение геометрических образов (ГО), геометрических форм предметов окружающего нас мира, сочетание этих форм и их взаимного расположения. Умение отображать их на чертеже.

Начертательная геометрия относится к графической дисциплине и составляет теоретическую основу построения чертежа. При этом решается прямая и обратная задачи.

Прямая задача – построение проекций геометрического образа на плоскости по пространственному оригиналу (геометрические образы в пространстве называются оригиналами, а их изображения на плоскости – проекциями).

Обратная задача – восстановление оригинала (геометрического образа) в пространстве по проекционному чертежу.

2. Метод проекций

Для построения чертежей (изображений) применяется *метод(ы) проекций*, (метод(ы) проецирования). Требования, предъявляемые к чертежам (изображениям), привели к созданию определенного научного направления – «теории изображений». Чертежи (изображения), выполняемые на одной либо нескольких плоскостях проекций, по соответствующим направлениям классифицируют следующим образом: аксонометрические проекции; перспективные проекции; проекции с числовыми отметками; ортогональные проекции.

Проецирование – это построение проекции геометрического образа (оригинала) на плоскости проекций, путем мысленного проведения через все его точки проецирующих лучей до пересечения их с плоскостью проекций.

В зависимости от направления проведения проецирующих лучей различают:

1. *Центральное проецирование* (рис 1.1);

2. *Параллельное проецирование:*

а) *Косоугольное* (рис 1.2);

б) *Прямоугольное* (рис 1.3).

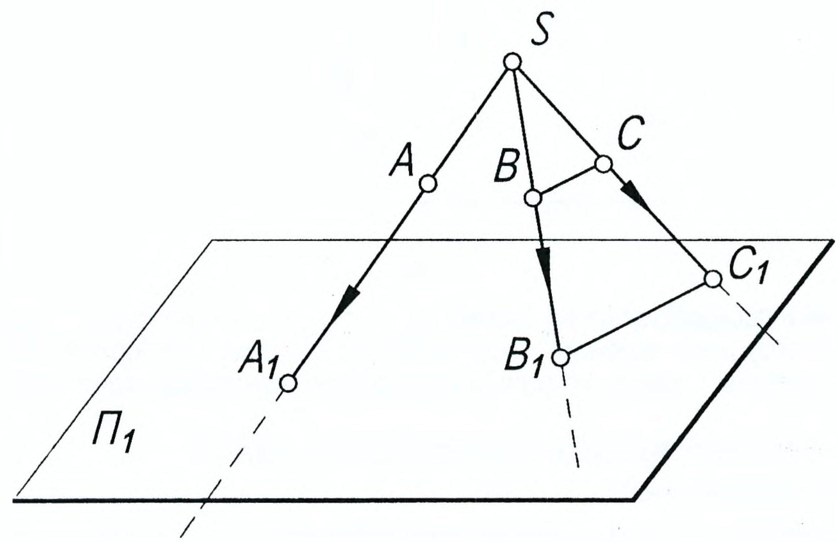


Рис. 1.1

Основой проецирования является аппарат проецирования.

Аппарат проецирования:

1. **(•)A, (•) B..., - геометрический образ (оригинал), объект проецирования;**
2. **(•) S – центр проекций (точка зрения);**
3. **SA – проецирующий луч;**
4. **$П_1$ – плоскость проекций;**
5. **(•)A_1, (•) B_1 ..., - проекции точек A,B ... на плоскость $П_1$.**

Центральное проецирование (коническое)- это проецирование, при котором проецирующие лучи проходят через одну точку (.) S (рис.1.1).

Таким образом, проекцией заданного объекта проецирования (в данном случае точки на плоскость) называется точка пересечения проецирующего луча, проходящего через объект проецирования (.) A..., с плоскостью проекций. Объектов проецирования может быть множество, центр проекций – один.

Множество лучей, проходящих через центр проекций (или точку зрения) образуют коническую поверхность, поэтому этот метод называется коническим.

Параллельное проецирование (цилиндрическое). При этом методе центр проекций находится в бесконечности или в несобственной точке. Проецирующие лучи параллельны заданному направлению S. В зависимости от направления проецирующих лучей параллельное проецирование подразделяется на:

а) Косоугольное (S не $\perp$ $П_1$) – рис.1.2

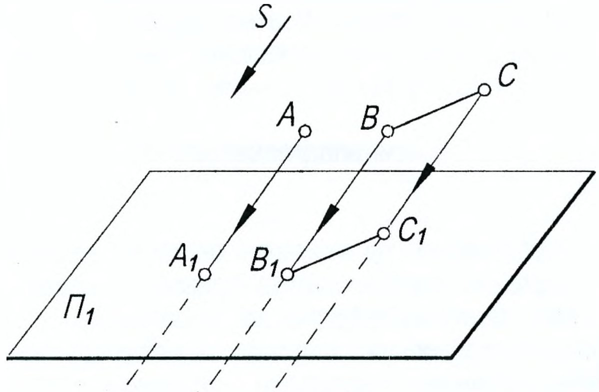


Рис. 1.2

б) Прямоугольное (ортогональное – $S \perp П_1$) – рис.1.3

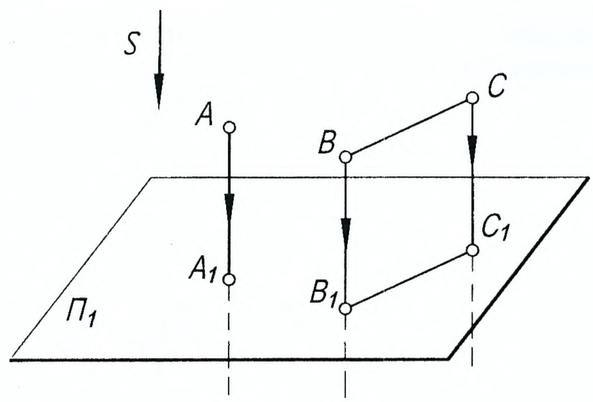


Рис. 1.3

Рассмотрев методы проецирования, можно заключить, что соответствие основных свойств геометрического образа (оригинала) и его проекций сохраняется при параллельном ортогональном проецировании. В связи с этим, целесообразно отразить некоторые характерные свойства ортогонального проецирования.

Основные свойства ортогонального проецирования

1. Проекция точки есть точка.
2. Проекция прямой есть прямая. Если прямая параллельна направлению проецирования, то проекцией прямой является точка.
3. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции линии.
4. Проекции параллельных прямых параллельны между собой.
5. Если отрезок прямой делится точкой в каком-то отношении, то и проекции отрезка делятся проекциями точки в том же отношении.
6. Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна ей, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажений.

Реализация аппарата проецирования (рис. 1.1, 1.2, 1.3), на примере построения чертежа объекта проецирования, представленного точкой и отрезком прямой линии, на одну плоскость проекций позволяет, в итоге, решать только лишь прямую задачу. Однако в начертательной геометрии изучаются абстрактные геометрические образы и более сложного характера - линии (прямые, кривые), плоскости, поверхности, при этом плоскость рассматривается как частный случай поверхности. При построении чертежей необходима их обратимость, т.е. решение не только прямой, но и обратной задачи. С этой целью вводятся две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций, а заданный геометрический образ в пространстве (оригинал) при построении его проекций интерпретируют с учетом присущих характеристик и свойств, учитывая при этом графическую терминологию, условные обозначения и символы.

3. Условные обозначения, символы и терминология

В основу разработки терминологии начертательной геометрии по отдельным разделам курса положены следующие методические особенности:

- системное расположение терминов, адекватная система понятий, построенных с учетом технических принципов, характерных для создания конструкторской документации;
- однозначность терминов, в результате которой за каждым термином закрепляется лишь одно техническое понятие и каждому понятию соответствует лишь один термин.

Формулировки определений, составленные на основании анализа признаков понятий, содержащихся в учебной литературе по начертательной геометрии, а также стандартов ЕСКД инженерной графики с учетом условных обозначений и символов, имеют следующую направленность:

- условные обозначения и символы в пространстве и на чертеже;
- совокупность необходимых терминов в пространстве и на чертеже;
- использование необходимых обозначений, символов и терминов при составлении алгоритмов решения задач на пространственных и плоскостных комплексных чертежах с последующим представлением их на соответствующем *носителе графической информации*.

В целом структурная схема разработки и представления графической информации выглядит следующим образом (рис. 1.4):

СТРУКТУРНАЯ СХЕМА
представления графической информации
начертательной геометрии и инженерной графики

Рис. 1.4

Носитель графической информации

Пространственный геометрический образ (оригинал) индивидуально или в совокупности с пространственным либо плоскостным комплексным чертежом образовывают геометрическую модель, которая может быть представлена на соответствующем носителе графической информации: чертежной доске, планшете, бумаге, электронном диске и т.д. Следует обратить внимание на то, что геометрический образ (оригинал) может рассматриваться при этом в двух вариантах: обозреваемый, т.е. видимый по отношению к наблюдателю, и абстрактный - не обозреваемый. В приведенных возможных вариантах формирования пространственной и плоскостной системы геометрических моделей и, в итоге, построения чертежей (изображений), геометрический образ (оригинал) всегда находится в соответствующей определенной системе координат по отношению к соответствующей системе плоскостей проекций. Это означает, что при постановке конкретной задачи представляется возможным определить положение геометрического образа (оригинала) в пространстве по пространственному либо плоскостному комплексному чертежу, воспроизведенному на соответствующем носителе графической информации. При построении чертежа на каком-либо носителе графической информации в начертательной геометрии применяются определённые условные обозначения, символы и термины.

Условные обозначения, символы

A, B, C M, 1, 2 - точки
a, b, c, d, h.,t - линии (прямые, кривые)
Φ, Θ, Ψ, Σ. Γ, Δ - поверхности, плоскости
$\bar{S}$ - направление проецирования
S - центр проецирования
i, j - ось вращения
$П_1, П_2, П_3$ - плоскости проекций
X, Y, Z — оси системы координат
O - начало системы координат
X - ось проекций в системе ($П_1, П_2$)
Y- ось проекций в системе ($П_1, П_3$)
Z - ось проекций в системе ($П_2, П_3$)
$A_1, A_2, A_3; a_1, a_2, a_3$ - проекции геометрических образов
α, β, γ - углы наклона прямых и плоскостей к плоскостям проекций
$Г_1,Σ_2$ - проецирующие плоскости
|*A,B*| - натуральная величина отрезка
[*A. B. D*] -ломаная линия, соединяющая точки *A, B,D*
$\widehat{\langle a,b\rangle}$ угол между прямыми
|*A, l*| - расстояние от точки *A* до прямой *l*
|*B, $П_1$*| - расстояние от точки *B* до плоскости проекций $П_1$
|*B, $П_2$*| - расстояние от точки *B* до плоскости проекций $П_2$
|*B. $П_3$*| - расстояние от точки *B* до плоскости проекций $П_3$
|α| - натуральная величина угла
≡ - тождественное совпадение
∩ - пересечение
= - равенство, результат действия *(A = a ∩ b)*
|| - параллельность
⊥ - перпендикулярность
∐ -проецирующие
$\underline{\cdot}$ - скрещивающиеся прямые
∈ - принадлежность
⊃ - включение в себя, проходит через
$\underline{U}$ -касание
⇒ - логическое следствие «если...то», «следовательно»
$\xrightarrow{S}$ - параллельное проецирование
Г - задать, взять, построить

Таблица 1.1

Название термина	Сущность термина
Обратимость чертежа	решение прямой и обратной задач начертательной геометрии.
Прямая задача	представление геометрического образа (ГО) в пространстве, и по нему, на основании известных методов проецирования, выполнение чертежа на соответствующих плоскостях проекций.
Обратная задача	по выполненному чертежу воспроизведение заданного ГО в пространстве.
Способы проецирования:	
• центральное (коническое)	все проецирующие лучи выходят из одной точки S, называемой центром проецирования (перспектива).
• параллельное (цилиндрическое)	если центр проецирования удалить в бесконечность, то проецирующие лучи станут параллельными.
• параллельное косоугольное	проецирующие лучи располагаются под любым углом к плоскости проекций (аксонометрические проекции).
• параллельное прямоугольное	проецирующие лучи располагаются под прямым углом к плоскости проекций (ортогональные проекции).
• проекции с числовыми отметками	предмет ортогонально проецируют на одну горизонтальную плоскость проекций По - плоскость нулевого уровня.
Эпюр Монжа	плоскостной комплексный чертеж, состоящий из двух и более изображений, полученный путём совмещения пространственного комплексного чертежа с одной плоскостью.
Инварианты проецирования	изображения, сохраняющие все свойства оригинала.
Множество	совокупность элементов, объединённых по каким-либо общим признакам, выделяющим его из других.
Геометрический образ (ГО)	фигура, которая в той или иной степени моделирует геометрические свойства реального объекта.
Плоскость проекций	плоскость, на которую осуществляется проецирование пространственного объекта. В ортогональном проецировании применяются три взаимно перпендикулярные плоскости проекций: горизонтальная $П_1$, фронтальная $П_2$, профильная $П_3$.
Ось проекций	прямая, полученная в результате пересечения двух плоскостей проекций.
Проецирующий луч	прямая, проходящая через пространственную точку до пересечения с плоскостью проекций.
Проекция точки	точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.
Линия проекционной связи	прямая, перпендикулярная к оси проекций (OX, OY. OZ) и соединяющая две проекции точки.
Координаты точки	величины расстояний заданной точки от плоскостей проекций по осям X, Y, Z.
Биссектриса связи	прямая, проходящая через начало координат под углом 45°.
Пространственный комплексный чертеж ГО	совокупность ортогональных проекций ГО на две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.
Плоскостной комплексный чертеж ГО	геометрическая модель пространственного комплексного чертежа.

Продолжение таблицы 1.1

Название термина	Сущность термина
Способы преобразования комплексного чертежа (используются при решении метрических и позиционных задач)	
• замена плоскостей проекций	пространственное положение заданных ГО остаётся неизменным, а вводятся новые дополнительные плоскости проекций.
• вращения	при неизменном положении основных плоскостей проекций изменяется положение заданных ГО относительно этих плоскостей.
Определитель ГО	совокупность независимых геометрических элементов, определяющих указанный геометрический образ.
След ГО	пересечение ГО с плоскостью проекций.
Проецирующий ГО	ГО, основная проекция которого представляет измерение на единицу меньше, чем заданный геометрический образ по условию.
Конкурирующие точки	точки, принадлежащие скрещивающимся прямым, проекции которых совпадают только на одной из плоскостей проекций.
Алгоритм	решение задачи путем выполнения определенного цикла операций.
Позиционные свойства ГО	свойства, которые отражают взаимное положение, взаимную принадлежность и взаимный порядок ГО.
Метрические свойства ГО	свойства, отражающие численные характеристики ГО - расстояния, углы, площади и т. п.
Поверхность	• непрерывное двухпараметрическое множество точек; • геометрический образ, имеющий определённую закономерность, выражаемую уравнением; • непрерывное множество положений линии, перемещающейся в пространстве по определённому закону (кинематический способ образования поверхности).
Каркас поверхности	множество линий, ей принадлежащих и однозначно определяющих поверхность.
Элемент каркаса поверхности	линия каркаса (образующая, направляющая).
Определитель поверхности	совокупность геометрических элементов и условий, однозначно задающих поверхность в пространстве и на чертеже.
Параметр каркаса поверхности	зависимость, связывающая элементы каркаса поверхности.
Непрерывный каркас поверхности	непрерывное изменение параметра каркаса поверхности.
Дискретный каркас поверхности	дискретное изменение параметра каркаса поверхности.
Развертка пространственной кривой линии	плоская кривая, в которую преобразована пространственная кривая без изменения ее длины.
Аппроксимация кривой линии Развертка поверхности	сглаживание участков кривой линии, применяя определённые свойства и методы.

Продолжение таблицы 1.1

Название термина	Сущность термина
Плоский элемент поверхности	плоская фигура, образованная последовательным совмещением всех плоских элементов поверхности с одной плоскостью.
Развертываемые поверхности	элемент заданной поверхности, у которой смежные образующие параллельны или пересекаются, т.е. образуют плоскость.
Неразвертываемые поверхности	многогранные поверхности; линейчатые кривые поверхности, у которых смежные образующие параллельны или пересекаются (цилиндрические, конические и торсовые).
Соосные поверхности	поверхности, у которых смежные образующие скрещиваются (криволинейные поверхности).
	поверхности вращения с общей осью вращения.
Характерные (опорные) точки линии пересечения поверхностей	наивысшие и наинизшие точки: точки видимости (точки, отделяющие видимую часть линии от не-видимой): точки пересечения ребер многогранной поверхности с другой поверхностью; точки, проекции которых являются особыми точками для проекции линии пересечения (точки перегиба и т. д.).
Числовые отметки	числа, указывающие расстояния от точек проецируемого объекта до плоскости нулевого уровня.
Заложение отрезка прямой линии	проекция этого отрезка на плоскость.
Превышение отрезка прямой линии	разность числовых отметок точек, ограничивающих отрезок.
Интервал отрезка прямой линии	величина заложения, которая соответствует единице превышения.
Градуирование прямой линии	определение на прямой линии точек, отметки которых выражены последовательными целыми числами.
Уклон прямой линии	отношение превышения данного отрезка к его заложению. Он равен тангенсу угла наклона отрезка к плоскости проекций.
Горизонталь	линия, все точки которой имеют одинаковые числовые отметки.
Масштаб уклона плоскости	проградуированная горизонтальная проекция линии наибольшего ската данной плоскости.
Линия наибольшего ската плоскости	линия, принадлежащая данной плоскости и перпендикулярная её горизонталям.
Поверхность постоянного ската	огибающая поверхность, образованная движением конуса вращения с вертикальной осью, при этом вершина конуса перемещается по направляющей пространственной кривой линии.
Берг-штрихи	чередующиеся короткие и удлинённые штрихи, проведённые перпендикулярно горизонталям, которые указывают направление уклона плоскости и поверхности.

Выводы

Рассмотрев методы проецирования, можно заключить, что:

- при построении и формировании чертежа (изображения) используется метод проекций;
- чертеж должен быть обратимым, наглядным, выполнен и оформлен на носителе графической информации в соответствии с существующими требованиями ГОСТов ЕСКД и СПДС.

ЛЕКЦИЯ 2

Тема. Аксонометрические проекции

Вопросы:

1. Сущность метода аксонометрического проецирования;
2. Стандартные аксонометрические проекции;
3. Примеры построения аксонометрических проекций геометрических фигур.

1. Сущность метода аксонометрического проецирования

Чтобы получить представление о предмете, приходится одновременно рассматривать несколько его изображений. Воспроизвести предмет в целом позволяет построение наглядного изображения. Такое изображение получается путем параллельного проецирования на одну плоскость проекций (картинную плоскость) при условии, что изображаемый предмет соответствующим образом расположен относительно этой плоскости. Это изображение предмета называют аксонометрической проекцией или аксонометрией.

При построении аксонометрического изображения используется аппарат аксонометрического проецирования, реализация которого представлена на рис.2.1.

Аппарат аксонометрического проецирования

OXYZ – система пространственных прямоугольных (декартовых) координатных осей;

α – картинная плоскость (плоскость аксонометрического чертежа);

S – направление проецирования;

(.) A – объект проецирования (оригинал);

(.) A^0 – главная аксонометрическая проекция (.) A;

(.) A^I – первичная проекция (.) A;

(.) A_{10} – вторичная проекция (.) A;

Рассмотрим реализацию аппарата аксонометрического проецирования на примере (рис. 2.1).

Объект проецирования вместе с осями прямоугольных (декартовых) координат параллельно проецируется на картинную плоскость (или плоскость аксонометрических проекций).

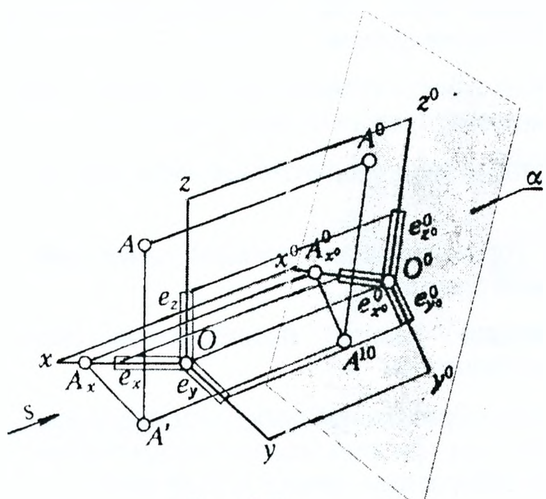


Рис. 2.1

Пусть имеется система пространственных координатных осей OXYZ и отнесенная к ним пространственная точка **A**. Спроецируем полученную геометрическую модель на произвольную плоскость **α**, принятую за картинную. Стрелка S указывает направление проецирования.

Полученный чертеж в плоскости **α** называют аксонометрическим, а проекция точки A – $\mathbf{A^0}$ называется главной (аксонометрической) проекцией точки A, точка $\mathbf{A^{10}}$ – вторичной проекцией точки A (рис. 2.1). Исходя из этого, в аксонометрии имеются два поля проекций: поле главных и поле вторичных проекций. Для того, чтобы на аксонометрических проекциях можно было решать задачи относительно изображаемых геометрических фигур, на аксонометрическом чертеже указывают проекции координатных осей с изображенными на них отрезками $\mathbf{e^0_x{}^0}$, $\mathbf{e^0_y{}^0}$, $\mathbf{e^0_z{}^0}$ – проекциями натурального масштаба $\mathbf{e}$.

Проекции $\mathbf{e^0_x{}^0}$, $\mathbf{e^0_y{}^0}$, $\mathbf{e^0_z{}^0}$ натурального масштаба $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$, $\mathbf{e_z}$ называют аксонометрическим масштабом по осям $\mathbf{x^0}$, $\mathbf{y^0}$, $\mathbf{z^0}$.

Положение точки **A** в пространстве относительно натуральной системы координат OXYZ определяется пространственной координатной ломаной $\mathbf{OA_xA^1A}$ (рис. 2.1). Аксонометрическая проекция $\mathbf{A^0}$ точки **A** определяется плоской координатной ломаной, у которой звено $O^0\,A^0_x{}^0$ совпадает по направлению с осью $\mathbf{x^0}$, а $A^0_x{}^0A^{10}$ и $A^{10}A^0$ параллельны соответственно осям $\mathbf{y^0}$ и $\mathbf{z^0}$.

В общем случае отрезки $O^0A^0_x{}^0$, $A^0_x{}^0A^{10}$, $A^{10}A^0$ не равны между собой, и ни один из них не равен натуральному масштабу **e.** Отношения $\mathbf{\kappa_x{}^0} = O^0A^0_x{}^0{:}OA_x$; $\mathbf{\kappa_y{}^0} = A^0_x{}^0A^{10}{:}A_xA^1$; $\mathbf{\kappa_z{}^0} = A^{10}A^0{:}A^1\,A$ называют показателями (коэффициентами) искажений по аксонометрическим осям.

Очевидно, принимая различное взаимное расположение натуральной системы координат и картинной плоскости, задавая разные направления проецирования, можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся друг от друга как направлением аксонометрических осей, так и величиной коэффициентов искажения вдоль этих осей. Справедливость этого утверждения была доказана немецким геометром Карлом Польке (1851 г.). Теорема Польке утверждает, что три отрезка произвольной длины, лежащих в одной плоскости и выходящих из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала.

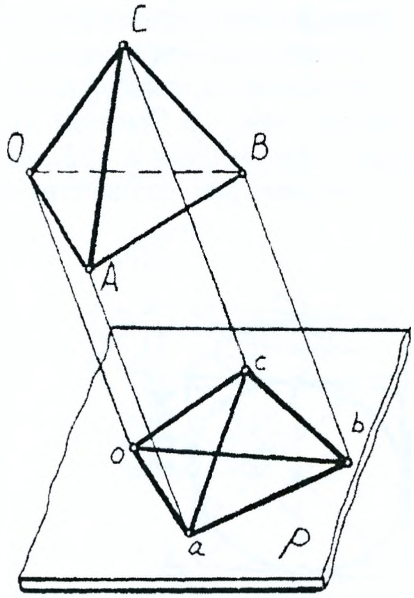


Рис. 2.2

Позже Г. Шварц, обобщив теорему К. Польке, доказал, что любой полный четырёхугольник на плоскости всегда можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра, подобного любому заданному (рис. 2.2).

На основании теоремы Польке-Шварца аксонометрические оси и коэффициенты искажения по ним могут выбираться произвольно. В связи с этим установлено:

1. Коэффициенты искажения по аксонометрическим осям можно принять: различными для всех осей; одинаковыми для каких-либо двух осей; одинаковыми для всех аксонометрических осей. В первом случае аксонометрическую проекцию называют триметрической, во втором – диметрической и в третьем – изометрической.

2. В зависимости от угла между направлением проецирования и картинной плоскостью аксонометрия может быть прямоугольной (ортогональной), если этот угол прямой; в противном случае ее считают косоугольной.

На основании выше изложенного можно заключить о большом разнообразии аксонометрических проекций, поэтому ГОСТ 2.317-69 ограничивает разнообразие аксонометрий и рекомендует стандартные аксонометрические проекции.

2. Стандартные аксонометрические проекции

В инженерной практике для наглядного изображения предметов наибольшее распространение получили прямоугольная изометрия и прямоугольная диметрия.

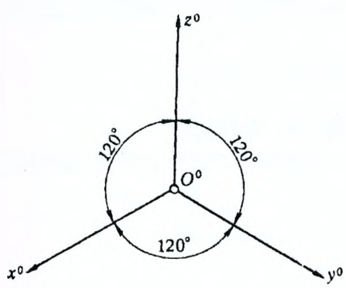


Рис. 2.3

В прямоугольной изометрии коэффициенты искажения размеров по всем осям одинаковые. Это условие обеспечивается в том случае, когда все оси составляют один и тот же угол с аксонометрической плоскостью проекций, что, в свою очередь, обеспечивает равенство углов между аксонометрическими осями (рис. 2.3).

В прямоугольной диметрии оси занимают положение, приведенное на рис. 2.4 а.

На рис 2.4 б показано графическое приближенное построение углов, равных $7^0 10'$ и $41^0 25'$, с помощью тангенсов этих углов, равных приведенному соотношению соответственно- 1/8 и 7/8.

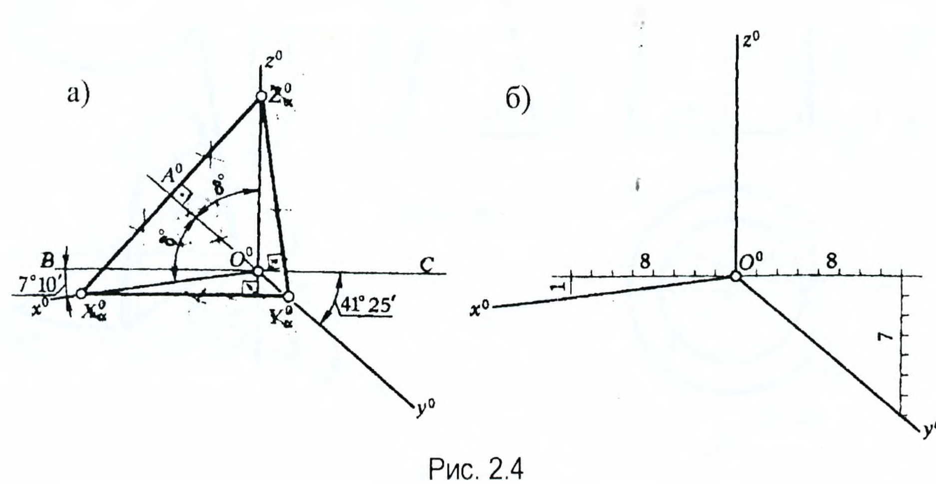


Рис. 2.4

В аксонометрических проекциях (изометрических или диметрических) ось Z принято располагать вертикально.

В теории аксонометрических проекции доказывается, что коэффициенты искажений по аксонометрическим осям X, Y, Z для прямоугольной изометрии равны 0,82; для прямоугольной диметрии: по двум осям X, Z – 0,94, по третьей оси Y – 0,47. При построении аксонометрических проекций пользоваться точными коэффициентами искажений неудобно. Поэтому используют приведенные коэффициенты рекомендованные ГОСТ 2.317-69. Приведенные стандартные коэффициенты в прямоугольной изометрии по всем трем осям X, Y, .Z равны 1(единице). Приведенные стандартные коэффициенты в прямоугольной диметрии по осям X, Z равны 1 (единице), а по оси Y коэффициент искажения равен - 0,5. При этом, изображение предмета, построенного в прямоугольной изометрии, получается увеличенным в 1,22 раза, т.е. - (1/0,82) по сравнению с действительными размерами. В прямоугольной диметрии соответственно увеличение происходит в 1,06 раза, т.е. - (1/0,94).

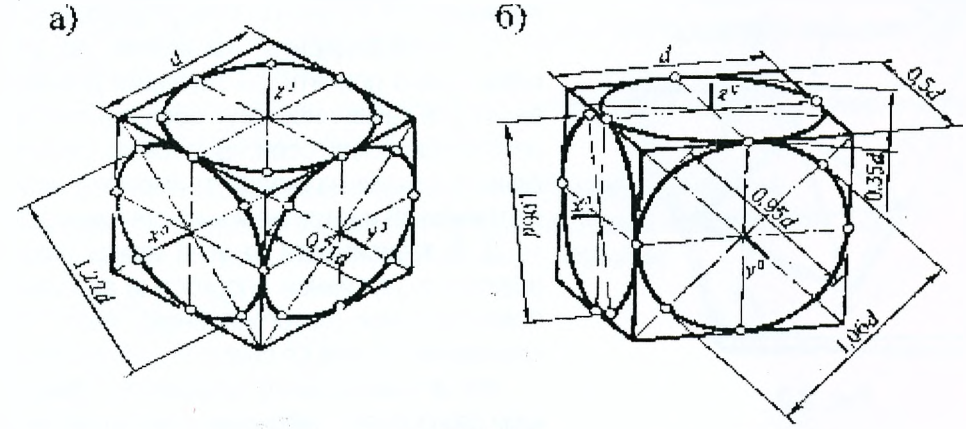


Рис. 2.5

На рис.2.5а показана прямоугольная изометрическая, а на рис. 2.5б – прямоугольная диметрическая проекция куба, в грани которого вписаны окружности. На этом же рисунке указаны величины больших и малых осей эллипса в зависимости от диаметра окружности, проекцией которой он является.

Из приведенных примеров видно, что направления больших осей эллипсов перпендикулярны свободным аксонометрическим осям, а малые оси эллипсов совпадают по направлению со свободными аксонометрическими осями.

Для упрощения построения эллипса на чертеже его геометрию представляют овалом.

3. Примеры построения аксонометрических проекций геометрических фигур

На рис. 2.6 показано построение стандартной изометрической проекции поверхности усеченного конуса по ортогональным его проекциям.

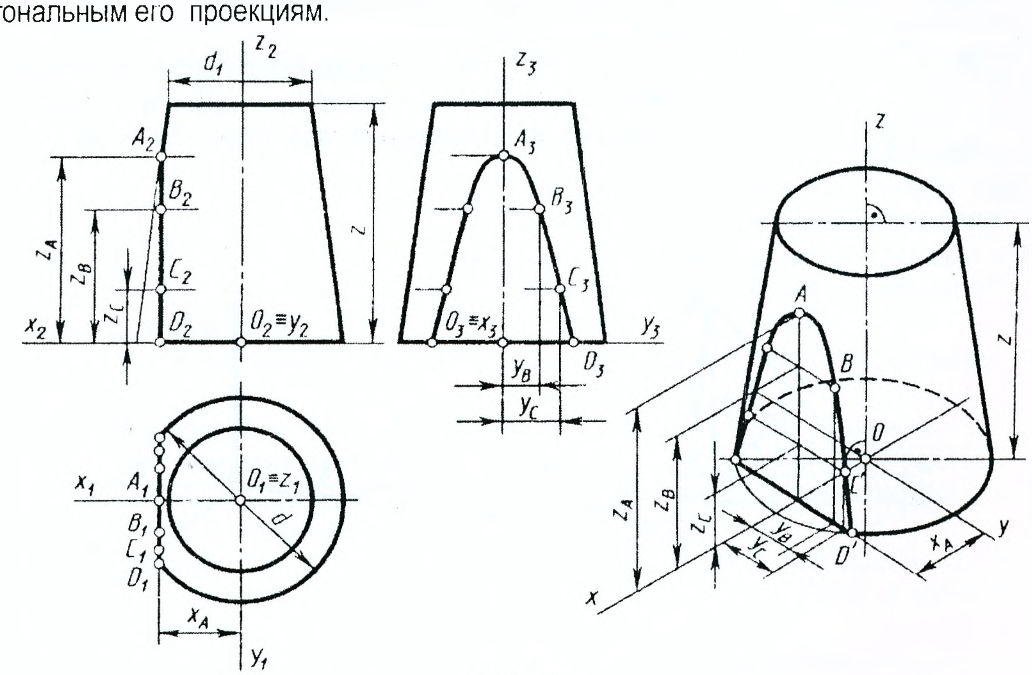


Рис. 2.6

На рис. 2.7 приведено построение изометрической проекции поверхности цилиндра.

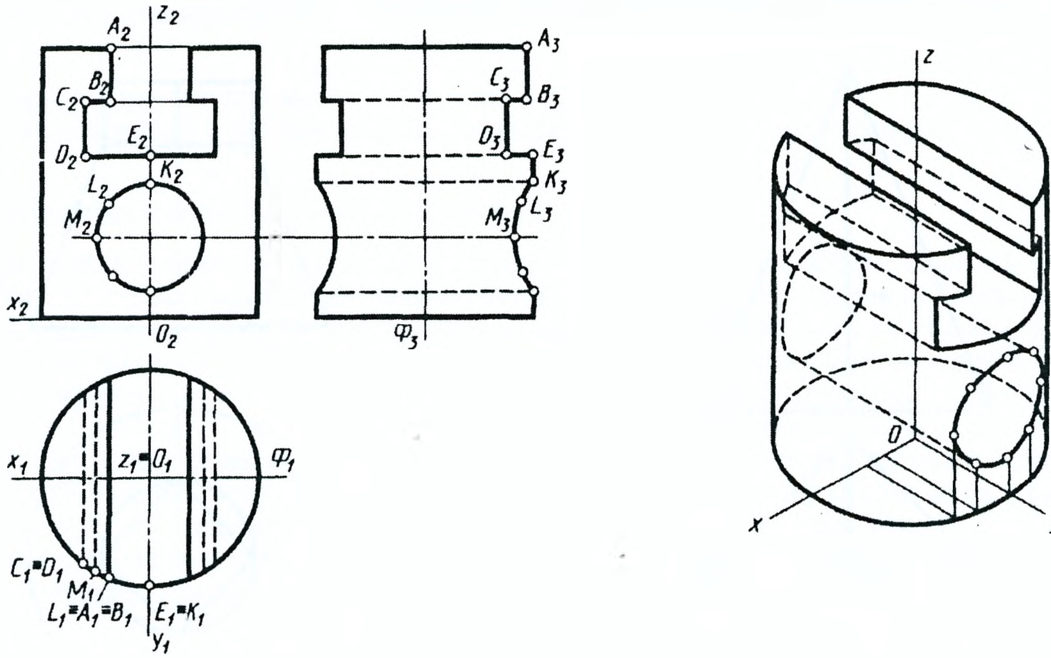


Рис.2.7

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Построить изометрическое изображение геометрических тел.

а) б)

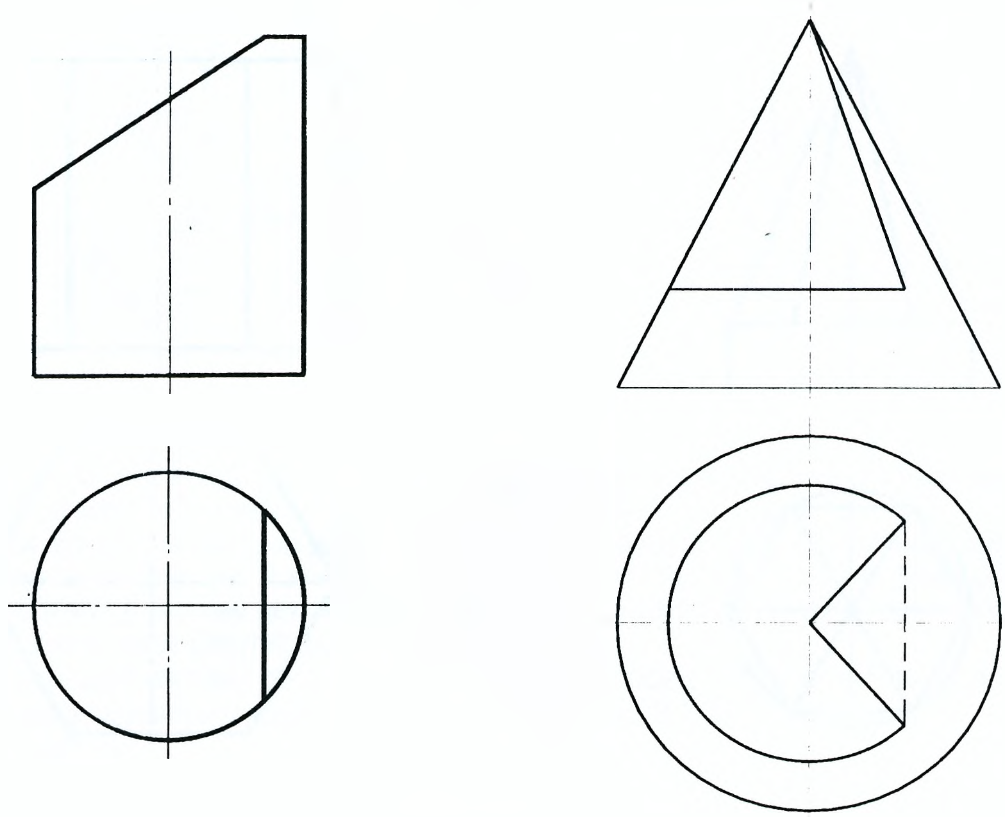
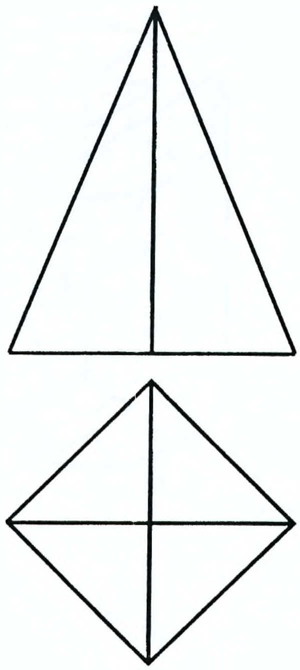


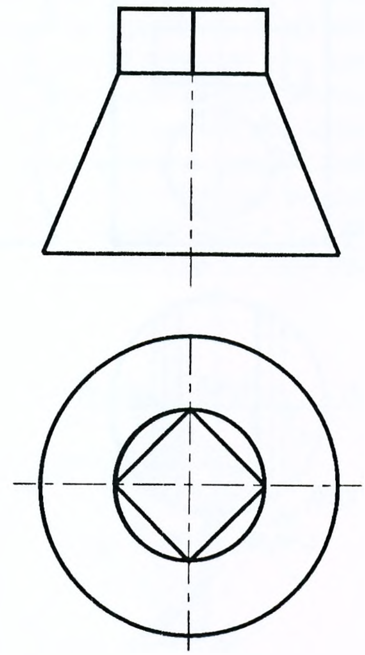
Рис. 2.8

Задача 2. Построить диметрическое изображение геометрических тел.

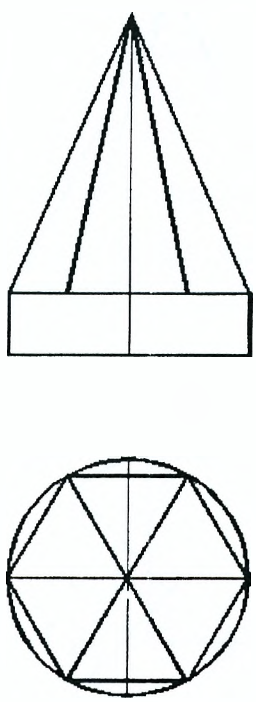
а)



б)



в)



г)

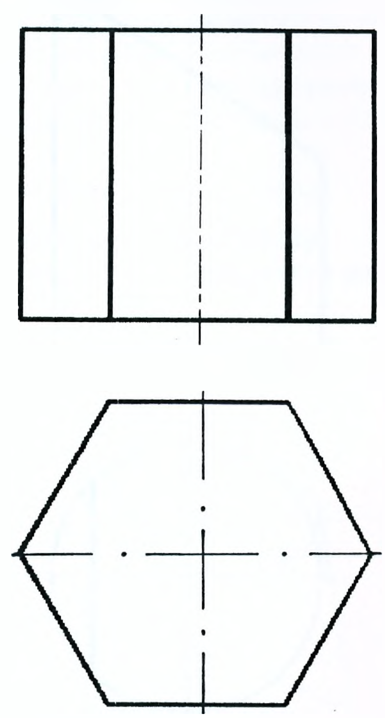


Рис. 2.9

ЛЕКЦИЯ 3

Тема. Ортогональное проецирование точки

Вопросы:

1. Образование комплексного чертежа. Эпюр Монжа;
2. Проецирование точки в системе взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Выводы.

1. Образование комплексного чертежа. Эпюр Монжа

Рассматриваемый геометрический образ ГО (оригинал) расположен в пространстве. Присвоим оригиналу название *«точка»* и охарактеризуем ее особенности: не имеет измерений; видима либо невидима по отношению к наблюдателю; находится в пространстве в соответствующей системе плоскостей проекций с координатными осями проекций. Оси проекций являются системой отсчета при построении чертежа. Точка в совокупности с плоскостями проекций представляет собой определенную жесткую систему, что дает возможность построить чертеж оригинала (проекции) точки, методом ортогонального проецирования. Ортогональное проецирование точки осуществляется на две либо три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Для наглядности и удобства при построении чертежа осуществляется переход от пространственного комплексного чертежа (рис. 3.1, а) к плоскостному комплексному чертежу (рис. 3.1, б), (чертеж - эпюр Монжа). Такой переход при построении чертежа осуществляется путем соответствующего совмещения плоскостей проекций в одну плоскость (поле проекций), разграниченное координатными осями.

а) б)

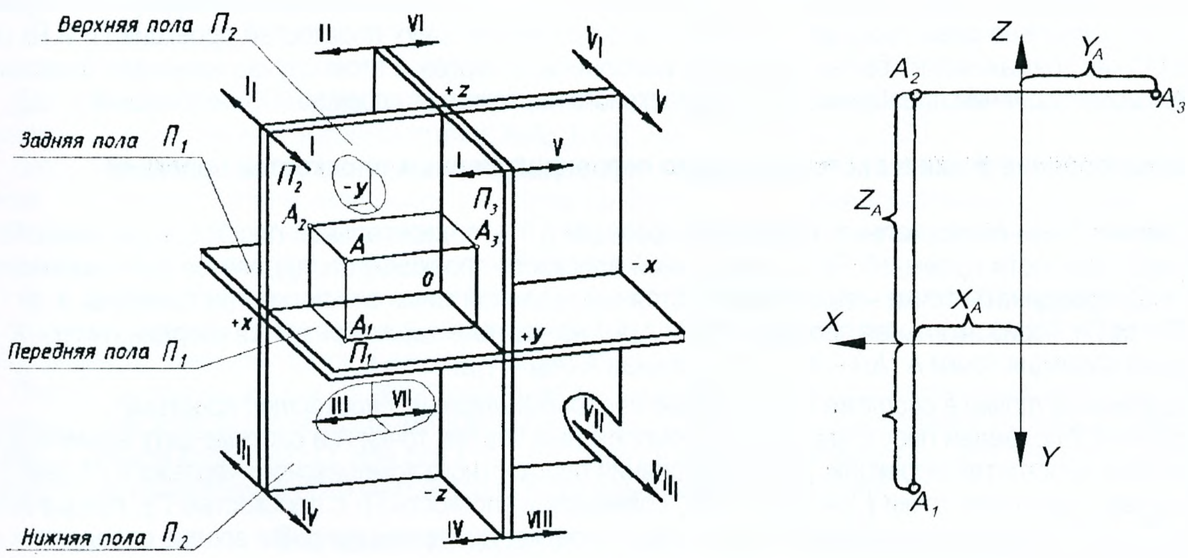


Рис. 3.1

Проанализируем более подробно особенности образования пространственного комплексного чертежа (рис. 3.1, а) и плоскостного комплексного чертежа (рис. 3.1,б).

Рассмотрим ортогональное проецирование точки (.) А в соответствующей системе взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. В зависимости от конкретно поставленной задачи проецирование точки может осуществляться в системе двух взаимно перпендикулярных проекций либо, при необходимости, в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Примем следующую систему обозначений и терминов плоскостей проекций, точек и осей:

- Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций (рис. 3.1, а):

- $П_1$ – горизонтальная;
- $П_2$ - фронтальная;
- $П_3$ – профильная.

При этом плоскости $П_1$ и $П_2$ делят пространство на 4 четверти (I, II, III, IV), а плоскости $П_1$, и $П_2$, и $П_3$ – на 8 октантов.

* Геометрический образ (точка А) проецируется на плоскости проекций перпендикулярными прямыми, которые называются проецирующими лучами;

* Точки пересечения проецирующих лучей с плоскостями проекций называются проекциями (изображениями) точек соответственно:

A_1 – горизонтальной;
A_2 - фронтальной;
A_3 - профильной.

* Линия пересечения плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ – называется осью проекций OX. Пересечение плоскостей проекций $П_1$ и $П_3$ образует ось проекций OY, а пересечение $П_3$ и $П_2$ – ось проекций OZ. Оси проекций фиксируют положение плоскостей проекций, они могут иметь как положительное, так и отрицательное направление.

* Совмещением плоскостей $П_1$ и $П_3$ с плоскостью $П_2$ образуется комплексный плоскостной чертеж (эпюр Монжа) (рис. 3.1 б). На этом чертеже выполняются все графические построения.

* Величины расстояний точки от плоскости проекций называются координатами точки А:

- X_a – абсцисса точки А, определяет расстояние точки А от профильной плоскости проекций $П_3$;
- Y_a – ордината точки А, определяет расстояние точки А от фронтальной плоскости проекций $П_2$;
- Za –аппликата точки А, определяет расстояние точки А от горизонтальной плоскости проекций $П_1$.

Если известны числовые значения, выражающие координаты точки А, например X=15; Y=10; Z=12, то координаты точки А записывают так А (15,10,12).

* Прямая, перпендикулярная к осям проекций и соединяющая разноименные проекции точки А, называется линией проекционной связи.

* Горизонтальная проекция точки А (A_1) всегда расположена на одной линии проекционной связи с фронтальной проекцией точки А (A_2) перпендикулярно оси OX;

* Фронтальная проекция точки А (A_2) всегда расположена на одной линии проекционной связи с профильной проекцией точки А(A_3) перпендикулярно оси OZ.

Важным свойством при ортогональном проецировании является возможность варьировать проекциями ГО относительно осей проекций. В связи с этим в системе двух плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ ось проекций OX как прямая может быть на чертеже исключена, а чертеж в этом случае называют безосным. Однако при использовании преобразования комплексного чертежа ось проекций OX необходима.

2. Проецирование точки в системе взаимно перпендикулярных плоскостей проекций

Положение точки относительно плоскостей проекций ($П_1$ - горизонтальной плоскости проекций, $П_2$ – фронтальной плоскости проекций, $П_3$ – профильной плоскости проекций) определяется значением координат X, Y, Z. Координаты точки – величины расстояний заданной точки от плоскостей проекций: X- от $П_3$; Y- от $П_2$; Z – от $П_1$. Горизонтальная проекция точки А(A_1) на чертеже характеризуется координатами – X, У; фронтальная проекция точки А (A_2) – X, Z; профильная А (A_3) – Y,Z.

Проецирование точки в системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций

На рисунке 3.2 приведен пространственный комплексный чертеж точки А в системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Для образования плоскостного комплексного чертежа в общем, а в данном случае какой-либо точки (.) А (рис. 3.2б), совмещают плоскость $П_1$ с плоскостью $П_2$, поворачивая плоскость $П_1$ на 90 градусов вокруг оси OX по часовой стрелке. Две проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве.

а) б)

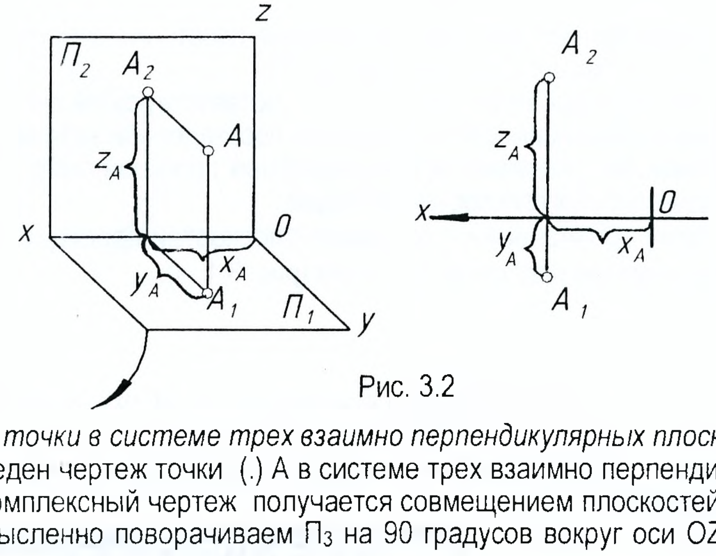


Рис. 3.2

Проецирование точки в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций

На рис. 3.3 приведен чертеж точки (.) А в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Плоскостной комплексный чертеж получается совмещением плоскостей проекций $П_3$ и $П_1$ с плоскостью $П_2$, для чего мысленно поворачиваем $П_3$ на 90 градусов вокруг оси OZ против часовой стрелки, а плоскость $П_1$ мысленно опускаем вниз.

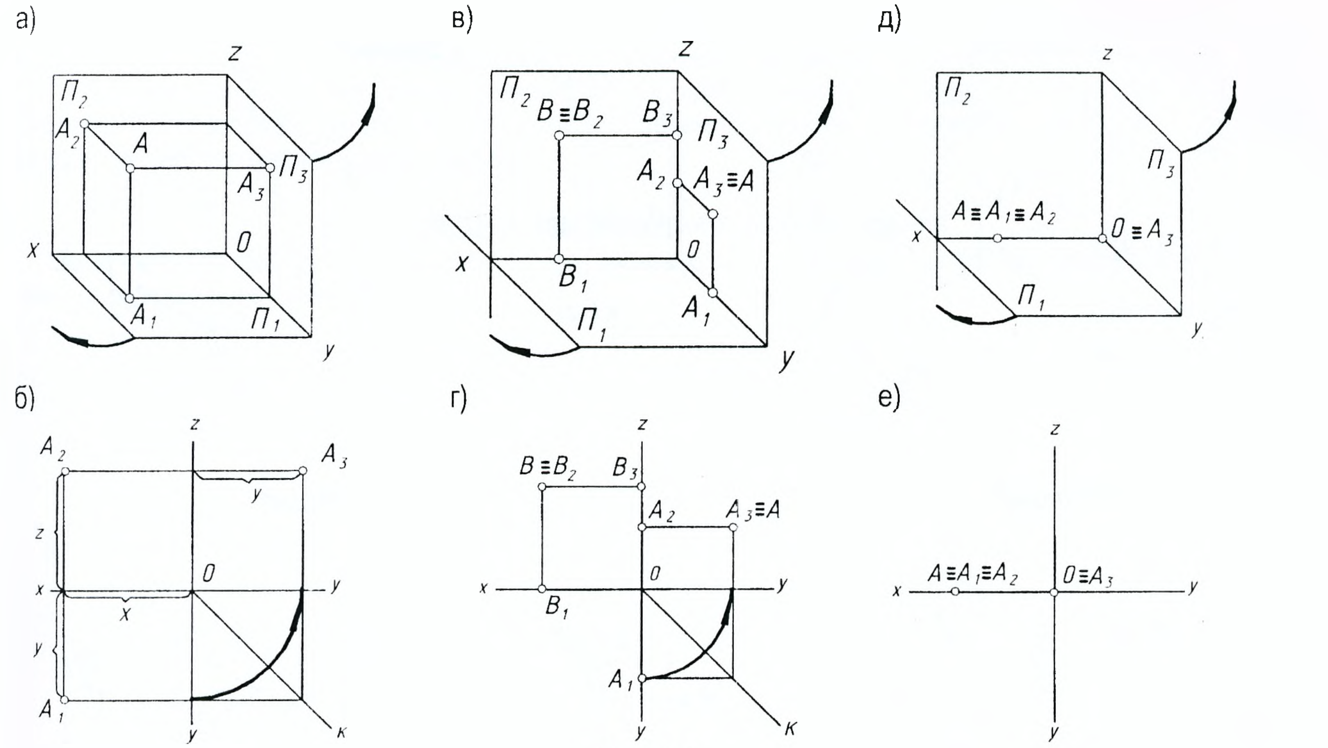


Рис. 3.3

Две проекции точки принадлежат одной линии проекционной связи, которая перпендикулярна к оси проекций в представленном соответствии: $A_1A_2 \perp OX$; $A_1A_3 \perp OY$; $A_2A_3 \perp OZ$..

Построить профильную проекцию точки A_3 по двум заданным A_1 и A_2 можно использовать: дугу окружности с центром в начале координат, т.е. точке O; биссектрису связи (постоянную чертежа, прямую К); координатный способ, отложив координату Y от оси OZ по линии проекционной связи, проведенной из A_2 влево, от оси OZ, если $Y > 0$, и вправо от оси OZ, если $Y < 0$ (рис. 3.4).

Если одна координата заданной точки равна 0, значит точка принадлежит плоскости проекций (рис. 3.3 в, г). Если две координаты точки равны 0, точка принадлежит оси проекций (рис. 3.3 д, е). Если три координаты точки равны 0, точка находится в начале координат.

Плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ делят пространство на 4 четверти, а плоскости проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$ – на 8 октантов. При этом положительными направлениями осей от начала координат считают: для оси OX – влево от начала координат O, для оси OY – в сторону наблюдателя (вперед), для оси OZ – вверх; противоположные направления осей считаются отрицательными (рис. 3.4, табл. 1).

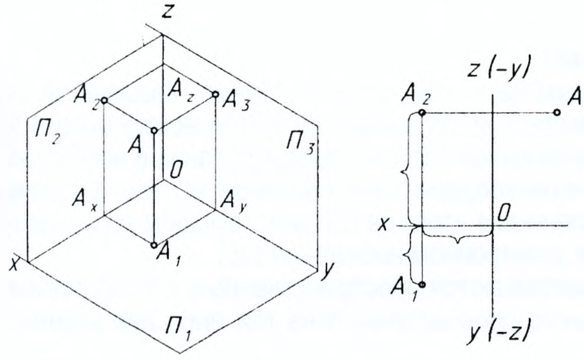
Значения координат проекций точек в октантах

Таблица 3.1

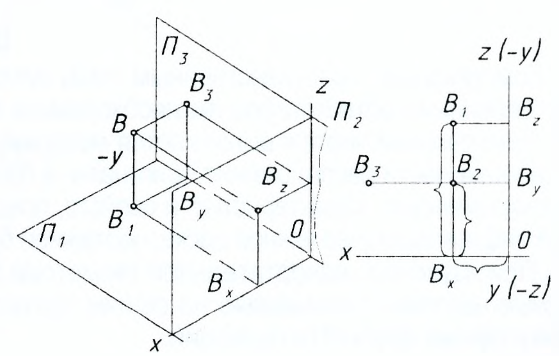
Октанты	X	Y	Z	Октанты	X	Y	Z
1	+	+	+	IY	-	+	+
II	+	-	+	YI	-	-	+
III	+	-	-	YII	-	-	-
IY	+	+	-	YIII	-	+	-

Пространственный и плоскостной комплексный чертеж точки в 1 – 8 октантах

1 октант



2 октант



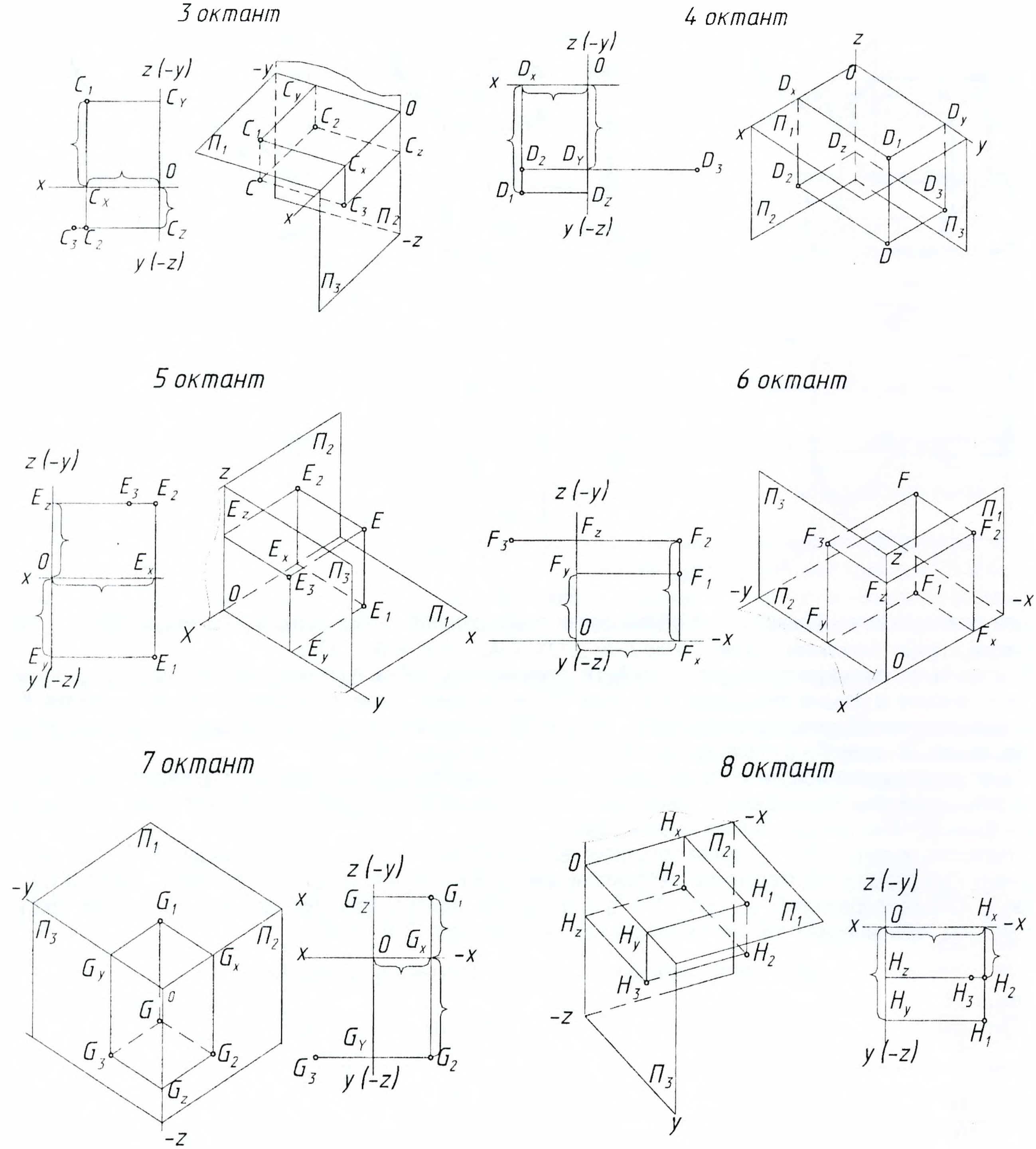


Рис. 3.4

Выводы

1. Комплексным, пространственным либо плоскостным чертежом (эпюром Монжа) называется чертеж, представленный соответствующим необходимым количеством изображений геометрического образа (оригинала). Комплексный чертеж выполняется методами определенной системы проецирования и необходим для определения места расположения оригинала в пространстве координатным способом, а также установления его геометрических характеристик и свойств, представленных в итоге на соответствующем носителе графической информации (чертежной доске, чертежной бумаге, электронном носителе и т.д.).

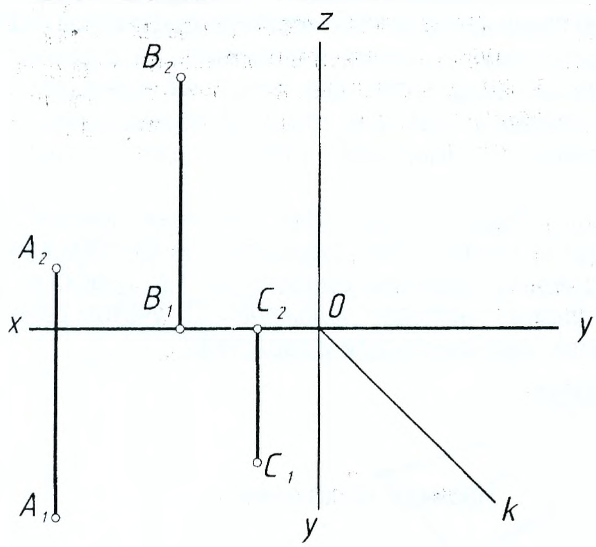
2. При изучении начертательной геометрии рассматриваются пространственные и плоскостные комплексные чертежи, полученные на основе ортогонального проецирования на три либо две взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

3. Заданный геометрический образ в пространстве (оригинал) всегда находится в соответствующей системе координат относительно установленных плоскостей проекций с определенной начальной точкой отсчета.

4. Введение второй фронтальной плоскости проекций $П_2$ перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций $П_1$ позволяет осуществить переход к обратимому чертежу, так как две проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить координаты точек. Записать их в таблицу. Построить профильные проекции точек и их пространственные чертежи.



	X	Y	Z
A			
B			
C			

Рис. 3.5

Задача 2. Построить недостающие проекции точек.

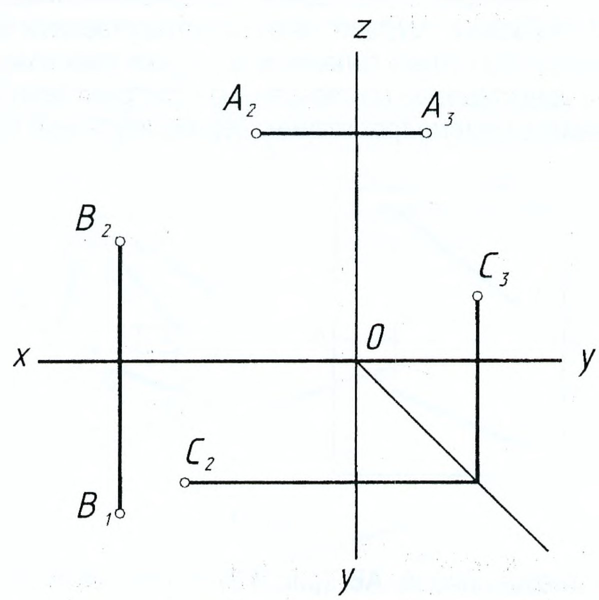


Рис. 3.6

ЛЕКЦИЯ 4

Тема. Прямая линия

Вопросы:

1. Определитель и классификация прямых линий;
2. Прямые общего положения, характерные их особенности и свойства;
3. Прямые частного положения, характерные их особенности и свойства;
4. Взаимное положение двух прямых.

1. Определитель и классификация прямых линий

Геометрический образ (оригинал) в виде *прямой линии* отождествляется с бесконечностью ее в пространстве. Однако для графического представления прямой линии на каком- либо носителе графической информации, определения характерных особенностей и свойств, необходимо ее выявить и ограничить, т.е. определить заданную прямую. В связи с этим, *определитель* прямой линии, представляет *две точки*, ей принадлежащие. Поэтому для задания прямой линии на чертеже необходимо указать две точки, ей принадлежащие. Прямая (либо отрезок прямой линии) имеет только один параметр измерения – длину и поэтому относится к однопараметрическому геометрическому образу.

Рассматриваемая прямая линия (оригинал), находящаяся в пространстве, может занимать различное положение, относительно плоскостей проекций. В связи с этим существует классификация прямых линий, согласно которой, (оригиналы и, соответственно, проекции оригиналов, т.е. проекции прямых), подразделяются на: *прямые общего положения; прямые частного положения.* С учетом данной классификации определяются характерные особенности, закономерности и свойства.

ПРЯМЫЕ

Общего положения — Частного положения

Частного положения: уровня — проецирующие

2. Прямые общего положения, характерные их особенности и свойства

Прямые общего положения – это прямые, не перпендикулярные и не параллельные ни одной из плоскостей проекций. На рис. 4.1(а, б) изображены соответственно пространственный и плоскостной комплексные чертежи (проекции) прямой (оригинала) AB общего положения в системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. На рис.4.1(в, г) представлены соответственно пространственный и плоскостной комплексные чертежи прямой общего положения в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

а) б) в) г)

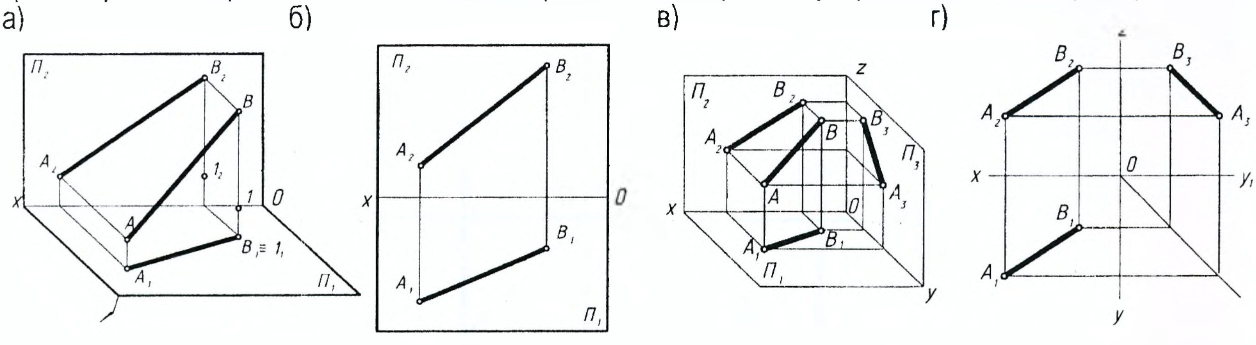


Рис. 4.1

Натуральная величина отрезка прямой **AB**, (рис. 4.2) на плоскости проекций $П_1$, это гипотенуза *прямоугольного треугольника*, одним из катетов которого является горизонтальная проекция отрезка A_1B_1, а другой катет представляет собой разность недостающих координат (Δ Z) **AB** на плоскости $П_1$, т.е. разность концов фронтальной проекции A_2 B_2.

Угол наклона отрезка прямой к соответствующей плоскости проекций является угол между его проекцией на данную плоскость и натуральной величиной рассматриваемого отрезка (рис.4.2).

След прямой – точка пересечения прямой с плоскостью проекций (фронтальный след прямой в основном принято обозначать - N, а горизонтальный след- M), однако при этом допускаются и другие обозначения (рис. 4.3).

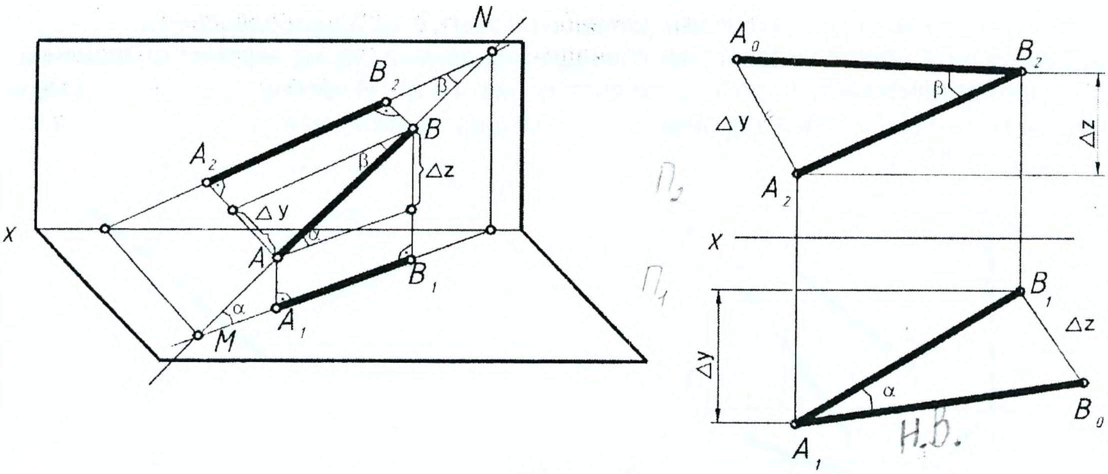


Рис. 4.2

Чтобы построить горизонтальный след М - прямой АВ (рис. 4.4), необходимо: фронтальную проекцию A_2B_2 прямой продолжить до пересечения с осью ОХ и получить фронтальную проекцию горизонтального следа M_2. Из полученной точки провести линию проекционной связи до пересечения с продолжением горизонтальной проекции прямой. В результате получаем горизонтальный след М, совпадающий с его горизонтальной проекцией M_1.

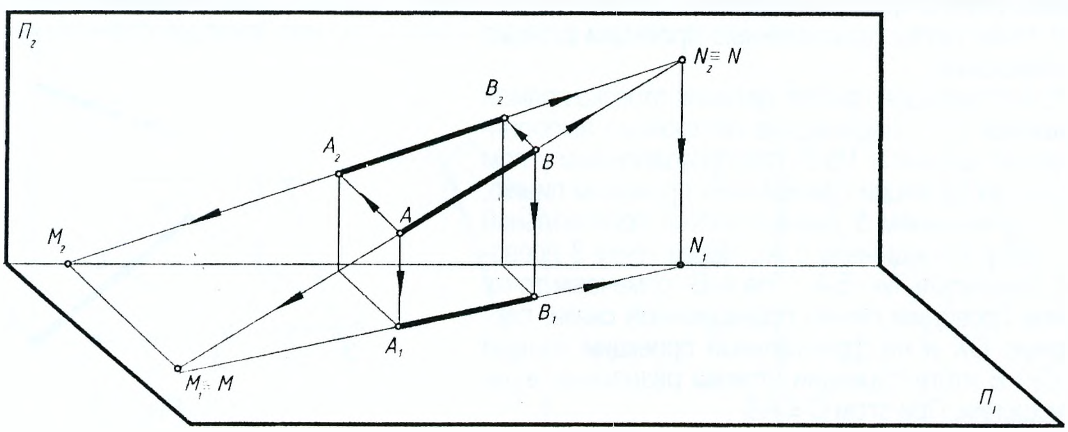


Рис. 4.3

Для построения фронтального следа прямой необходимо продолжить горизонтальную проекцию A_1B_1 прямой до пересечения с осью ОХ и получить горизонтальную проекцию фронтального следа N_1. Из полученной точки проводим линию проекционной связи до пересечения с продолжением фронтальной проекции прямой. Получаем фронтальный след N, совпадающий с его фронтальной проекцией N_2. Полученные следы прямой представляют собой точки принадлежащие соответствующим плоскостям проекций.

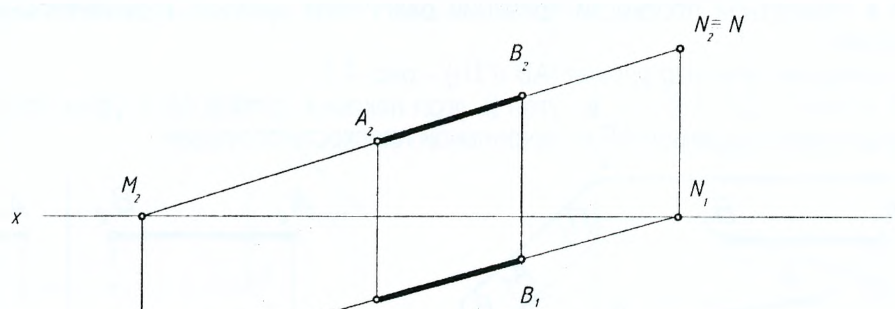


Рис. 4.4

В итоге, горизонтальный след прямой представляет собой точку, принадлежащую горизонтальной плоскости проекций, для которой координата Z равна 0. Фронтальный след прямой представляет собой точку, принадлежащую фронтальной плоскости проекций, для которой координата Y равна 0.

Взаимное положение прямой и точки. Деление отрезка в заданном отношении

Теорема. Если в пространстве точка принадлежит прямой, то на чертеже одноименные проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой (рис.4.5,а). И наоборот, если на чертеже одноименные проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой, то в пространстве эта точка принадлежит прямой (рис.4.5, б)

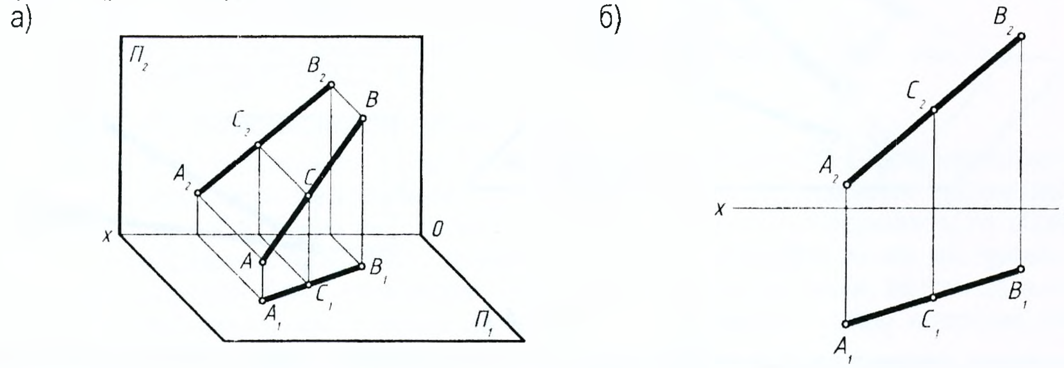


Рис. 4.5

Теоремы о принадлежности точки прямой и делении отрезка прямой какой-либо точкой в заданном отношении одинаковы по своей сути, т.к. на чертеже, при этом, в рассматриваемых вариантах заданная точка однозначно принадлежит проекциям заданных прямых. В пространстве принадлежность точки прямой очевидна.

Теорема. Если в пространстве точка делит отрезок прямой в каком-то отношении, то на чертеже проекции этой точки делят одноименные проекции отрезка в том же отношении.

На рис. 4.6 приведен пример деления отрезка прямой AB в отношении 2:3. Графические построения выполняются следующим образом. Из B_1 под произвольным углом к горизонтальной проекции прямой A_1B_1 проводим линию, на которой откладываем 5 равных частей произвольной величины. Точку 5 соединяем с A_1. Через точку 3 проводим линию, параллельную 5-A_1. На A_1B_1 отмечаем точку C_1, через нее проводим линию проекционной связи, перпендикулярную OX и на фронтальной проекции прямой отмечаем C_2. В итоге проекции отрезка разделены в заданном отношении. При этом $C \equiv AB$.

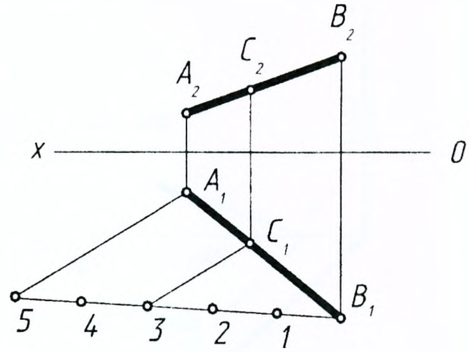


Рис. 4.6

3. Прямые частного положения, характерные их особенности и свойства

Прямые уровня – прямые, параллельные одной из плоскостей проекций и не перпендикулярные двум другим. На ту плоскость проекций, которой прямая параллельна, она проецируется *в натуральную величину*, здесь же определены и *углы наклона* прямой к плоскостям проекций. Построение *следов* прямых уровня выполняется аналогично построению следов прямых общего положения. *Условие принадлежности* точки заданной прямой уровня определяется на основании теоремы о принадлежности, которая приведена выше и реализована на рис.4.5. В соответствии с наличием признака параллельности по отношению к конкретной плоскости проекций различают прямые: горизонтального, фронтального и профильного уровня.

а) *Прямая горизонтального уровня* (AB // $П_1$) – рис. 4.7

A_2B_2 // OX и A_3B_3 // OY, A_1B_1= н. в.; угол β- угол наклона прямой AB к фронтальной плоскости проекций; угол γ – угол наклона прямой AB к профильной плоскости проекций.

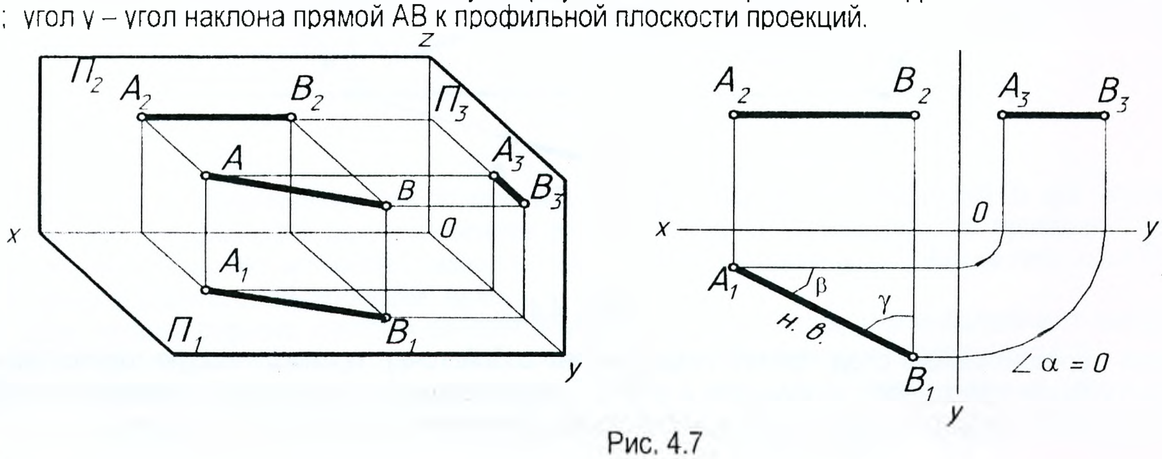


Рис. 4.7

б) *Прямая фронтального уровня* (CD // П$_2$) – рис. 4.8 - C_1D_1// OX и C_3 D_3 // OZ, C_2D_2 = н.в.; угол α – угол наклона прямой AB к фронтальной плоскости проекций; угол γ – угол наклона прямой AB к профильной плоскости проекций.

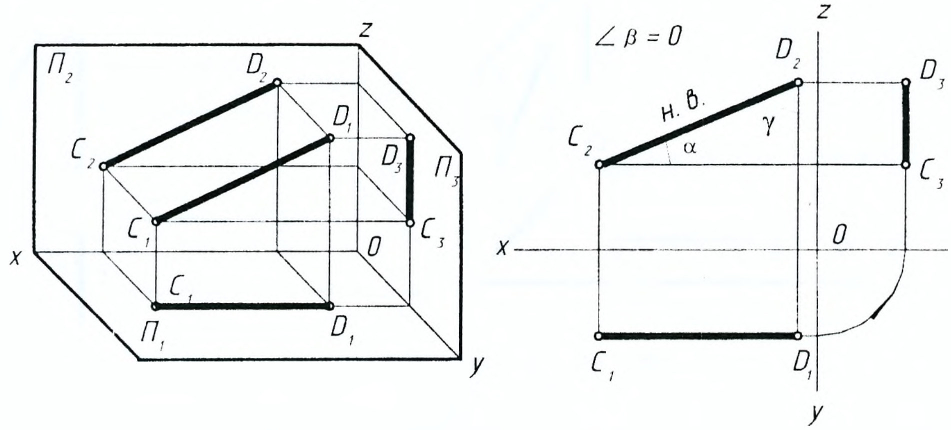


Рис. 4.8

в) *Прямая профильного уровня* (EF // П$_3$) – рис. 4.9

E_2F_2 // OZ и E_1F_1 // OY, E_3F_3 = н.в.; углы наклона прямой AB к соответствующим плоскостям проекций видны из приведенного чертежа, при построении профильной ее проекции.

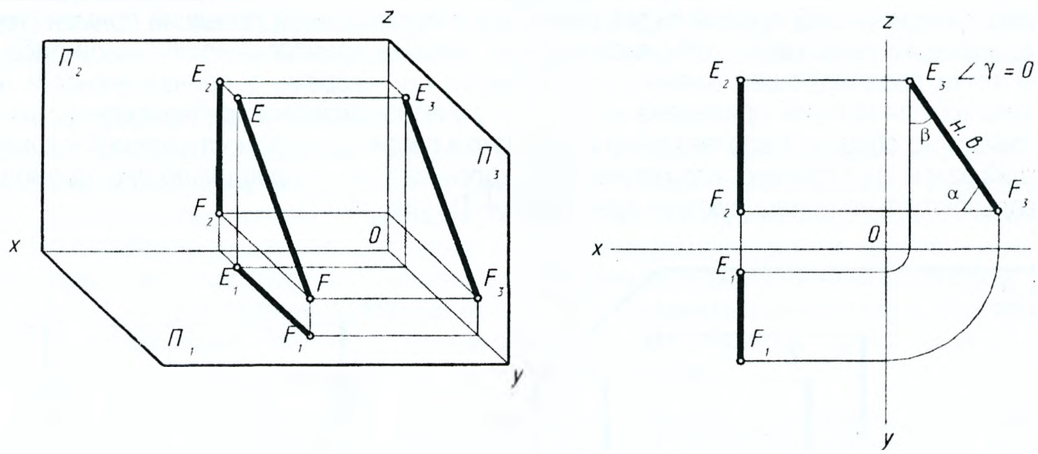
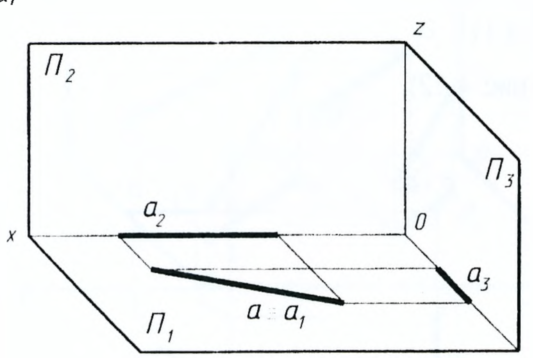


Рис. 4.9

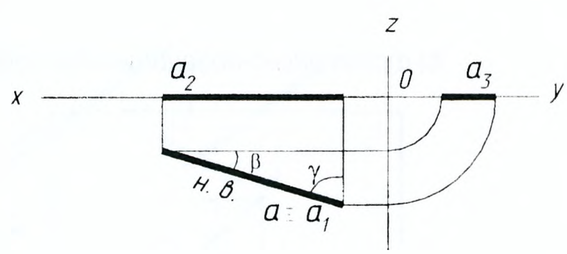
г) *Прямая нулевого уровня* – прямая, принадлежащая одной из плоскостей проекций.

На рис. 4.10 приведены чертежи прямых нулевого горизонтального и профильного уровней, на которых проанализированы характерные особенности прямых и их свойства.

а)



б)



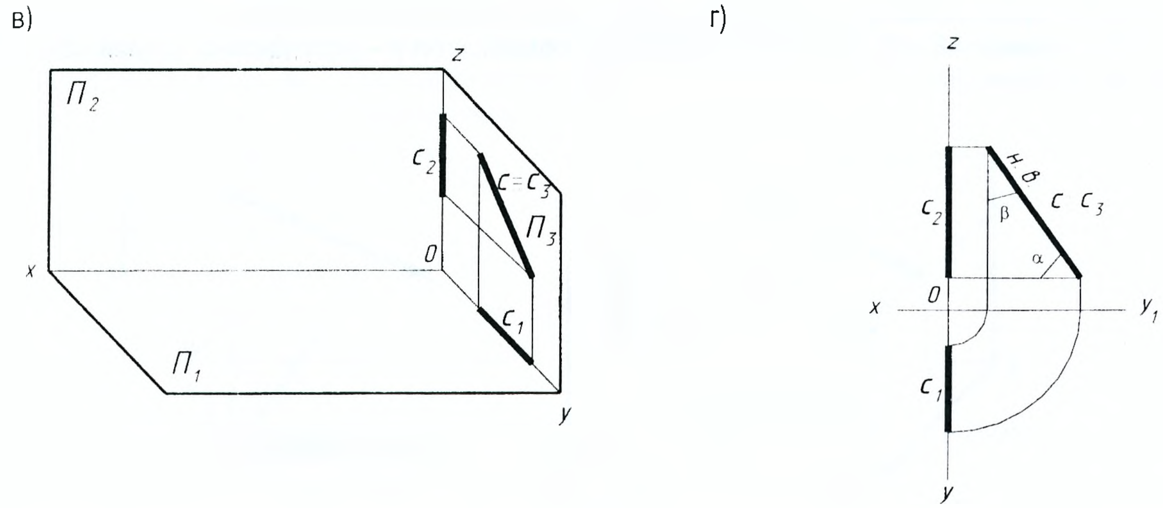
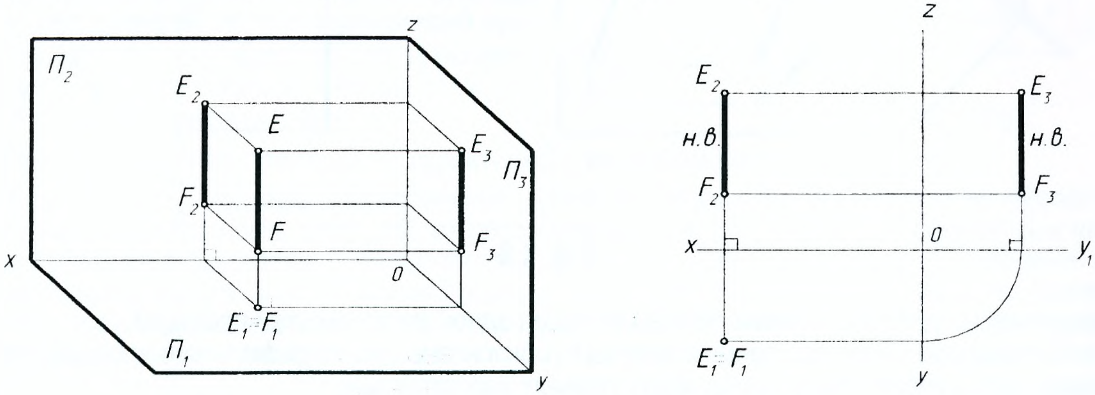


Рис. 4.10

Проецирующие прямые – это прямые, перпендикулярные к одной плоскости проекций и параллельные двум другим. Одной из проекций проецирующей прямой будет точка (вырожденная проекция прямой) на ту плоскость проекций, к которой она перпендикулярна. Проекция, представляющая собой точку, обладает свойством «*собирательности*». Именно этим свойством обладают все проецирующие геометрические образы. При этом, две другие проекции заданной прямой будут являться ее *натуральной* величиной. Проецирующая прямая составляет прямой *угол* с плоскостью проекций, к которой она перпендикулярна. *След* проецирующей прямой будет совпадать с вырожденной проекций прямой (точкой), т.е. проекцией обладающей свойством «собирательности». *Условие принадлежности* какой-либо заданной произвольной точки проецирующей прямой основывается на теореме о принадлежности геометрических образов, реализация которой приведена на рис.4.5, с учетом свойства «собирательности» проецирующего геометрического образа. В соответствии с признаком перпендикулярности прямой к конкретной плоскости проекций различают прямые: *горизонтально-*, *фронтально-*, *и профильно-проецирующие*.

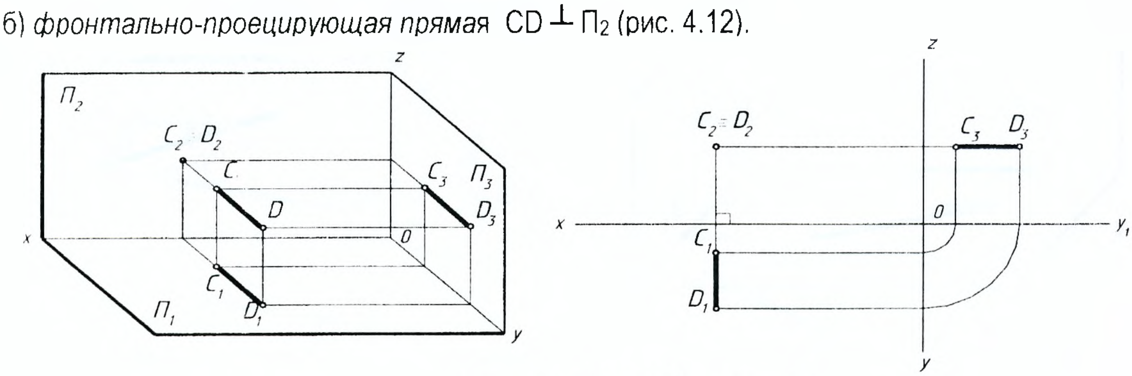
а) *горизонтально-проецирующая прямая* EF $\perp$ $П_1$ (рис. 4.11).



$\angle\alpha = 90^0$; $\angle\beta = 0$; $\angle\gamma = 0$.

Рис. 4.11

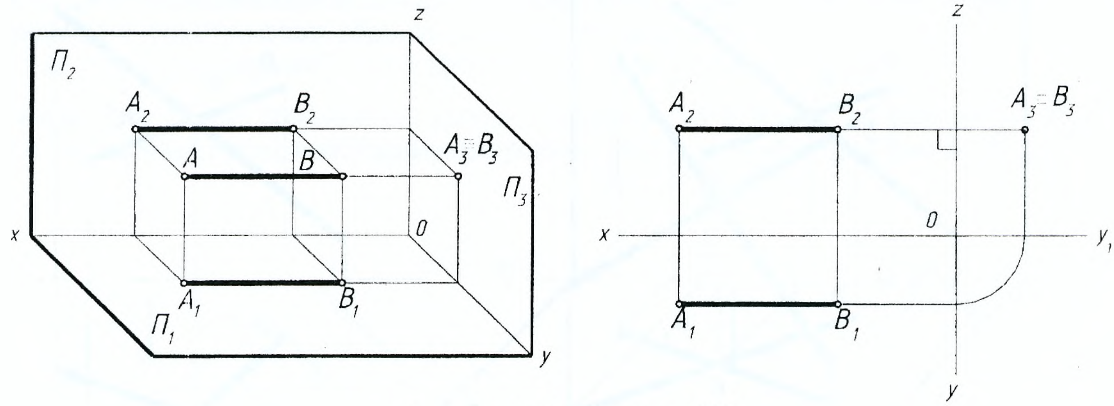
б) *фронтально-проецирующая прямая* CD $\perp$ $П_2$ (рис. 4.12).



$\angle\alpha = 0$; $\angle\beta = 90^0$; $\angle\gamma = 0$.

Рис. 4.12

в) *профильно-проецирующая прямая* АВ $\perp$ П3 (рис. .4.13).



$\angle\alpha = 0$; $\angle\beta = 0$; $\angle\gamma = 90^0$.
Рис. 4.13

Примечания:

1. Прямым частного положения присущи аналогичные особенности и свойства, как и прямым общего положения.

2. Для проецирующих прямых характерно свойство собирательности (на плоскости проекций, к которой прямая перпендикулярна). Поэтому, если точка принадлежит прямой, то одна ее проекция совпадает с вырожденной проекцией прямой (с учетом свойства собирательности). След проецирующей прямой совпадает с ее вырожденной проекцией.

3. Определяя основные свойства для профильной и профильно-проецирующей прямой, необходимо строить профильные их проекции, которым присущи характерные особенности, параметры и характеристики.

4. Взаимное положение двух прямых

Наряду с одной заданной прямой (оригиналом) в пространстве возможно наличие второй аналогичной прямой (оригинала), которые в итоге между собой могут быть: параллельными, пересекающимися (частный случай взаимного пересечения двух прямых – признак их взаимной перпендикулярности), скрещивающимися. Приведенные выше определенные характерные особенности и свойства для одной заданной прямой общего либо частного положения распространяются аналогичным образом и в случаях задания двух прямых, т.к. две заданные прямые могут также занимать определенное положение по отношению к плоскостям проекций. Поэтому в данном случае рассматривается только лишь установление и определение признаков, определяющих их взаимное расположение.

Параллельные прямые – прямые, принадлежащие одной плоскости и не имеющие общей точки пересечения. *Теорема.* Если в пространстве прямые параллельны, то на чертеже параллельны их одноименные проекции. И обратное утверждение: если на чертеже одноименные проекции прямых параллельны, то в пространстве они параллельны (рис. 4.14).

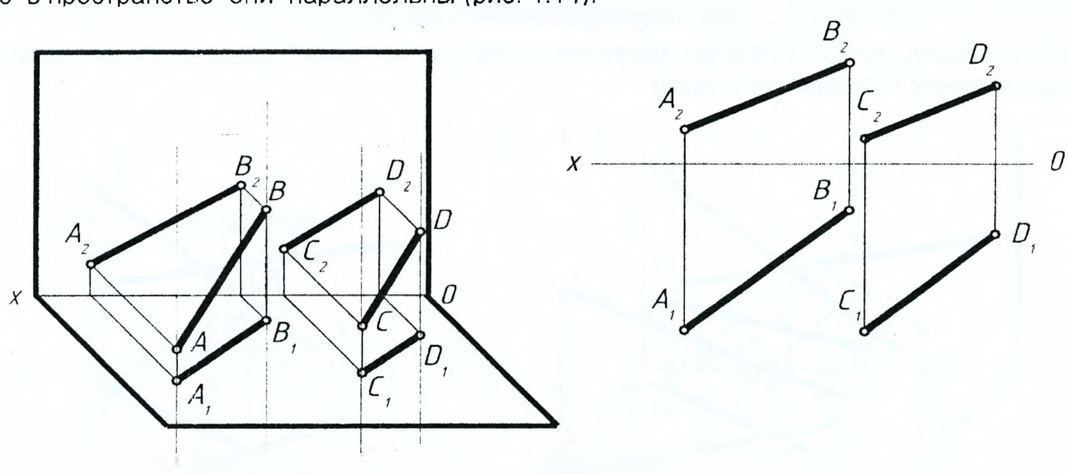


Рис. 4.14

Пересекающиеся прямые – это прямые, принадлежащие одной плоскости и имеющие одну общую точку, т.е. точку пересечения.

Теорема. Если в пространстве прямые пересекаются, то на чертеже их одноименные проекции пересекаются, и точки пересечения их проекций принадлежат одной линии проекционной связи (рис. 4.15).

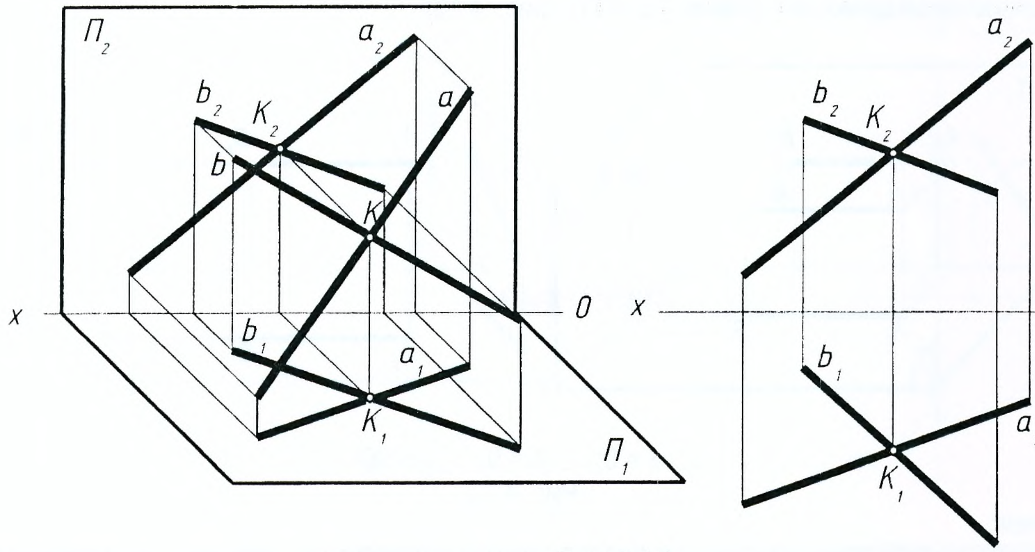


Рис. 4.15

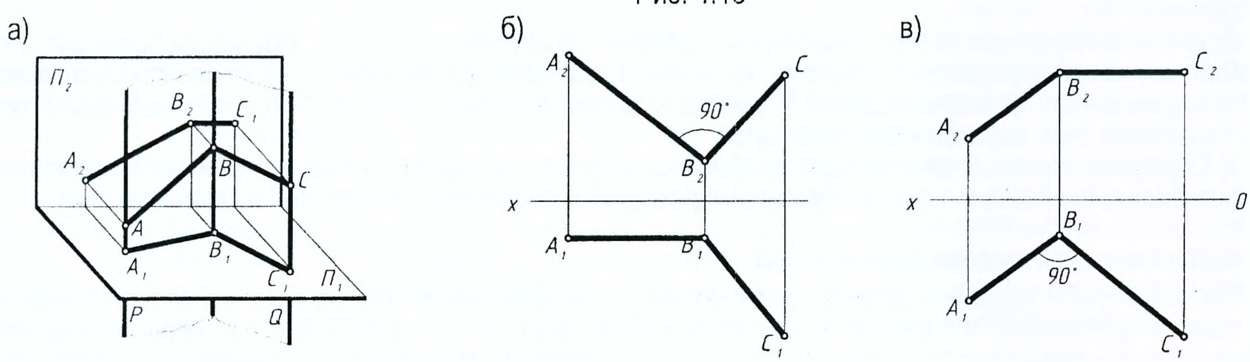


Рис. 4.16

Любой угол, образованный двумя пересекающимися прямыми, проецируется на плоскость проекций с искажением, и только угол, параллельный плоскости проекций, проецируется в натуральную величину.

Проецироваине прямого угла

Теорема. Прямой угол проецируется на какую-либо плоскость проекций в натуральную величину в том случае, когда одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая - не перпендикулярна этой плоскости проекций (рис. 4.16 а, б, в).

Скрещивающиеся прямые – прямые, не принадлежащие одной плоскости (т.е. принадлежащие разным плоскостям) и не имеющие общих точек пересечения (рис. 4.17).

На чертеже проекции таких прямых могут пересекаться, но точки пересечения их проекций не принадлежат одной линии проекционной связи.

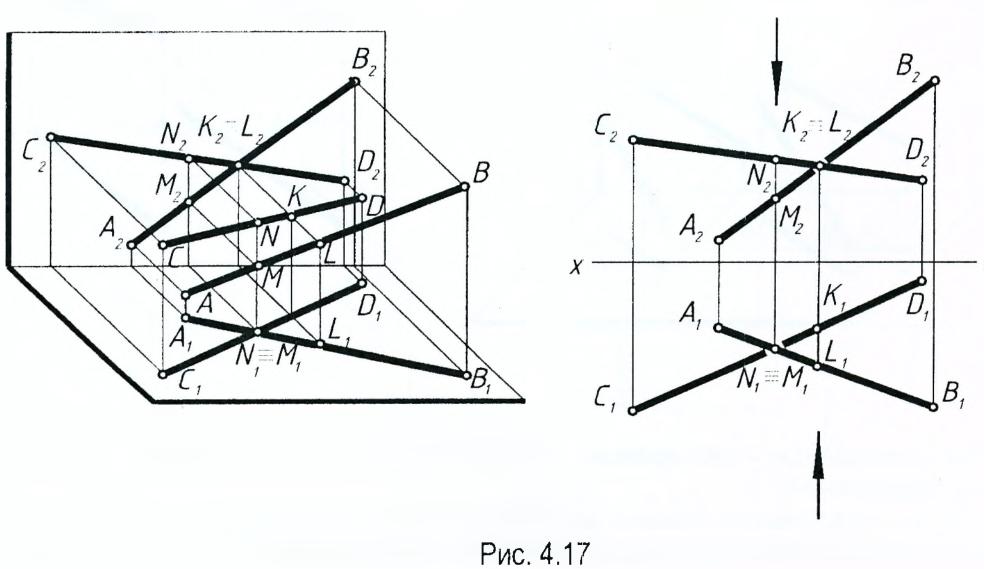


Рис. 4.17

Такие не реальные, а «кажущиеся» точки пересечения проекций прямых называют «конкурирующими». Конкурирующие точки скрещивающихся прямых (горизонтальная и фронтальная пары) необходимы для определения видимости геометрических образов. По горизонтальной паре конкурирующих точек определяется видимость ГО на плоскости проекций $П_1$, а по фронтальной паре – на плоскости проекций $П_2$.

Примечание: для прямых профильного уровня, определяя их взаимное положение (параллельные, пересекаются, скрещивающиеся), необходимо построение профильной проекции (рис. 4.18).

а) б)

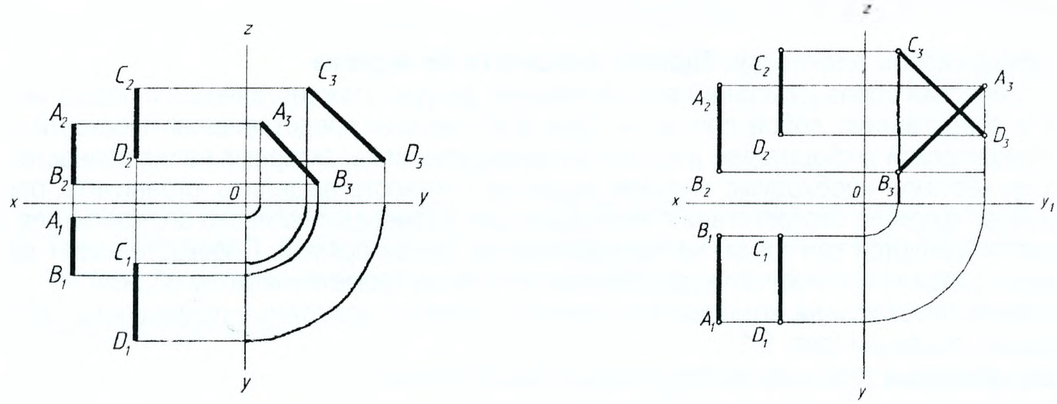


Рис. 4.18

Задачи для самостоятельного решения

Задача. По заданным координатам концов отрезков AB и CD построить комплексный чертеж. Определить взаимное положение отрезков.

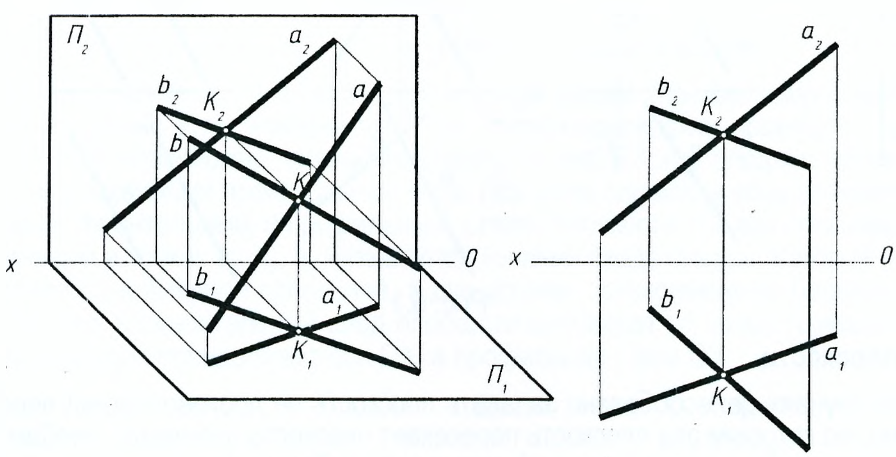


Рис. 4.19

№ варианта	Координаты											
	A			B			C			D		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	55	5	20	15	20	5	45	20	10	10	7	20
2	45	20	25	10	4	5	50	7	8	7	8	25
3	50	17	12	12	22	23	55	6	4	15	11	14
4	55	4	22	15	21	6	45	20	9	10	8	20
5	56	5	20	15	20	5	46	20	10	10	8	20
6	46	20	26	10	5	5	50	8	8	8	7	25

ЛЕКЦИЯ 5

Тема. Плоскость

Вопросы:

1. Определитель плоскости. Задание плоскости на чертеже;
2. Следы плоскости;
3. Классификация плоскостей;
4. Условие принадлежности точки и прямой плоскости;
5. Главные линии плоскости;
6. Углы наклона плоскостей к плоскостям проекций.

1. Определитель плоскости. Задание плоскости на чертеже

Геометрический образ (оригинал) в виде плоской фигуры отождествляется с безграничностью в пространстве и представляет собой плоскость. Для графического представления плоскости на каком-либо носителе графической информации, а затем при определении характерных ее особенностей параметров и свойств на чертеже, необходимо вначале заданную плоскость выделить, ограничить, определить геометрическую ее форму в соответствии с необходимыми размерами согласно определителя. Определителем плоскости являются три точки, не принадлежащие одной прямой. Плоскость имеет два измерения: длину и ширину, поэтому относится к двухпараметрическому геометрическому образу.

Для задания плоскости на комплексном чертеже, одним из возможных приведенных вариантов достаточно указать проекции (рис. 5.1.):

а) трех различных точек, не принадлежащих одной прямой;
б) прямой и точки, не принадлежащей этой прямой;
в) двух пересекающихся прямых;
г) двух параллельных прямых;
д) произвольной геометрической фигуры (треугольника, n- угольника и т.д.)

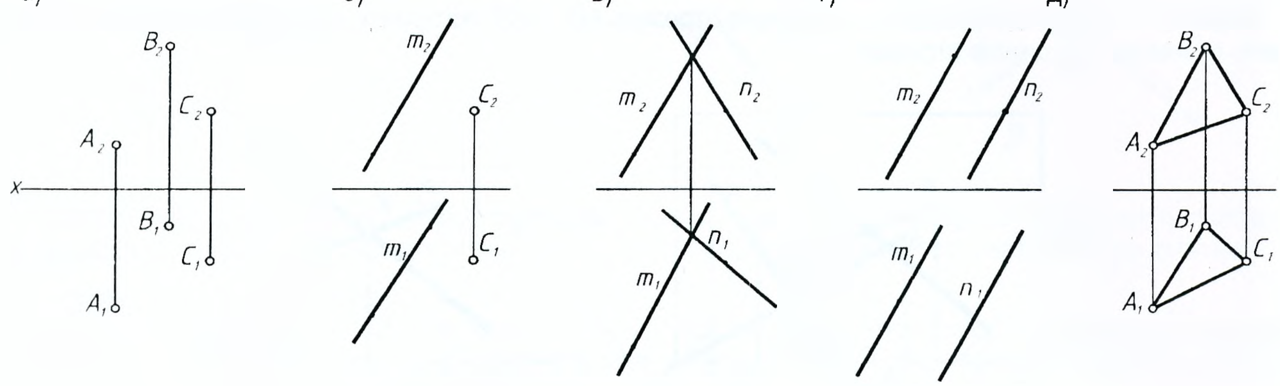


Рис. 5.1

2. Следы плоскости

В некоторых случаях целесообразно задавать плоскость не произвольными пересекающимися прямыми, а прямыми, по которым эта плоскость пересекает плоскость проекций - *следами*. Прямую, по которой плоскость пересекает плоскость проекций, называют *следом плоскости.*

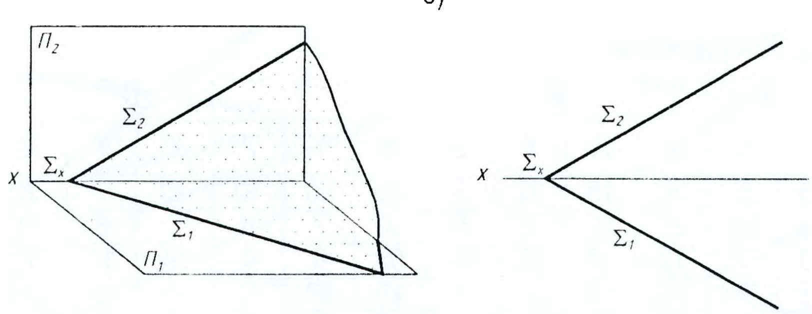


Рис. 5.2

На рис. 5.2 в системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций приведены горизонтальный $\sum_1$ и фронтальный $\sum_2$ следы плоскости Σ.

На рис. 5.3 в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций приведены горизонтальный $\sum_1$, фронтальный $\sum_2$ и профильный $\sum_3$ следы плоскости Σ.

а) б)

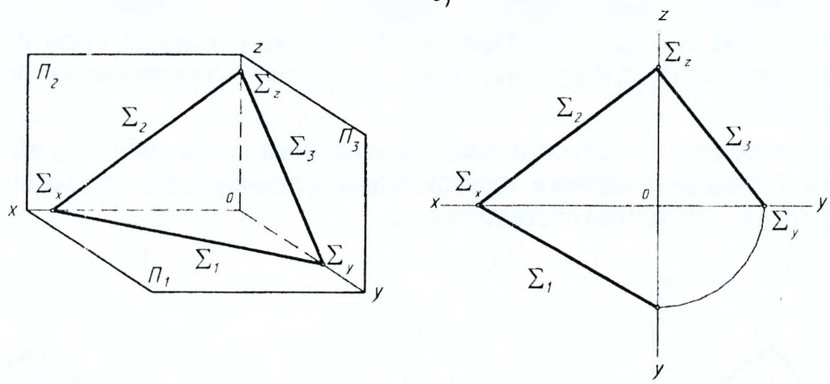


Рис. 5.3

Каждый из перечисленных способов задания плоскости допускает переход от одного к другому, поскольку при этом три точки, являющиеся определителем, можно всегда выделить. Заданную плоскость на чертеже можно считать прозрачной либо не прозрачной, согласно непосредственно заданному условию.

3. Классификация плоскостей

Заданная плоскость в пространстве может занимать различное положение, относительно плоскостей проекций. В связи с этим существует классификация, согласно которой плоскости подразделяются на плоскости общего положения и плоскости частного положения.

Плоскость общего положения - плоскость, занимающая общее (произвольное) положение по отношению к плоскостям проекций. Углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций - произвольные, но отличные от 0° и 90°. Это четко можно проанализировать на рис. 5.3, где следы плоскости общего положения составляют с осью проекций произвольные углы. При этом плоскость общего положения имеет три следа: горизонтальный, фронтальный, и профильный. Следы плоскости общего положения пересекаются попарно на осях проекций в точках a_x, a_y, a_z называются точками схода следов. Каждый из следов плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, а две другие - разноименные проекции - принадлежат осям проекций. Например, горизонтальный след плоскости совпадает со своей горизонтальной проекцией, фронтальная его проекция принадлежит оси ОХ, а профильная - оси OY.

а) б)

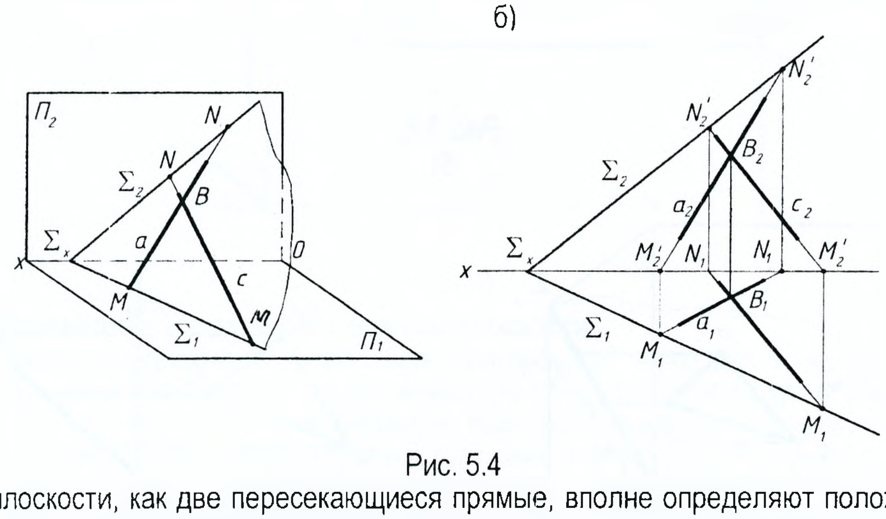


Рис. 5.4

Два следа плоскости, как две пересекающиеся прямые, вполне определяют положение плоскости в пространстве. Третий, недостающий след плоскости, можно построить по двум заданным. На рис 5.4 показано построение следов плоскости, которое основано на построении следов прямых. В итоге, одноименные следы двух пересекающихся прямых принадлежат одноименным следам плоскости.

Плоскость частного положения - плоскость, перпендикулярная одной или двум плоскостям проекций. При наличии признака перпендикулярности заданной плоскости одновременно к двум плоскостям проекций имеет место также и признак параллельности этой же плоскости к одной из плоскостей проекций. Это дает возможность классифицировать плоскости частного положения на*: плоскости проецирующие и плоскости уровня*.

Проецирующие плоскости - плоскости, перпендикулярные какой-либо одной плоскости проекций. На рис. 5.5, 5.6, 5.7 приведены чертежи горизонтально-проецирующей, фронтально-проецирующей и профильно-проецирующей плоскостей соответственно.

а) б) в)

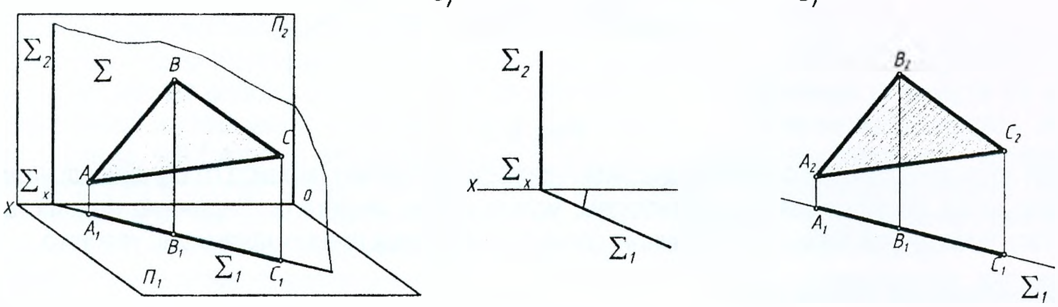


Рис. 5.5

Проецирующие плоскости обладают характерной особенностью- свойством *собирательности*. Свойство собирательности заключается в том, что одна проекция геометрического образа (ГО), принадлежащего проецирующей плоскости, вырождается в прямую, совпадающую с вырожденным следом плоскости. Вырожденный след плоскости - это след, представляющий прямую линию, в которую проецируется заданная плоскость. В случае, где при решении задач не возникает необходимости применения второго следа проецирующей плоскости, перпендикулярного на чертеже к оси ОХ, можно задавать проецирующую плоскость одним вырожденным следом. Проецирующие плоскости используются как вспомогательные плоскости - посредники при решении определенной группы задач.

Примечание: при решении определенной группы задач с профильно-проецирующей плоскостью необходимо построение профильного проецирующего следа, обладающего свойством собирательности на профильной плоскости проекций (рис. 5.7).

а) б)

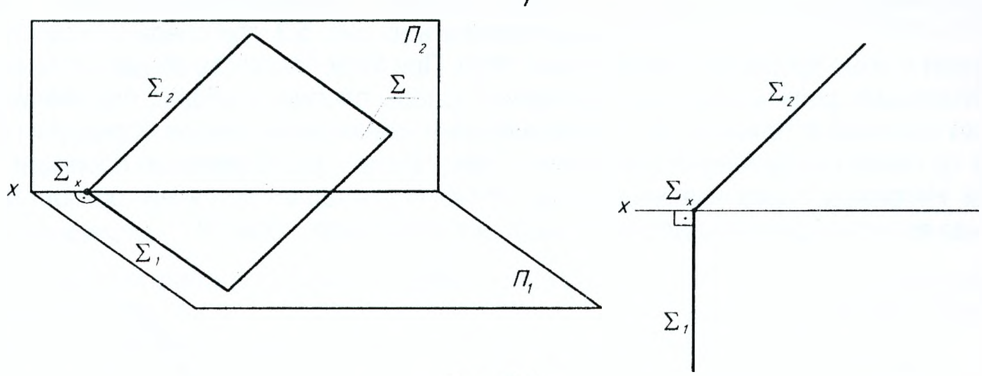


Рис. 5.6

а) б)

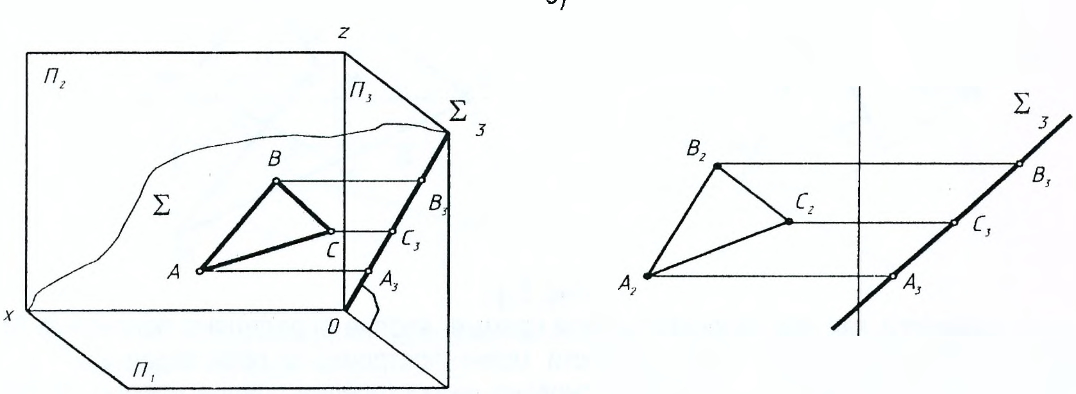


Рис. 5.7

Плоскости уровня - плоскости, параллельные одной плоскости проекций и перпендикулярно двум другим плоскостям проекций. Например, плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекции, называется плоскостью горизонтального уровня и т.д. На рис. 5.8, 5.9, 5.10 приведены чертежи плоскостей уровня: горизонтального, фронтального и профильного. Характерной особенностью плоскостей уровня является то, что геометрическая фигура, принадлежащая заданной плоскости уровня, проецируется в натуральную величину на ту плоскость проекций, которой параллельна заданная плоскость. Очевидно, что плоскости уровня являются в то же время проецирующими плоскостями и также используются в качестве вспомогательных плоскостей – посредников при составлении графических алгоритмов решения задач.

а) б) в)

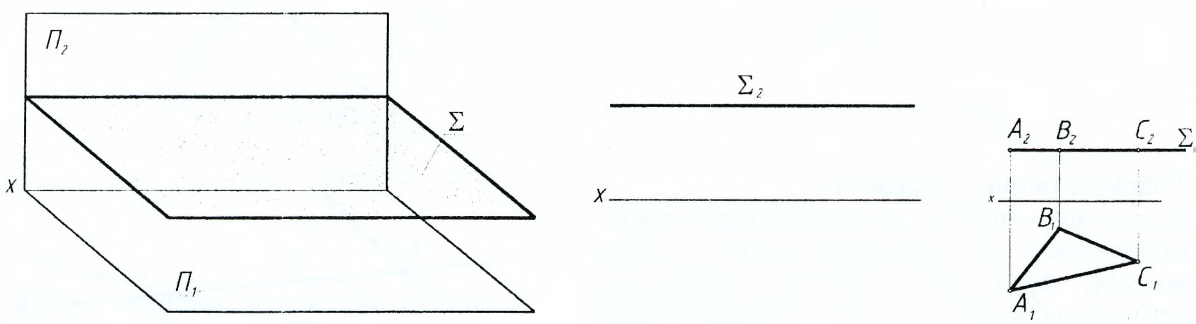


Рис. 5.8

а) б) в)

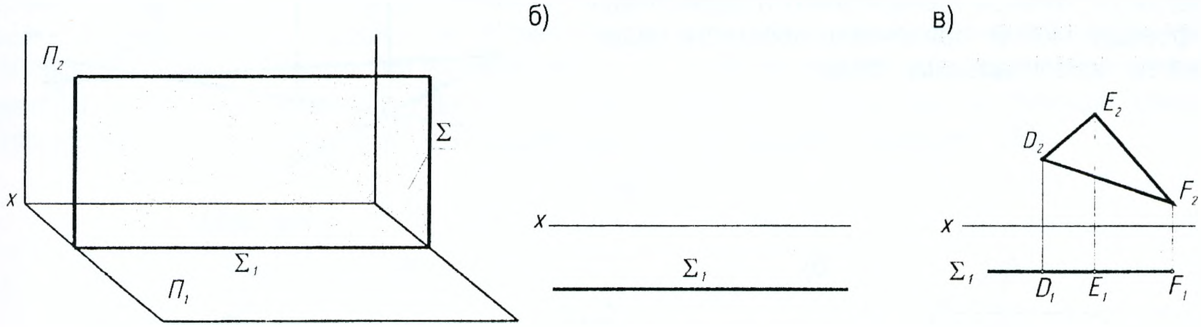


Рис. 5.9

а) б)

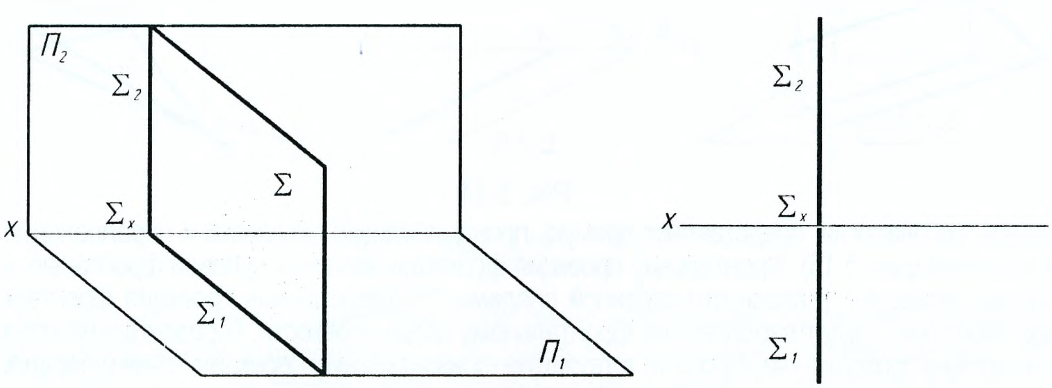


Рис. 5.10

4. Условие принадлежности точки и прямой плоскости

Теорема. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие этой плоскости (рис. 5.11), или когда прямая проходит через одну точку, принадлежащую плоскости, и известно ее направление (рис. 5.12). Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости (рис.5.13). Справедлива также и обратная трактовка этой теоремы. В случае, когда рассматривается плоскость частного положения, то сущность принадлежности геометрического образа (точки, прямой) значительно упрощается и основывается на признаке свойств собирательности. Как уже рассматривалось выше, свойством собирательности наделены проецирующие плоскости и плоскости уровня, т. к. у тех и других плоскостей имеется признак перпендикулярности к одной либо двум плоскостям проекций.

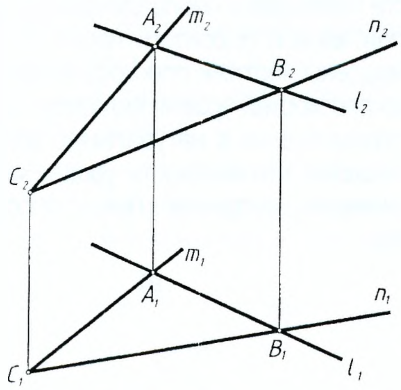


Рис. 5.11

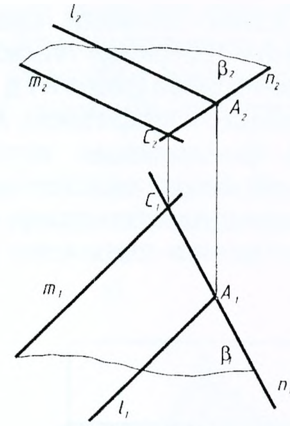


Рис. 5.12

5. Главные линии плоскости

Горизонталь - прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис 5.14). Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси ОХ. Если плоскость задана следами (рис. 5.14 а, б), то горизонтальный след плоскости является нулевой горизонталью и горизонтальная проекция любой горизонтали плоскости параллельна ее горизонтальному следу.

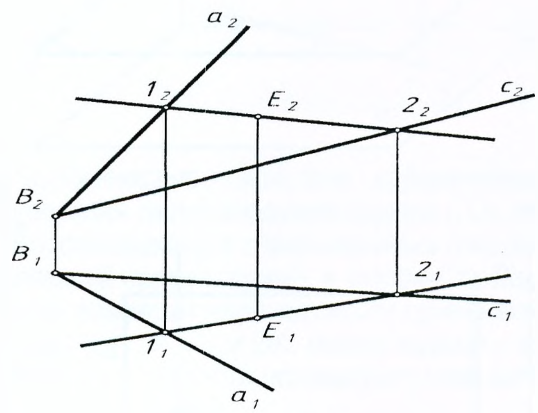


Рис. 5.13

а) б) в)

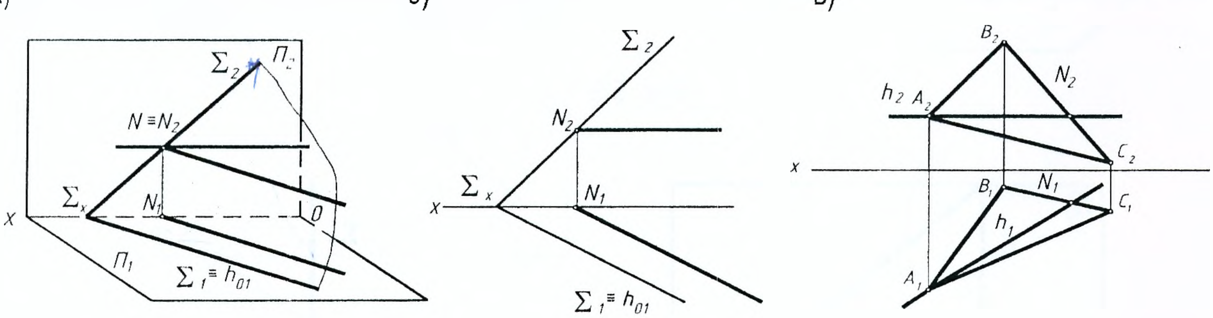


Рис. 5.14

Фронталь, по аналогии, представляет прямую, принадлежащую плоскости и параллельную фронтальной плоскости проекций (рис. 5.15). Фронтальная проекция фронтали является нулевой фронталью, а если на чертеже фронталь проведена в плоскости заданной следами, то фронтальная проекция фронтали, проходящая через какую-либо точку, будет параллельна фронтальному следу плоскости. Горизонтальная проекция фронтали будет на чертеже проходить через соответствующую горизонтальную проекцию точки и параллельна оси ОХ.

а) б) в)

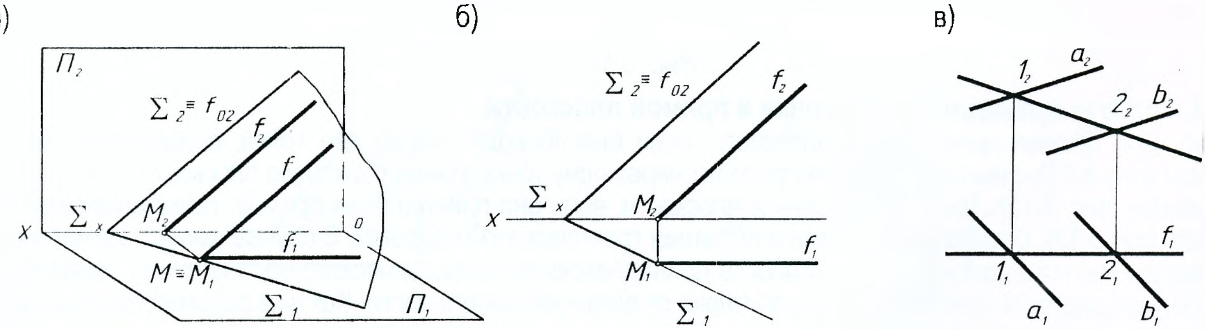


Рис. 5.15

Профильная прямая (профиль)- прямая, принадлежащая заданной плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (рис.5.16).

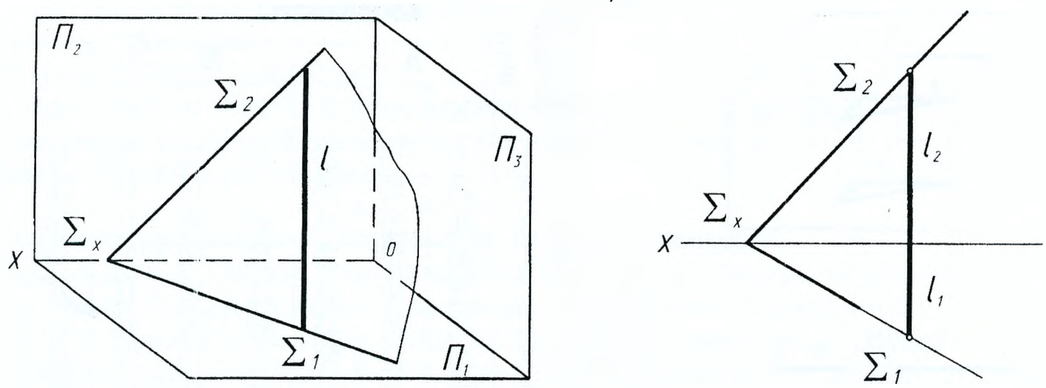


Рис. 5.16

6.Углы наклона плоскостей к плоскостям проекций

Угол наклона плоскости общего положения к плоскости проекций

Линии наибольшего наклона (ската) плоскости - это прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные к ее горизонталям или фронталям. Они необходимы для определения *углов наклона* заданной плоскости общего положения к плоскостям проекций (рис. 5.17). Согласно теореме о проецировании прямого угла горизонтальная проекция линии ската плоскости перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости или, если плоскость задана следами, к ее горизонтальному следу (рис. 5.17).

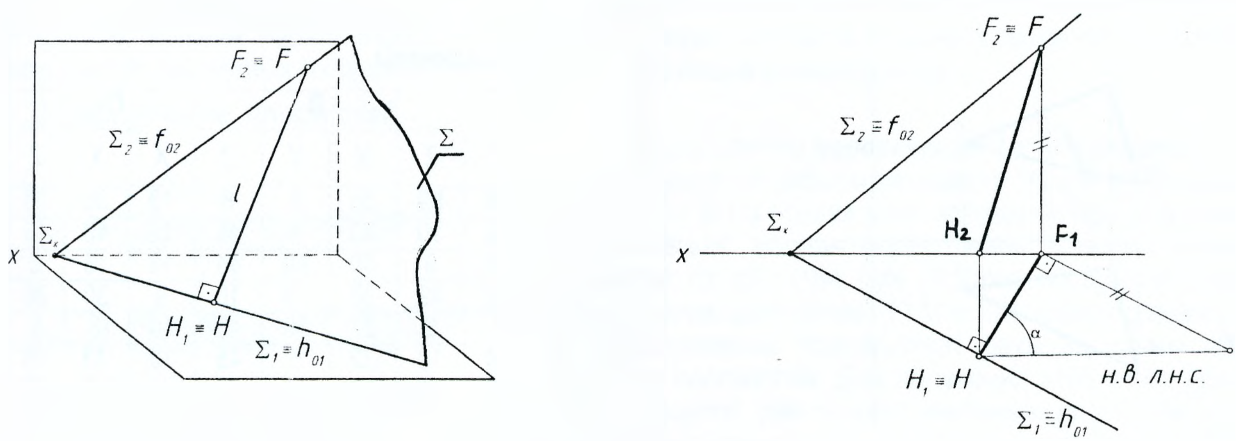


Рис. 5.17

На чертеже угол между натуральной величиной линии наибольшего ската и ее горизонтальной проекцией является углом наклона плоскости $\sum$ к Π_1 (рис.5.17). Аналогично определяется и угол наклона плоскости $\sum$ к Π_2. В этом случае графическое построение начинается с проведения фронтальной проекции линии наибольшего наклона в этой плоскости.

Угол наклона плоскости частного положения к плоскости проекций определен на чертеже по заданному условию задания плоскости. В соответствии с этим, для проецирующих плоскостей к одной из плоскостей проекций угол наклона будет равен углу между проекцией проецирующего следа и соответствующими осями проекций. Плоскости уровня также в зависимости от заданного условия могут составлять угол наклона с плоскостями проекций, соответственно равный 0^o , 90^o. , 90^o

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. По координатам вершин А, В и С построить комплексный чертеж треугольника и определить его положение относительно плоскостей проекций.

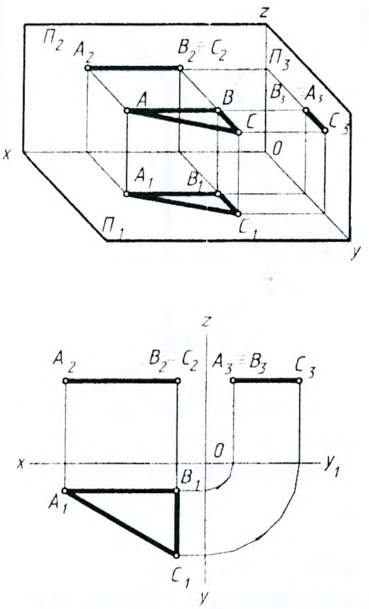


Рис. 5.18

№ варианта	Координаты								
	A			B			C		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	40	10	20	10	10	20	10	25	20
2	25	10	45	25	10	15	25	40	15
3	40	20	45	40	20	10	10	20	10
4	40	10	20	10	10	20	10	25	20
5	25	10	45	25	10	15	25	40	15
6	40	20	45	40	20	10	10	20	10
7	40	10	20	10	10	20	10	25	20
8	25	10	45	25	10	15	25	40	15
9	40	20	45	40	20	10	10	20	10
10	40	10	20	10	10	20	10	25	20
11	25	10	45	25	10	15	25	40	15
12	40	20	45	40	20	10	10	20	10
13	40	10	20	10	10	20	10	25	30
14	25	10	45	25	10	15	25	40	15
15	40	20	45	40	20	10	10	20	10

Задача 2. По координатам вершин А, В и С построить комплексный чертеж треугольника и произвольного отрезка прямой, расположенного в плоскости.

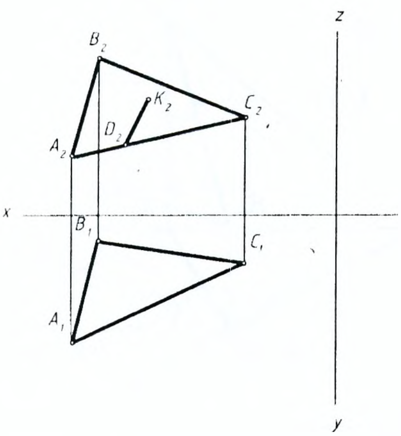


Рис. 5.19

№ варианта	Координаты								
	A			B			C		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	46	26	59	36	8	8	10	30	25
2	50	25	10	30	5	45	12	40	15
3	47	10	9	30	48	44	10	18	5
4	41	26	49	36	11	10	9	30	20
5	46	9	9	32	50	46	10	18	5
6	50	24	10	32	5	45	10	40	16
7	42	27	48	36	10	11	12	29	25
8	47	10	8	30	48	45	10	20	4
9	50	24	9	28	5	44	12	40	14
10	43	25	49	35	9	9	9	30	25

ЛЕКЦИЯ 6

Тема. Взаимное положение плоскостей, прямой и плоскости

Вопросы:

1.Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости;
2.Пересечение плоскостей;
3.Пересечение прямой с плоскостью;
4.Перпендикулярность прямой и плоскости; перпендикулярность плоскостей;
5.Параллельность плоскостей, параллельность прямой и плоскости;
6.Позиционные и метрические задачи.

1. Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости

При задании двух плоскостей, а также прямой и плоскости в пространстве возможно:

А. *Пересечение двух плоскостей.* В основном, пересекаемые плоскости могут быть расположены между собой под произвольным углом и, как особый случай, имеет место пересечение двух взаимно перпендикулярных плоскостей. В результате пересечения двух плоскостей образуется прямая линия, одновременно принадлежащая двум заданным плоскостям. Известно, что определителем прямой линии являются две точки, которые необходимо определить, составляя алгоритм решения такого типа задач. При разработке алгоритма, в первую очередь необходимо провести классификацию плоскостей, т.е. установить, как расположены заданные пересекающиеся плоскости по отношению к плоскостям проекций.

Б. *Пересечение прямой с плоскостью.* В результате пересечения прямой с плоскостью образуется точка, которая одновременно принадлежит прямой и плоскости. Прямая, пересекающая плоскость, может быть расположена по отношению к этой плоскости под произвольным углом, и, как особый случай, может быть ей перпендикулярна. При составлении алгоритма решения такого типа задач необходимо также вначале провести анализ по установлению расположения заданных пересекающихся геометрических образов, в данном случае прямой и плоскости, по отношению к плоскостям проекций.

В. *Параллельность и перпендикулярность заданных плоскостей, прямой и плоскости.* В случае, если у двух заданных геометрических образов не имеется общих точек пересечения, имеет место признак их параллельности. О признаке перпендикулярности плоскостей, прямой и плоскости сказано выше. Как правило, признак параллельности и признак перпендикулярности заданных геометрических образов основывается на прямых и обратных теоремах, не требующих доказательств.

2. Пересечение плоскостей

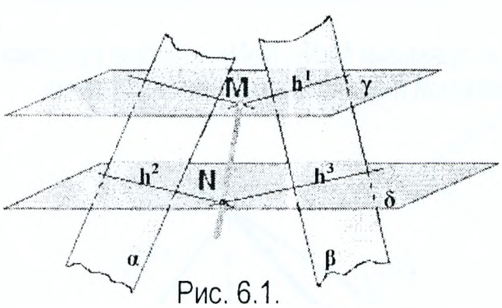


Рис. 6.1.

Общий случай пересечения 2-х плоскостей

(заданные плоскости занимают общее положение)

На рис. 6.1 в общем виде приведена пространственная геометрическая модель определения линии пересечения плоскостей: $(\alpha \cap \beta) = (\bullet)M$; $(\bullet)N$. В итоге, построение сводится к определению двух точек - (.) M и (.)N соответственно, которые одновременно принадлежат двум заданным пересекающимся плоскостям. Для получения этих точек дополнительно вводятся две вспомогательные плоскости частного положения (в данном примере горизонтального уровня), которые пересекают каждую из заданных плоскостей по горизонтали. В пересечении между собой горизонтали определяют искомые точки пересечения т.е. M , N .

На примере построения проекций линий пересечения двух плоскостей общего положения *ABC* и *DFG* (рис.6.2) рассмотрим последовательность составления графического алгоритма решения такого типа задач. В отличие от приведенного выше (рис.6.1) примера, в данном случае необходимо определить проекции линии пересечения двух заданных плоскостей, т.е. в итоге построить соответствующие проекции двух искомых точек M и N.

Алгоритм решения

– проводим плоскости - посредники частного положения (α // $П_1$ и β // $П_1$), которые пересекают обе заданные плоскости (рис. 6.2);

– находим поочередно линии пересечения плоскостей-посредников α и β с заданными плоскостями *ABC* и *DFG;*

– на пересечении соответствующих проекций линий пересечения плоскостей (заданных и посредников) определяем искомые точки *N* и *M* соответственно.

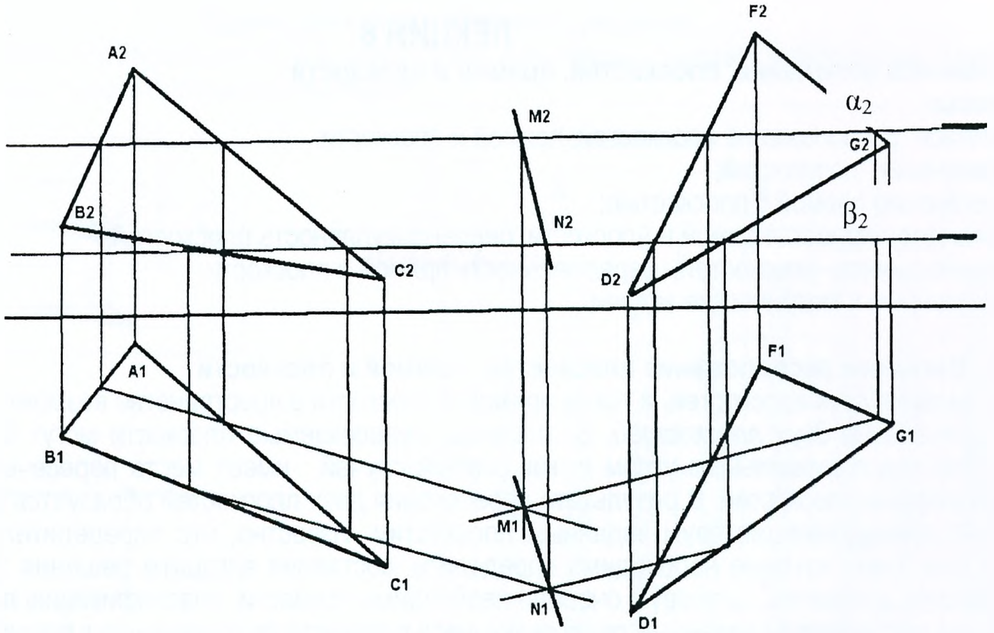


Рис.6.2.

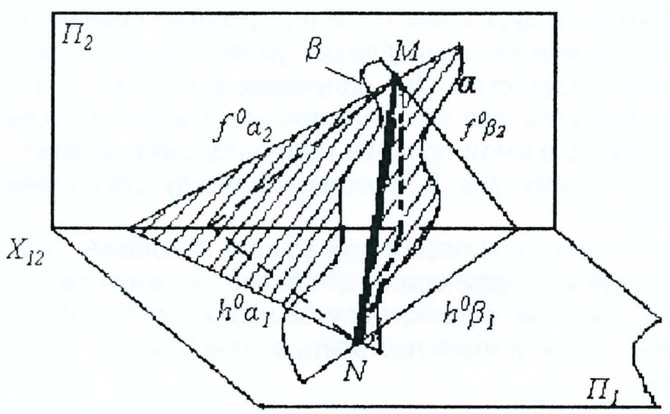
Проанализируем построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами (рис.6.3).

Для построения точки *M*, принадлежащей линии пересечения заданных плоскостей, необходимо построить две прямые, принадлежащие этим плоскостям и одновременно вспомогательной секущей плоскости. Но такие прямые уже есть, это следы f^0_α; f^0_β,(нулевые фронтали), принадлежащие плоскости $П_2$. По аналогии имеются и нулевые горизонтали в плоскости $П_1$. Следовательно, при построении линии пересечения двух плоскостей, заданных следами, роль вспомогательных секущих плоскостей выполняют плоскости проекции.

Алгоритм решения

1. Определяем пересечение фронтальных следов, т.е. точки M_1, M_2: фронтальная проекция M_2 находится в пересечении $f^0_{\alpha2}$ и $f^0_{\beta2}$, горизонтальная проекция M_1 - на оси X_{12}. Определяем пересечение горизонтальных следов, т.е. точки N_1 N_2: горизонтальная проекция N_1 находится в пересечении $h^0_{\alpha1}$ и $h^0_{\beta1}$, фронтальная проекция N_2 — на оси X_{12}.
2. Одноименные проекции точек пересечения следов соединяем прямыми M_1N_1, M_2N_2, которые будут искомыми проекциями линии пересечения данных плоскостей - горизонтальной и фронтальной соответственно.

а) б)



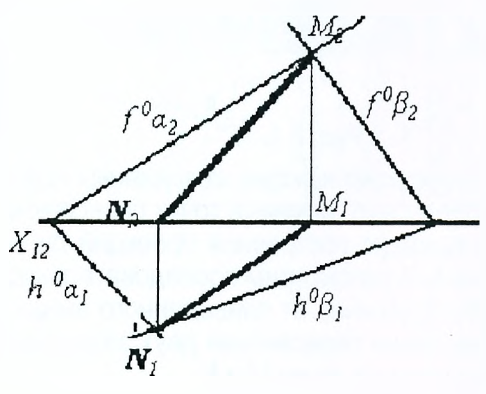


Рис. 6.3

Частный случай пересечения 2-х плоскостей
(одна или обе заданные плоскости занимают частное положение)

На рис. 6.4 приведена плоскость общего положения, заданная треугольником АВС, и горизонтально-проецирующая плоскость $\alpha \perp П_1$. Известно, что горизонтально-проецирующая плоскость обладает свойством собирательности. Исходя из этого, алгоритм решения таких задач значительно упрощается.

Алгоритм решения

1.Определяем горизонтальную проекцию линии пересечения заданных плоскостей. Для этого определяем две общие точки в горизонтальной плоскости проекций. Очевидно, общими точками для плоскостей **α** и ABC и будут точки пересечения прямых AB и BC плоскости ABC с горизонтальным следом проецирующей плоскости (α_1),обладающим свойством собирательности.

2. Фронтальная проекция линии пересечения заданных плоскостей определяется на основании принадлежности фронтальных проекции точек (.)D_2 и (.) E_2 фронтальной проекции заданной плоскости т.е., $A_2B_2C_2$ соответственно. В итоге построение точек D и E на чертеже не вызывает затруднений.

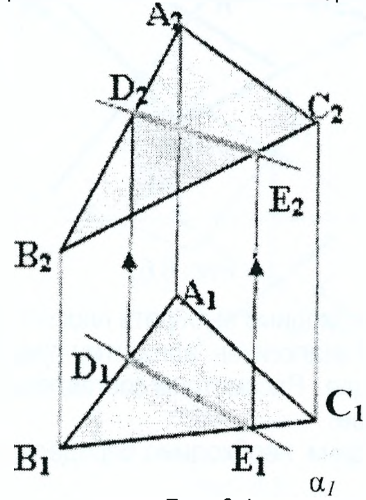


Рис. 6.4

Аналогичным примером является построение линии пересечения 2-х плоскостей **α** и **Σ**, заданных следами (рис. 6.5). Одна из заданных плоскостей **α** - общего положения; **Σ** - частного положения. Алгоритм решения задачи основывается на следующем подходе: **Σ** - горизонтальная плоскость, и в то же время она обладает свойством собирательности. Следовательно, на чертеже фронтальная проекция линии пересечения плоскостей совпадает со следом Σ_2 ($\Sigma_2 \equiv h_2$), т.е. является горизонталью, проходящей через точку I (I_2,I_1) Горизонтальная проекция линии пересечения плоскостей – h_1, проходит через (•) 1_1 и параллельна α_1, т.е. $h_1 // \alpha_1$.

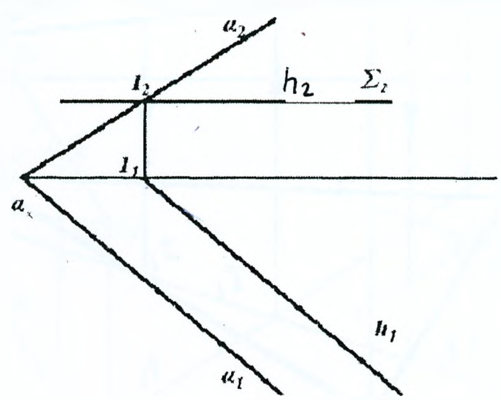


Рис. 6.5

3. Пересечение прямой с плоскостью

Общий случай пересечения прямой с плоскостью

Задача по определению точки пересечения прямой с плоскостью относится к *основной задаче начертательной геометрии*. В результате пересечения прямой **L** с плоскостью треугольника **ABC** образуется точка, которая одновременно принадлежит и прямой и плоскости (рис. 6.6).

В общем виде на геометрической модели алгоритм решения такого типа задач может быть представлен следующим образом.

Алгоритм решения

1. Заключаем прямую L во вспомогательную плоскость - посредник α.
2. Определяем линию пересечения MN заданной плоскости **ABC** со вспомогательной плоскостью – посредником **α**.

3. Определяем точку пересечения заданной прямой **L** с заданной плоскостью **ABC**, как точку пересечения этой прямой с линией пересечения плоскостей, т.е. MN ∩ L → (•)K .

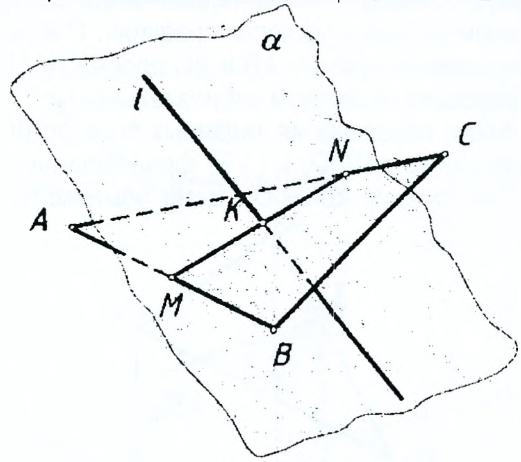


Рис. 6.6.

В качестве плоскости-посредника необходимо выбирать плоскость частного положения: проецирующую либо уровня. Тогда алгоритм задачи аналогичен алгоритму предыдущей задачи на пересечение двух плоскостей, из которых одна проецирующая. Рассмотрим составление графического алгоритма решения такой группы задач на конкретном примере.

На чертеже (рис.6.7.) по условию задачи необходимо определить точку пересечения прямой L с плоскостью ABC. При этом:

– плоскость *ABC* - общего положения;

– прямая *L* - общего положения.

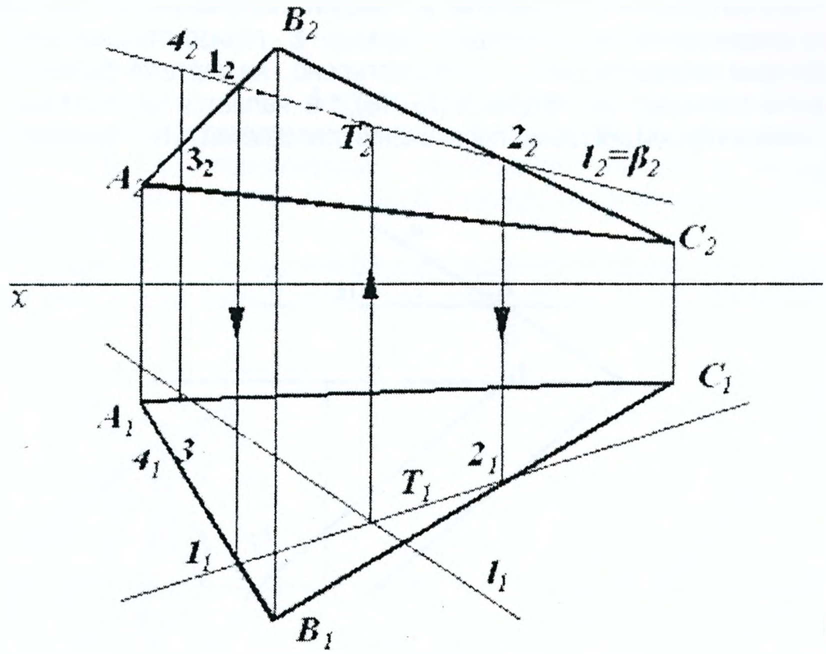


Рис. 6.7

Алгоритм решения

1. Заключаем прямую *L* в плоскость-посредник (β_2), частного положения (фронтально-проецирующую, обладающую свойством собирательности).

2. Находим линию пересечения плоскости-посредника β с заданной плоскостью *ABC*, т.е. линию *1* и *2*. Общие точки в пределах плоскостей *ABC* и β принадлежат линии пересечения (на чертеже точки 1 и 2).

3. В пересечении линии *1- 2* с заданной прямой *L* отмечаем искомую точку *T* (T_1, T_2).

4. Видимость прямой *1 - 2* относительно заданной плоскости *ABC* определяем по конкурирующим точкам (фронтальной и горизонтальной паре конкурирующих точек).

Аналогичным образом составляется алгоритм по определению точки пересечения прямой с плоскостью, если плоскость задана следами. Проанализируем на примере (рис.6.8).

Алгоритм решения

1. Заключаем прямую L в плоскость частного положения (фронтально - проецирующую) $\beta \perp \Pi_2$.
2. Определяем линию пересечения 2-х плоскостей α и β.
3. На пересечении (в рассматриваемом примере) горизонтальной проекции линии пересечения ($1_1;2_1$), плоскостей α и β, с горизонтальной проекцией прямой (l_1) определяем искомую горизонтальную проекцию (•)K→(•)K_1. По линии проекционной связи на фронтальной проекции прямой 1_2 находим (•)K_2.

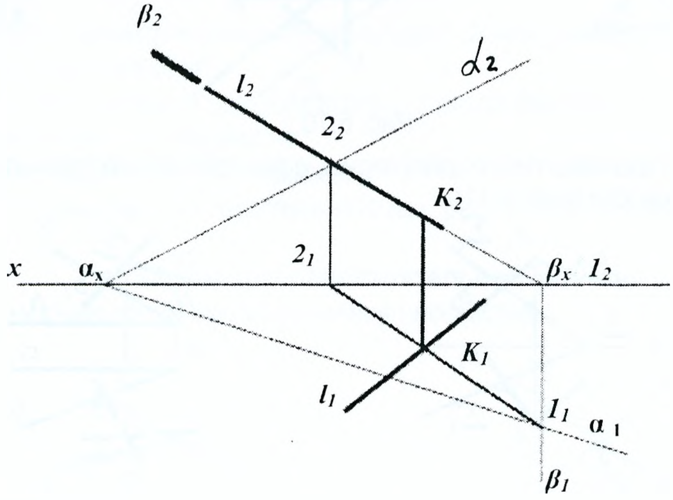


Рис. 6.8

Частные случаи пересечения прямой с плоскостью

В рассматриваемых примерах используется свойство собирательности проецирующих ГО (рис.6.9 а, б); а) АВС - плоскость общего положения ; L –горизонтально- проецирующая прямая; б) Σ- фронтально-проецирующая плоскость; L - прямая общего положения.

В первом примере используем свойство проецирующих прямых: т.е. (•)K_1 совпадает с проекцией l_1, а фронтальная проекция (•)K_2 определяется из условия принадлежности точки K плоскости общего положения ABC.

Аналогичные построения выполнены и во втором примере: фронтальная проекция K_2 точки **К** определяется в пересечении фронтальных проекций заданной прямой и плоскости; горизонтальная проекция точки K_1 находится в пересечении линий проекционной связи с горизонтальной проекцией заданной прямой.

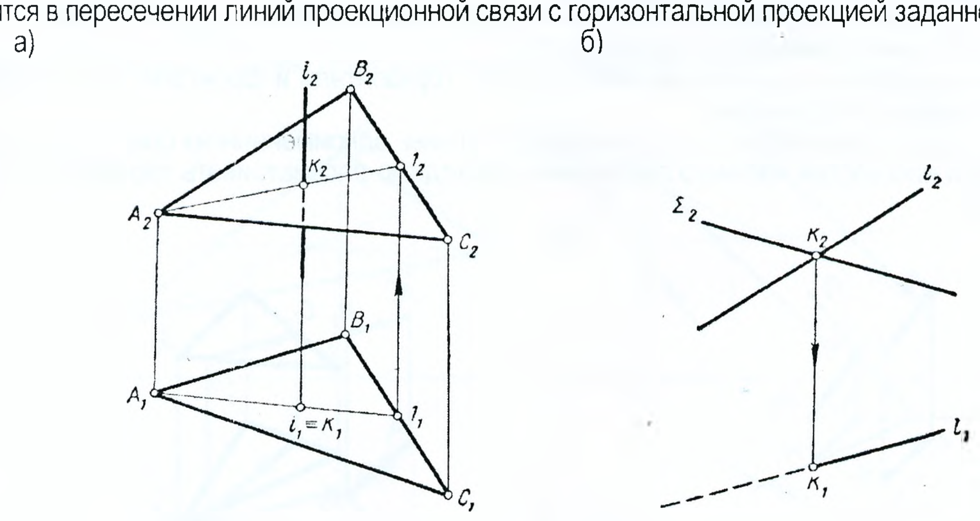


Рис. 6.9

4. Перпендикулярность прямой и плоскости, перпендикулярность плоскостей

Признаки перпендикулярности приведенных геометрических образов основываются на прямых и обратных теоремах, не требующих доказательств.

Теорема. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. На основании теоремы о проецировании прямого угла пересекающимися прямыми в плоскости будут являться фронталь и горизонталь (или соответствующие следы плоскости). Тогда на чертеже: горизонтальная проекция перпендикуляра к заданной плоскости перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали или горизонтальному следу этой плоскости, а фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронтали или фронтальному следу плоскости (рис. 6.10).

а) б) в)

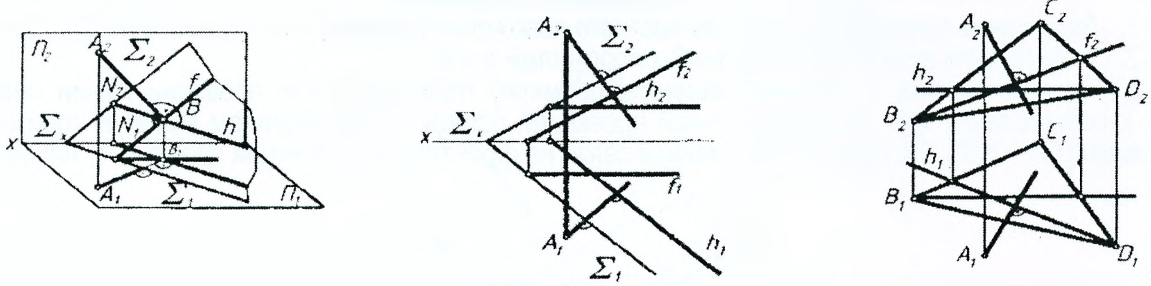


Рис. 6.10

Теорема. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости (рис. 6.11).

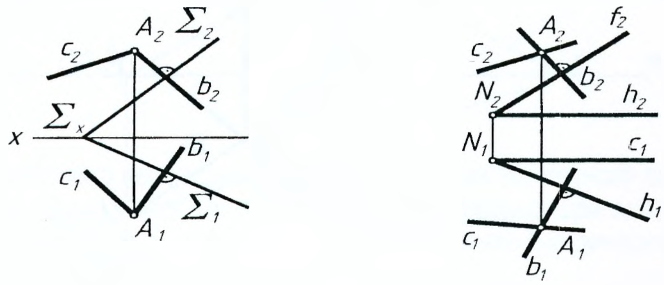


Рис. 6.11

При решении некоторых задач начертательной геометрии в группе перпендикулярности геометрических образов, возникает необходимость решения определенных задач по построению на чертеже взаимно перпендикулярных прямых. *Взаимно перпендикулярные прямые* принадлежат взаимноперпендикулярным плоскостям. Исходя из этой принадлежности и выполняется построение их соответствующих проекций на чертеже (рис.17.6).

5. Параллельность плоскостей, параллельность прямой и плоскости

Признаки параллельности геометрических образов основываются на прямых и обратных теоремах, не требующих доказательств.

Теорема. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости (рис.6.12).

Теорема. Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

В параллельных плоскостях параллельны между собой горизонтали и фронтали, а на чертеже параллельны соответствующие их проекции.

Если плоскости заданы следами, то на чертеже параллельны одноименные их следы (рис. 6.13).

Примечание: для плоскостей частного положения необходимо рассматривать параллельность проецирующих их следов.

а) б)

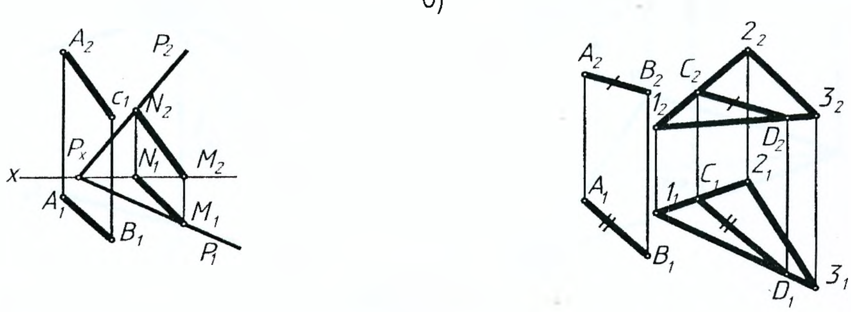


Рис. 6.12

а) б)

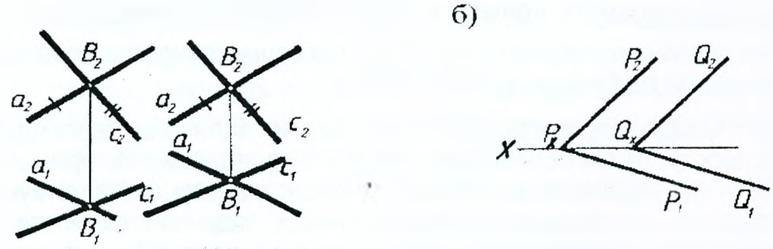


Рис. 6.13

6. Позиционные и метрические задачи

Группу *позиционных* составляют задачи на:

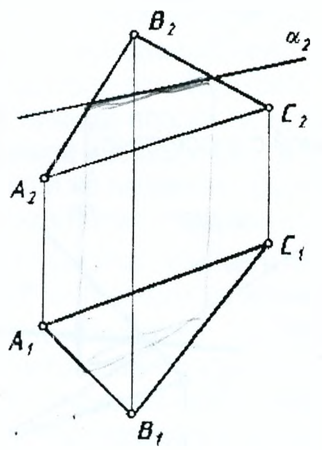
- взаимный порядок геометрических образов (положение точки, прямой, плоскости, поверхности относительно плоскостей проекций);
- взаимную принадлежность геометрических образов (точки - прямой, плоскости и поверхности; линии - плоскости и поверхности);
- взаимное пересечение геометрических образов (двух линий, линии и плоскости, двух плоскостей; линии и поверхности; двух поверхностей).

К метрическим относятся задачи, в условии или в процессе решения которых присутствует метрическая характеристика. К ним относятся задачи на:

- перпендикулярность прямой линии и плоскости;
- определение натуральных величин отрезков прямых, расстояний, углов и др.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Построить проекции линии пересечения плоскостей.



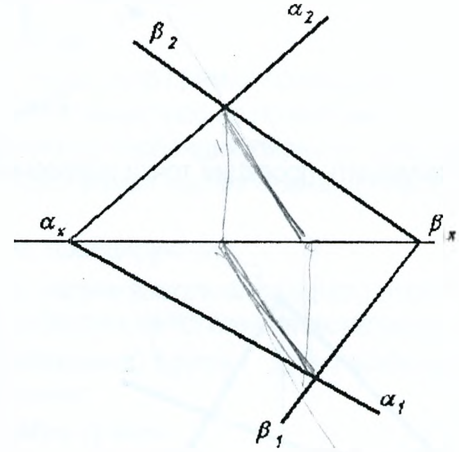


Рис. 6.14

Задача 2. Построить линию пересечения двух плоскостей.

а)

б)

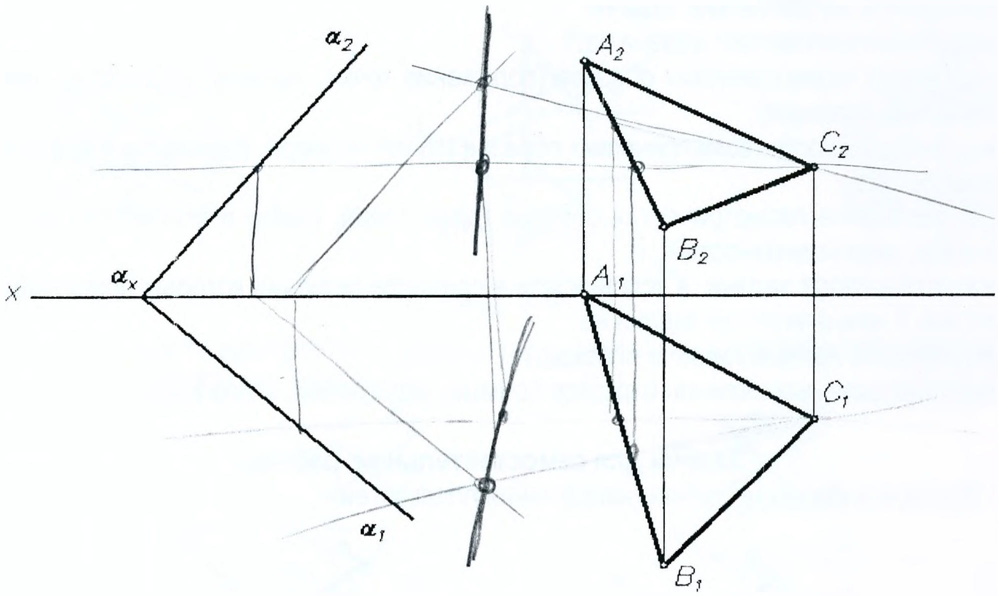
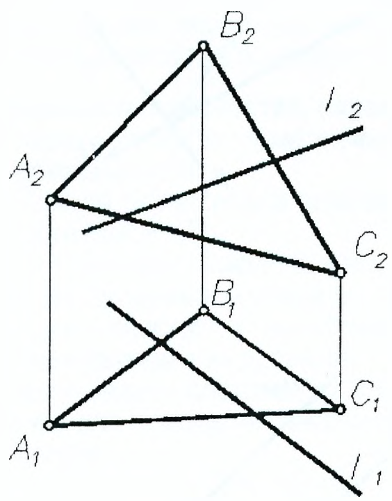


Рис. 6.15

Задача 3. Определить проекции точки пересечения прямой с плоскостью.

а)



б)

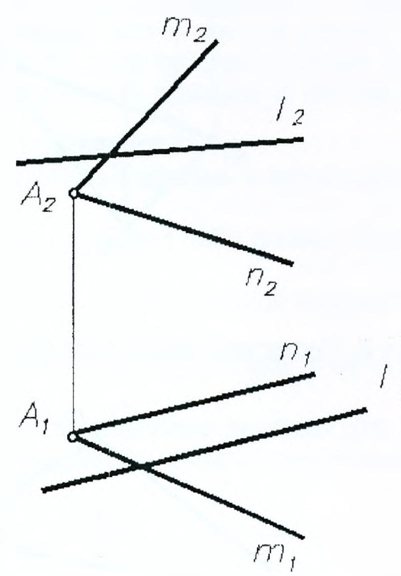


Рис. 6.16

ЛЕКЦИЯ 7

Тема. Преобразование чертежа. Замена плоскостей проекций

Вопросы:

1. Сущность преобразования комплексного чертежа;
2. Метод замены плоскостей проекций.

1. Сущность преобразования комплексного чертежа

Решение многих геометрических задач на комплексных чертежах значительно упрощается, если геометрические образы занимают частное положение (т.е. расположены параллельно или перпендикулярно к плоскостям проекций). С этой целью используется два метода преобразования комплексного чертежа:

– *метод замены плоскостей проекций;*
– *метод вращения.*

Когда при частном расположении объекта отдельные его элементы (прямые, ребра, грани) располагаются параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций, тогда эти элементы на одной из плоскостей проекций изображаются без искажения, т.е. в натуральную величину. Эта возможность достигается в том случае, когда:

– отрезок параллелен плоскости проекций;
– плоская фигура - параллельная плоскости проекций;
– расстояние между скрещивающимися прямыми, когда одна прямая проецирующая;
– двугранный угол, если его общее ребро занимает проецирующее положение;
– расстояние от точки до плоскости, если эта плоскость перпендикулярна плоскости проекций;
– угол между прямой и плоскостью, в случае, когда прямая параллельна, а плоскость перпендикулярна одной и той же плоскости проекций;
– расстояние между двумя прямыми, если они обе, проецирующие.

В зависимости от исходного положения и поставленной задачи выполняется однократное либо двукратное действие замены плоскостей проекций, до установления необходимого положения геометрического образа.

При составлении графического алгоритма определенной группы задач выделяются основные типовые задачи на преобразование комплексного чертежа:

– прямую общего положения преобразовать в прямую уровня;
– прямую уровня преобразовать в проецирующую;
– плоскость общего положения преобразовать в проецирующую;
– проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.

2. Метод замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что образовывается система плоскостей проекций, путем введения новой плоскости, относительно которой заданные геометрические образы общего положения будут занимать частное положение, удобное для решения задач. При этом в образованных новых системах плоскостей проекций, как и в предыдущих, применяется ортогональное проецирование.

На рис.7.1 приведен пространственный и плоскостной комплексный чертеж, где продемонстрировано проецирование (.) А на горизонтальную и фронтальную плоскости проекций как в первоначальной заданной системе плоскостей проекций $x_{1,2}\ \Pi_1 \perp \Pi_2$., так и в новообразованной - $x_{1,4}\ \Pi_1 \perp \Pi_4$, т.е. при введении плоскости проекций $x_{1,4}\ \Pi_4 \perp \Pi_1$

а) б)

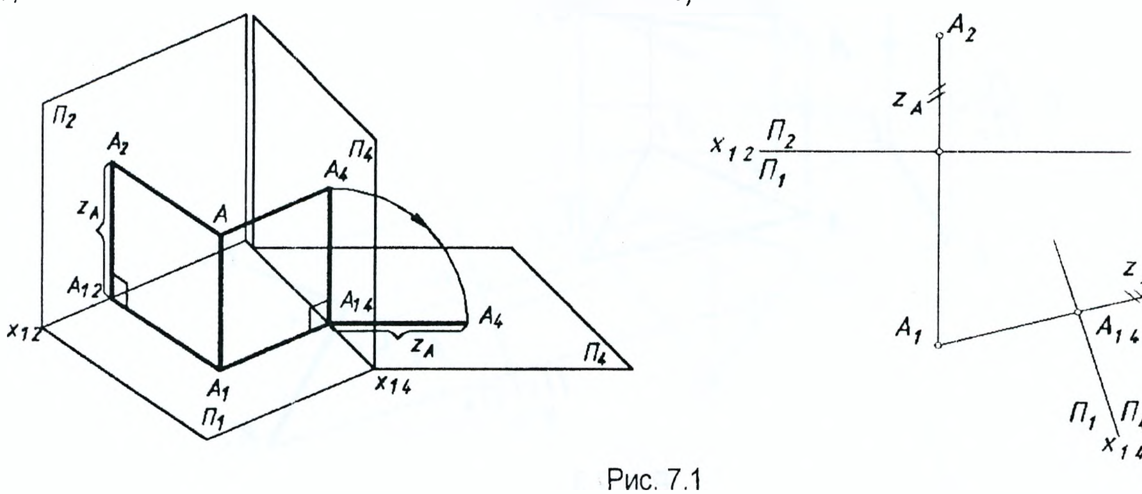


Рис. 7.1

Проанализируем реализацию охарактеризованных преобразований комплексного чертежа, в частности использования метода замены плоскостей проекций, на конкретных примерах.

Задача 1. Прямую АВ общего положения преобразовать в проецирующую (рис.7.2).

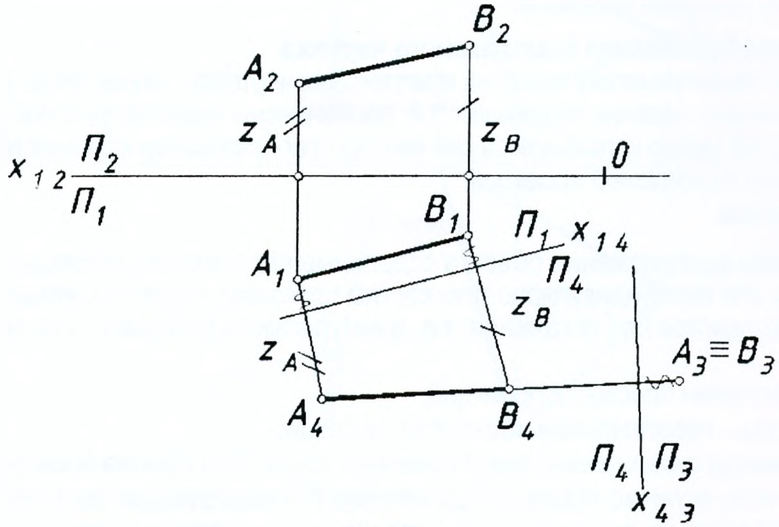


Рис. 7.2

Алгоритм решения

В этом случае выполняем два преобразования в следующей последовательности:

1.Образовываем новую систему плоскостей проекций по схеме:

$x_{1,2}$ $\Pi_1 \perp \Pi_2 \rightarrow x_{1,4}$ $\Pi_1 \perp \Pi_4$; где на чертеже $A_1B_1 \| x_{1,4}$;

В полученной новой системе плоскостей проекций прямая АВ занимает положение фронтального уровня, т.е. $AB \| \Pi_4$; на чертеже – $A_1B_1 \| x_{1,4}$; следовательно A_4B_4 –является н.в. прямой АВ.

2.Образовываем вторую новую систему плоскостей проекций по схеме: $x_{1,4}$ $\Pi_1 \perp \Pi_4 \rightarrow x_{3,4}$ $\Pi_3 \perp \Pi_4$. В образованной системе плоскостей проекций прямая АВ занимает горизонтально-проецирующее положение, т.е. $AB \perp \Pi_3$; на чертеже – $A_4B_4 \perp X_{3,4}$; при этом A_3B_3 - обладает свойством «собирательности».

Задача 2. Определить натуральную величину расстояния от (.)К до плоскости АВС. (рис.7.3).

Алгоритм решения

Известно, что расстояние от точки до плоскости определяется отрезком перпендикуляра, проведенного из точки на заданную плоскость (рис.7.3). В случае, если заданная плоскость перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то расстояние от искомой точки до перпендикулярной плоскости будет проецироваться в натуральную величину. Решение такого типа задач сводится к следующей последовательности:

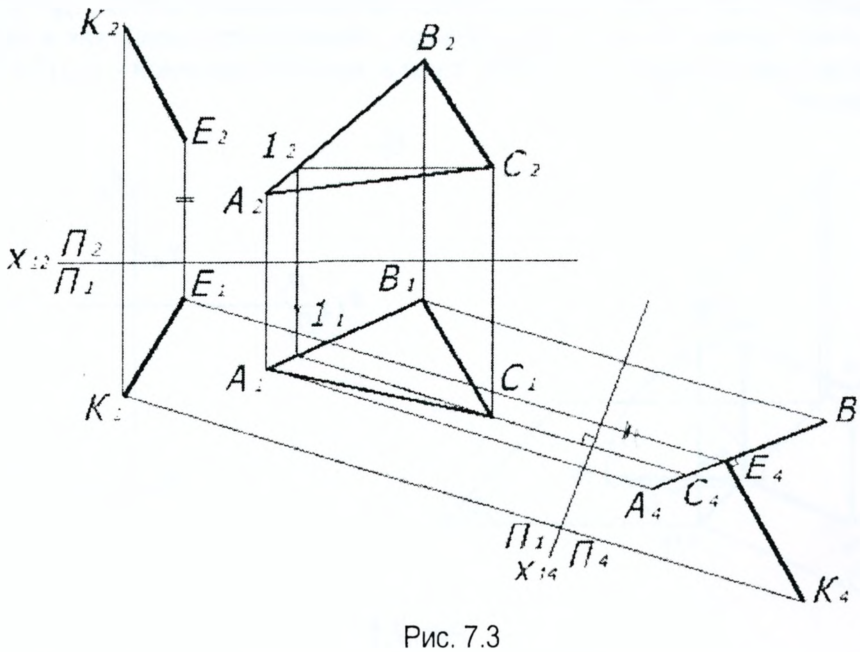


Рис. 7.3

Алгоритм решения

1. Преобразовываем плоскость ABC во фронтально - проецирующую.

2. Прямые определяют плоскость общего положения, поэтому в плоскости ABC проводим горизонталь C1 ($C_1 1_1$, $C_2 1_2$). Направление горизонтальной проекции горизонтали $C_1 1_1$ определяет новое направление ортогонального проецирования в системе плоскостей проекций $x_{1,4}(П_1 \perp П_4)$, в которой известными методами определяем новую фронтальную проекцию заданной плоскости $ABC \rightarrow A_4B_4C_4$ и одновременно новую проекцию (.) $K \rightarrow K_4$.

3. Перпендикуляр K_4E_4 определяет искомое расстояние от точки (.) K до плоскости ABC.

4. Обратными проецирующими лучами выполняем построение проекции точки E (E_1,E_2) в первоначальной системе плоскостей проекций $x_{1,2}(П_1 \perp П_2)$.

Примечание: если в плоскости ABC провести фронталь, то тогда фронтальная проекция фронтали определит новое направление ортогонального проецирования в новой образованной системе плоскостей проекций.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить натуральную величину расстояния от точки D до прямой AB методом замены плоскостей проекций.

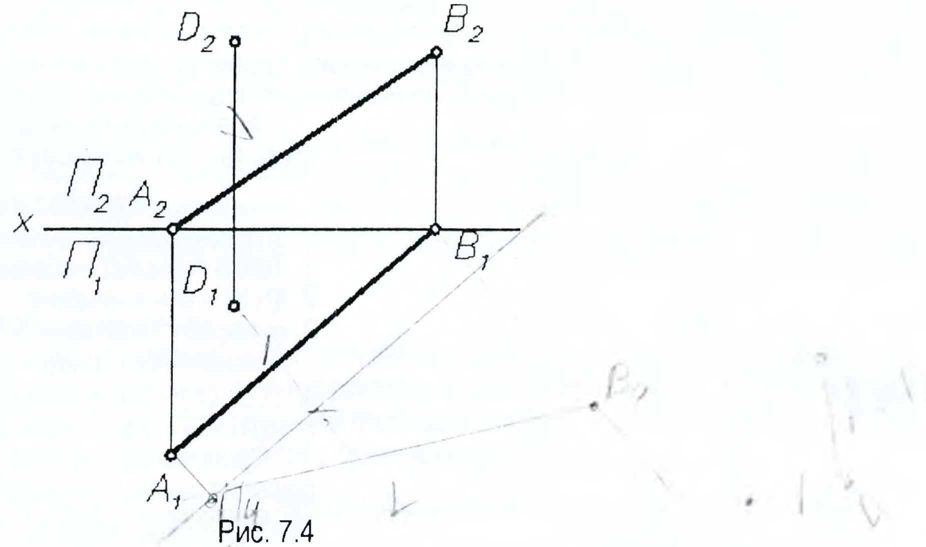


Рис. 7.4

Задача 2. Методом замены плоскостей проекций плоскость Δ ABC преобразовать в плоскость уровня.

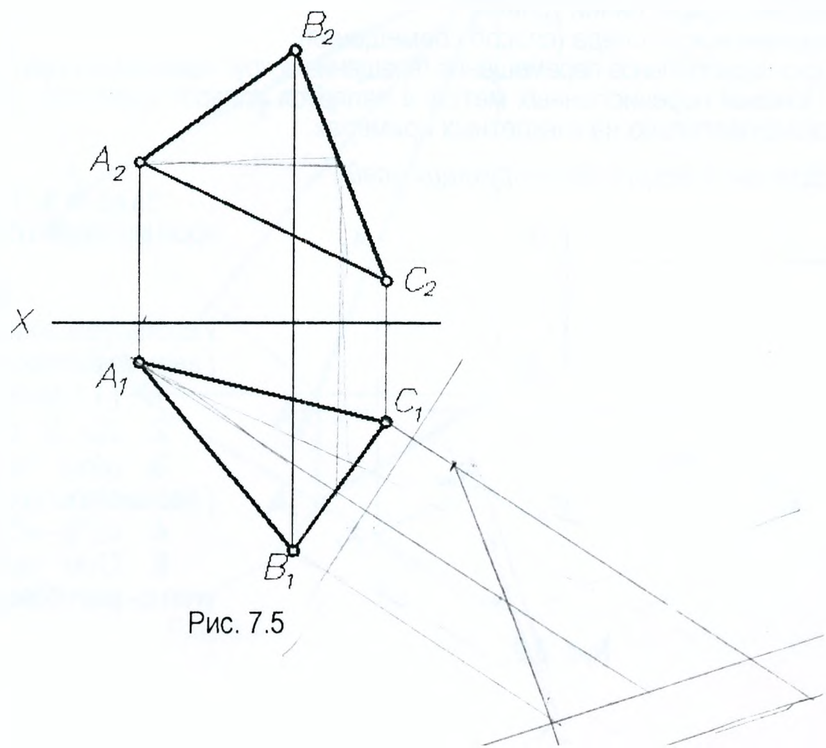


Рис. 7.5

ЛЕКЦИЯ 8

Тема. Преобразование чертежа. Вращение

Вопросы:

1. Сущность вращения;
2. Методы вращения.

Выводы.

1. Сущность вращения

Сущность *вращения* состоит в том, что при неизменном положении плоскостей проекций изменяется положение заданных геометрических образов относительно плоскостей проекций до тех пор, пока они не займут частное положение. Оптимальный эффект восприятия вращения осуществляется тогда, когда выявлены на чертеже:

1) новое направление проецирования преобразованного чертежа;

2) аппарат вращения, включающий в свой состав:

– геометрические элементы вращения (объект вращения, ось вращения, плоскость вращения);

– параметры вращения (центр вращения; радиус вращения).

На примере точки **A**, объекта вращения, проанализируем модель вращения ее вокруг оси **i**. При осуществлении вращения точка опишет окружность, принадлежащую плоскости вращения α. Для осуществления вращения плоскость вращения **α** должна быть перпендикулярна оси вращения **i**. Центр окружности **O** расположен в точке пересечения оси вращения **i** с плоскостью вращения **α.** Радиус вращения **R** равен расстоянию от точки **A** до оси вращения **i** (рис. 8.1). Если на чертеже, ось вращения **i** параллельна какой-либо плоскости проекций, то проекция окружности, которую описывает вращающаяся точка, на эту же плоскость представляет собой прямую линию, перпендикулярную проекции оси вращения **i** . Поэтому в качестве осей вращения необходимо применять различные линии частного положения.

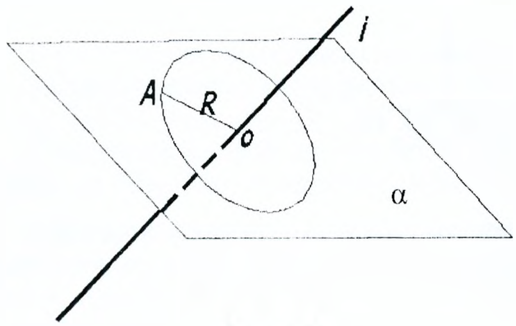


Рис. 8.1

Анализируя приведенную *модель вращения*, можно заключить, что в ее основу положен *аппарат вращения*.

Аппарат вращения

(геометрические элементы вращения):

1. Точка A (A_1,A_2) – объект вращения;
2. i(i_1,i_2) – ось вращения;
3. α-плоскость вращения точки A; $\alpha \perp i$;

(параметры вращения):

4. O(O_1,O_2) - центр вращения $\alpha \cap i$;
5. R(R_1,R_2) – радиус вращения точки A; R=OA

Примечание: на чертеже, при составлении алгоритма решения задачи при реализации аппарата вращения радиус вращения Rвр. должен быть в натуральную величину.

2.Методы вращения

Классифицируют следующие методы вращения:

– вращение вокруг проецирующих осей;

– вращение вокруг линий уровня;

– вращение вокруг следа (способ совмещения);

– плоско-параллельное перемещение (вращение вокруг невидимых осей с последовательным перемещением).

Основой перечисленных методов является аппарат вращения, реализацию которого проанализируем последовательно на конкретных примерах.

Вращение вокруг проецирующих осей

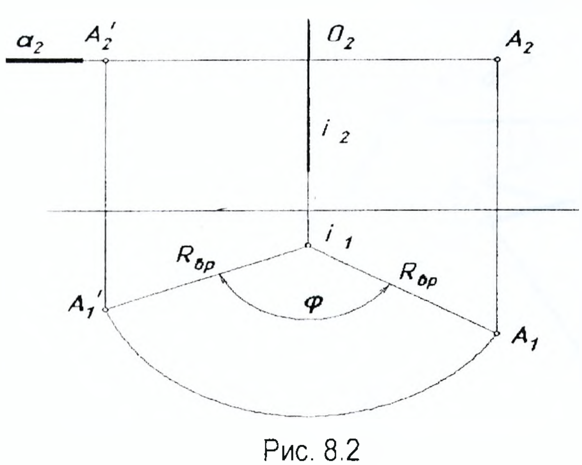


Рис. 8.2

Задача 1. Точку A повернуть вокруг горизонтально-проецирующей оси **I** на угол **φ** (рис. 8.2)

Алгоритм решения

Используем аппарат вращения

(геометрические элементы вращения):

1. (.) A (A_1A_2)-объект вращения;
2. J(J_1,J_2)- ось вращения $\perp \Pi_1$;
3. $\alpha(\alpha_2)$ – плоскость вращения $\parallel \Pi_1$; $\alpha_2 \perp j_2$

(параметры вращения):

4. $\alpha_2 \cap j_2 \rightarrow O_2$; O_1=j_1; O(O_1;O_2) – центр вращения;
5. O_1A_1 – н.в. R вр. (.) A.- радиус вращения;

угол φ- угол поворота (.) A вокруг оси **I**.

Вращение вокруг линии уровня

Задача 2. Определить натуральную величину ΔABC вращением вокруг линии уровня (горизонтали) рис.8.3.

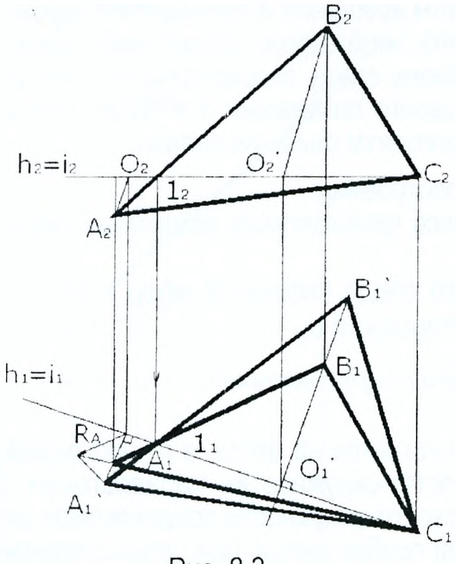


Рис. 8.3

Алгоритм решения (рис. 8.3)

Согласно условию задачи осью вращения является линия уровня, в данном примере – горизонталь. На чертеже проводить горизонталь можно произвольно, однако необходимо руководствоваться тем, чтобы принятый вариант являлся бы оптимальным. В связи с этим целесообразно провести горизонталь через одну из вершин заданной плоскости, что в итоге сократит количество графических операций при определении новых положений объектов вращения.

Реализуем аппарат вращения

1. Выбираем объекты вращения: точки А и В, т.к. точка С принадлежит оси вращения и является неподвижной;
2. Выбираем ось вращения – горизонталь С1 ($C_1 1_1$, $C_2 1_2$);
3. Определяем плоскости вращения точек А и В;
4. Определяем центры вращения О (O_1,O_2) и О\`(О\`$_1$,О\`$_2$);
5. Определяем проекции радиусов вращения АО (A_1O_1, A_2O_2) и ВО\` ($B_1$О\`$_1$, B_2О\`$_2$);
6. Определяем натуральные величины R_A и R_B;
7. Натуральная величина радиусов вращения R_A и R_B определяется методом прямоугольного треугольника;
8. Соединив полученные точки - А\`$_1$В\`$_1$С$_1$ определяем натуральную величину плоскости треугольника АВС, которая на чертеже параллельна горизонтальной плоскости проекций. Соответственно фронтальная проекция плоскости треугольника преобразуется в прямую, совпадающую с фронтальной проекцией оси вращения - l_2 , т.к. $l_{вр}$. параллельна $П_1$.

Вращение вокруг следа (способ совмещения)

Совмещение (вращение вокруг следа плоскости) – это частный случай вращения вокруг горизонтали или фронтали, т.к. следы плоскости - это нулевые горизонтали и фронтали. Если вращение происходит вокруг горизонтального следа, то плоскость совмещается с горизонтальной плоскостью проекций. Если вращение осуществлено вокруг фронтального следа, то плоскость совмещается с фронтальной плоскостью проекций.

Задача 3. Определить натуральную величину отрезка **АВ**, принадлежащего плоскости α, способом совмещения (вращения вокруг следа плоскости **α**.) (рис. 8.4).

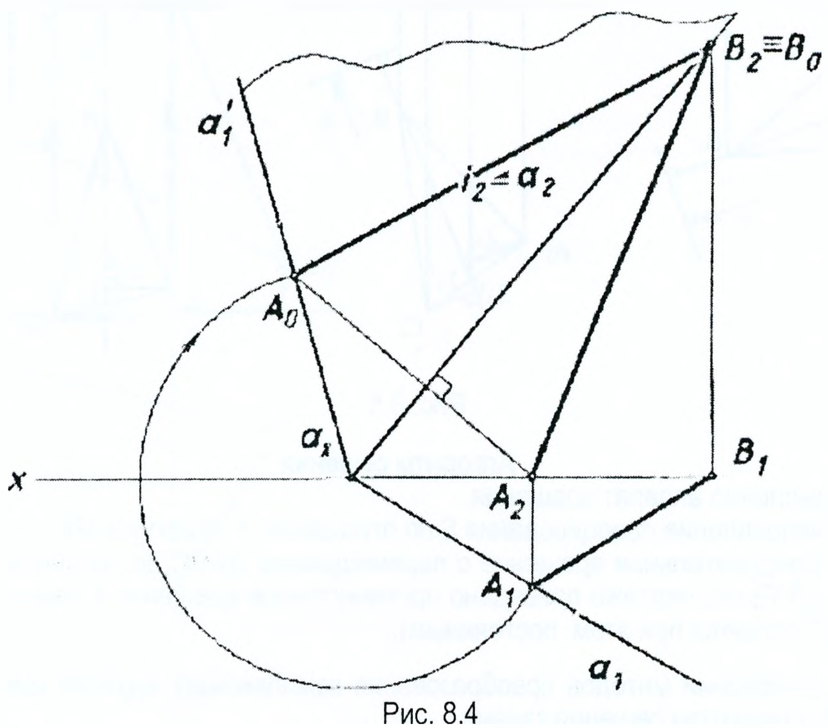


Рис. 8.4

Алгоритм решения

Фронтальный след заданной плоскости **α** является нулевой фронталью, а следовательно и осью вращения **I**. Точка **B**, которая является по условию задачи объектом вращения и принадлежит фронтальному следу плоскости **α**, остается неподвижной. Поэтому определить необходимо только лишь новое положение точки **A**. Однако точка **A** также принадлежит горизонтальному следу плоскости **α**, поэтому и в новом совмещенном положении следа точка **A** также не изменит своего положения, т.е. будет принадлежать этому следу. Проведя предварительный анализ, составляем алгоритм решения задачи.

Используя *аппарат вращения*, выполняем графические построения:

1. Определяем объект вращения (точку A) и выявляем все необходимые зависимые параметры от объекта вращения.

2. Определяем совмещённое положение горизонтального следа плоскости $\alpha(\alpha_1)$ с плоскостью $П_2$, вращая его вокруг следа α_2; а также н.в. **AB** в совмещенной плоскости **α.**

Плоскопараллельное перемещение (вращение объекта вокруг невыявленных осей с последовательным его перемещением)

Суть способа заключается в том, что плоскость проекций остаётся на месте, а объект перемещается таким образом, чтобы все его точки перемещались в плоскостях-окружностях, параллельных одной из плоскостей проекций. На второй плоскости проекций эти плоскости-окружности представляют собой следы в виде прямых линий, параллельных оси OX. Характерной особенностью при осуществлении вращения-перемещения геометрического образа является то, что углы наклона его к плоскостям проекций не изменяются по отношению к первоначальным. В связи с этим, на чертеже и величина одной из заданных проекций заданного геометрического образа не изменяется, т.е. остается конгруэнтно-заданной. При проведении графических построений, решая задачу, мысленно реализуется аппарат вращения. Для лучшего восприятия метода на рис.8.5 указана плоскость вращения, которая перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали заданной плоскости треугольника, а также указано направление проецирования. Направление проецирования не изменяется при осуществлении вращения с перемещением и составляет одновременно жесткую систему с объектами вращения.

Задача 4. Преобразовать плоскость ΔABC в проецирующую (рис. 8.5).

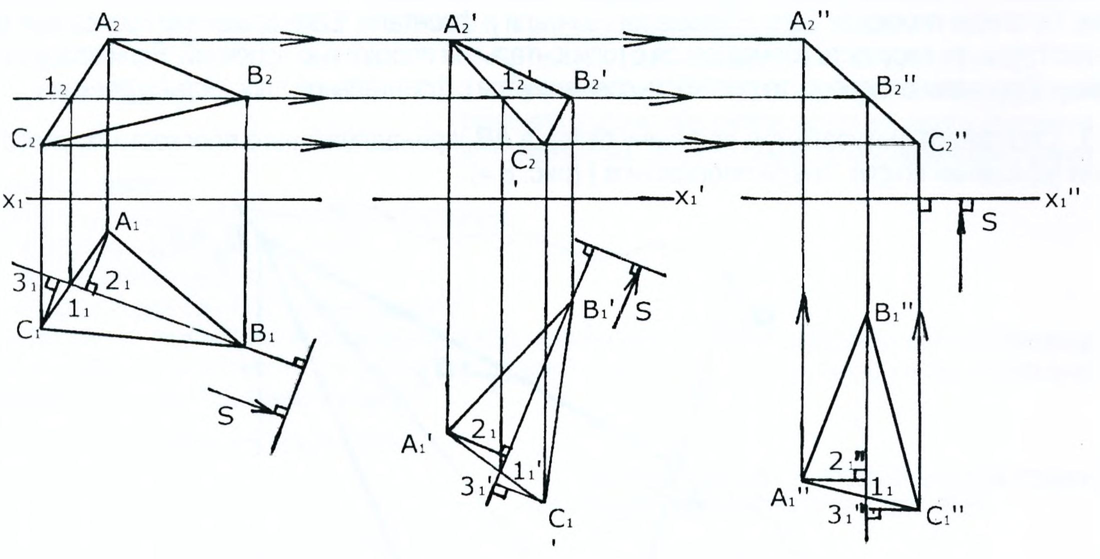


Рис. 8.5

Алгоритм решения

Реализовываем мысленно аппарат вращения.

Выбираем новое направление проецирования S по отношению к объекту ΔABC;

Осуществляем последовательное вращение с перемещением ΔABC до положения, перпендикулярного плоскости проекций $П_2$ (на чертеже приведено промежуточное вращение с перемещением, угол наклона плоскости ΔABC остается при этом постоянным).

Выводы: при использовании методов преобразования комплексного чертежа имеется возможность значительно упростить алгоритмы решения задачи.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Методом вращения вокруг проецирующей оси определить натуральную величину расстояния от точки D до прямой АВ.

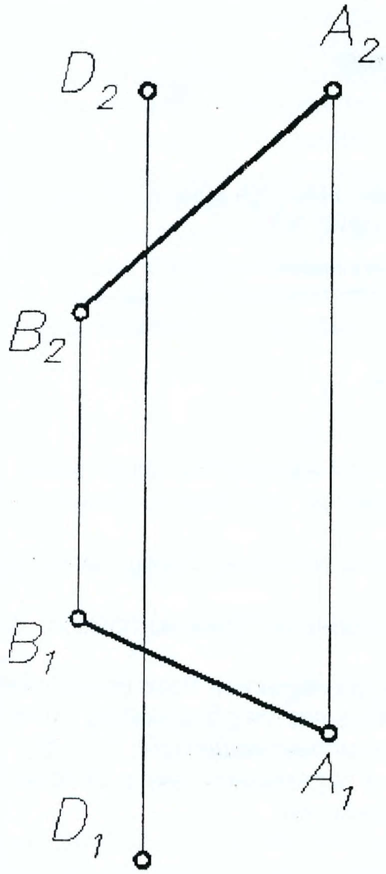


Рис. 8.6

Задача 2. Определить натуральную величину треугольника АВС методом плоскопараллельного перемещения.

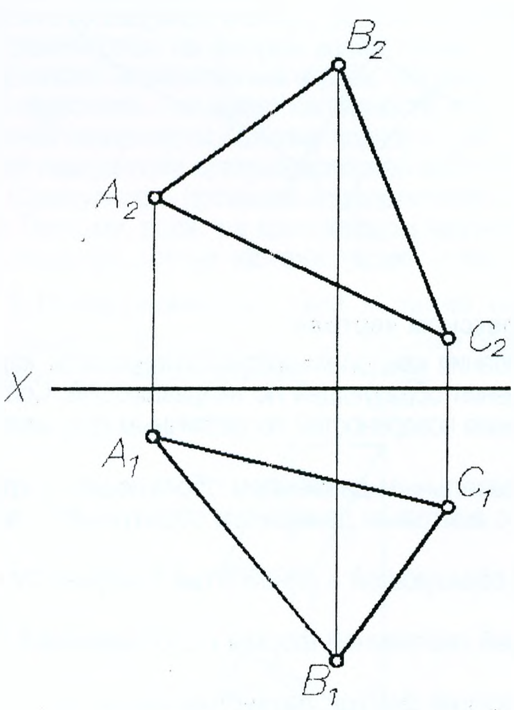


Рис. 8.7

ЛЕКЦИЯ 9

Тема. Поверхности
Вопросы:

1. Общие сведения о кривых линиях и поверхностях;
2. Образование поверхностей и задание их на комплексном чертеже;
3. Принадлежность точки и линии поверхности;
4. Классификация поверхностей.

1. Общие сведения о кривых линиях и поверхностях

Наряду с прямыми линиями, отрезками прямых линий, ломаными имеются кривые линии. Линия, которая не является прямой либо ломаной, называется кривой линией (рис. 9.1).

Рис. 9.1

Кривые линии разделяют на: плоские и пространственные. Плоской называется такая линия, все точки которой лежат в одной плоскости. Примером плоских кривых являются: окружность, эллипс, циклоида, эвольвента окружности и др.

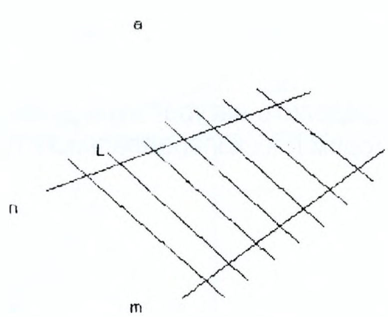
В качестве примера пространственных кривых можно представить винтовую линию: цилиндрическую и коническую.

Цилиндрическая винтовая линия образована равномерным движением точки по прямой, которая в свою очередь равномерно вращается вокруг параллельной ей оси.

В начертательной геометрии *поверхность* рассматривается как совокупность всех последовательных положений движущейся линии. Линия, которая образует поверхность, называется *образующей*. Линия (неподвижная), по которой перемещается (скользит) образующая, называется *направляющей* (рис. 9.2а, б).

Образующая может быть прямой линией, кривой, постоянного и переменного вида. Исходя из этого делаем вывод, что существует многообразие разновидностей поверхностей.

а) б)



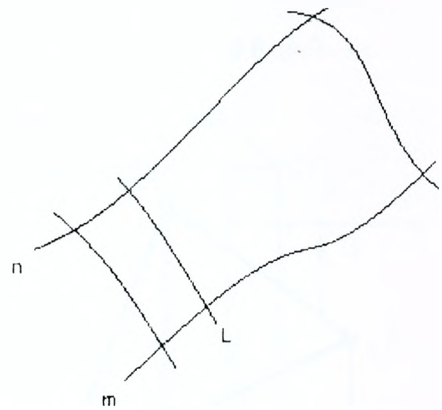


Рис. 9.2

2. Образование поверхностей и задание их на комплексном чертеже

С этой целью определены кинематические законы образования каждой конкретной поверхности, которая включают в себя форму образующей, а также закон перемещения образующей по направляющей. Согласно этому, рассмотрим наиболее важные закономерности образования поверхностей по различным признакам, законам и свойствам.

По закону движения образующей: поверхности с поступательным движением образующей, с вращательным движением образующей – поверхности вращения, с винтовым движением образующей – винтовые поверхности.

По форме образующей: поверхности с прямолинейной образующей – линейчатые поверхности и поверхности с криволинейной образующей (криволинейные).

По закону изменения формы образующей: с образующей постоянной формы и с образующей переменной формы.

По признаку развёртывания участка поверхности в плоскую фигуру: развёртываемые и не развёртываемые.

По закону образования: закономерные и незакономерные. Закономерные могут быть алгебраическими, первого, второго и выше порядков, и трансцендентными.

По дифференциальным свойствам: гладкие, негладкие и другие.

Заметим, что одни и те же поверхности могут быть классифицированы по различным признакам.

Важным является вопрос задания поверхности на комплексном чертеже посредством определителя; т. е. заданием полного непрерывного каркаса поверхности. Ряд фиксированных, с определённым интервалом последовательных положений образующей и направляющей, создают каркас поверхности.

Определителем поверхности является совокупность геометрических элементов, реализующих закон каркаса поверхности, как в пространстве, так и на чертеже. Определитель поверхности состоит из двух частей: *геометрической и алгоритмической- ø-- (Г) ; [А].*

Геометрическая часть констатирует форму образующей и направляющей.

Алгоритмическая часть определяет условия перемещения или же изменения образующей.

Одна и та же поверхность может иметь несколько каркасов. Поэтому для каждой поверхности может быть и несколько определителей. Поверхности относятся к многопараметрическим ГО с определёнными заранее заданными требованиями. Эти требования интерпретированы в первую очередь геометрически, с точки зрения позиционных и метрических условий.

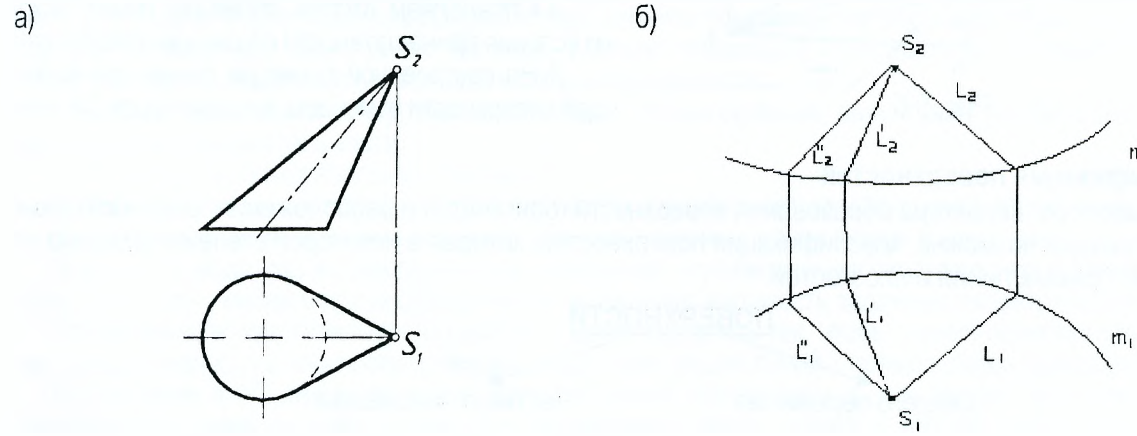


Рис. 9.3

В зависимости от требований, предъявляемых в каждом конкретном случае, поверхности могут быть заданы на комплексном чертеже проекциями контура либо проекциями каркаса, т.е. очерком (рис. 9.3 - пример задания конической поверхности проекциями контура и каркаса). Определителем здесь является образующая L (L_1, L_2), проходящая через неподвижную точку S (S_1, S_2) и пересекающая направляющую кривую линию m (m_1, m_2).

Такое задание поверхности является позиционно-полным и метрически определённым, т. е. на чертеже определителя поверхности можно решать любые позиционные и метрические задачи, связанные с поверхностью. При этом чертеж, на котором задан только определитель поверхности, называется элементарным чертежом поверхности. Элементарный чертёж, обладая рядом достоинств (лаконичность, конкретность, простота), имеет один недостаток – не имеет наглядности, т.е. по элементарному чертежу не всегда можно представить форму заданной поверхности. Поэтому наряду с (рис. 9.3,б) элементарным чертежом поверхности имеется и основной чертёж поверхности, который дополнен изображением контурных линий (рис. 9.3,а).

Совокупность проекций определителя и проекций контурных линий называют проекциями поверхностей. Поэтому, если на комплексном чертеже поверхность задана своими проекциями, то под этим следует понимать, что на чертеже заданы и проекции определителя и проекции контурных линий.

3. Принадлежность точки и линии поверхности

Одним из основных условий задания поверхности на чертеже является условие принадлежности точки заданной поверхности (рис. 9.4; 9.5).

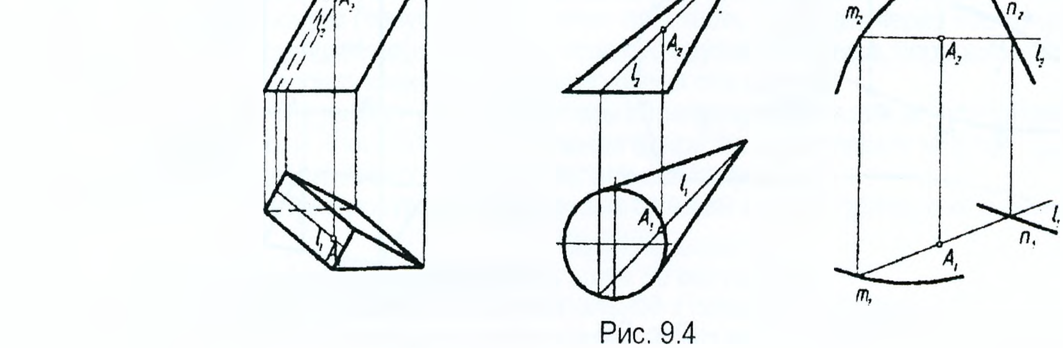


Рис. 9.4

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности. В качестве линий принадлежащих поверхности выбирают простые линии - прямые или окружности (на рис. 9.4; 9.5 показано решение задач построения ортогональных проекций точки *А и 1*, принадлежащих поверхности с помощью образующей - прямой линии).

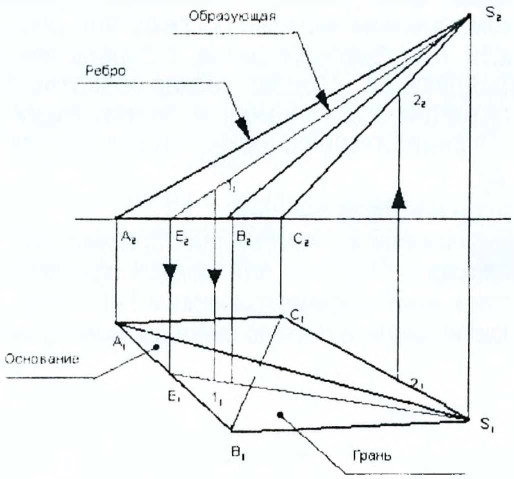


Рис. 9.5

Решение такого типа задач по построению точки, принадлежащей поверхности, проводится в следующей последовательности:

1. Одна проекция точки на чертеже задаётся произвольно в пределах очерка поверхности;
2. Через заданную проекцию точки проводим проекцию линии, принадлежащую поверхности;
3. Определяем вторую проекцию линии, исходя из условия принадлежности её данной поверхности;
4. На построенной проекции линии принадлежащей поверхности отмечаем искомую проекцию точки.

4. Классификация поверхностей

В зависимости от характера образования поверхности (оригинала) и расположения её относительно плоскостей проекций возможна классификация поверхностей, которая в некоторой степени основана на классификации прямых линий и плоскостей.

ПОВЕРХНОСТИ

Общего положения | Частного положения

Частного положения: уровня | проецирующие

Поверхности общего положения - поверхности, у которых *образующая* каркаса при всех ее перемещениях по направляющей представляет *линию (прямую, кривую) общего положения*. При этом, единичное частное ее положение не является основополагающим.

Поверхности уровня- поверхности, у которых образующая каркаса при всех ее перемещениях по направляющей занимает положение прямой линии уровня

Проецирующие поверхности – поверхности, у которых *образующая* каркаса при всех ее перемещениях по направляющей является *проецирующей прямой*. Такие поверхности имеют вырожденную основную проекцию, обладающую свойством собирательности, что позволяет существенно снизить степень сложности графического алгоритма решения задач. Графические построения проекции точки, принадлежащей поверхности, упрощается, так как соответствующие проекции рассматриваемой точки будут всегда расположены на вырожденной основной проекции заданной поверхности (рис. 9.6).

а) б)

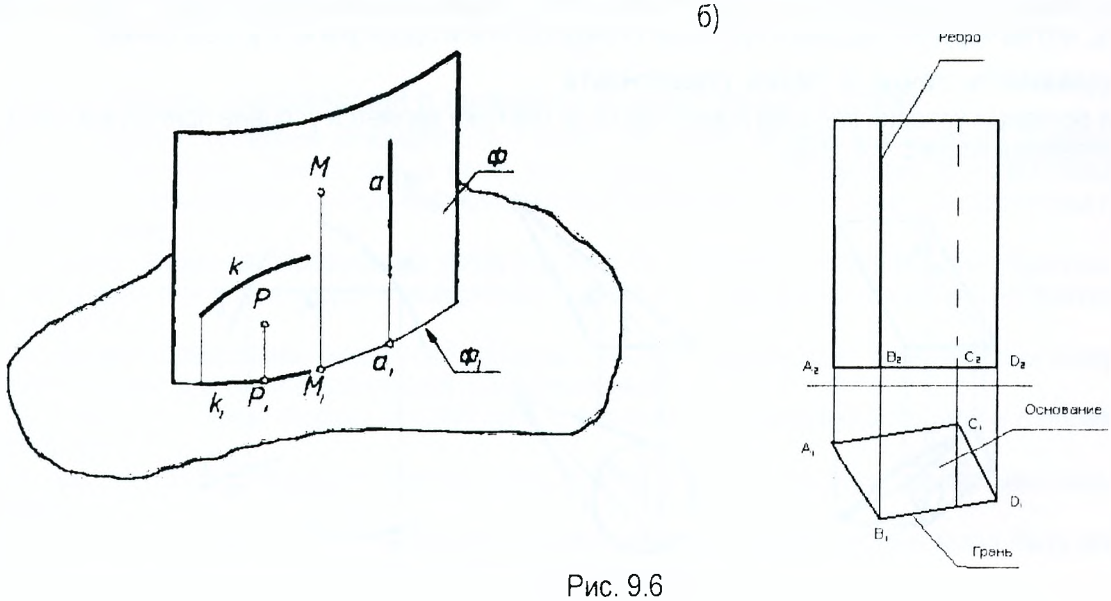


Рис. 9.6

ЛЕКЦИЯ 10

Тема. Пересечение поверхности плоскостью частного положения

Вопросы:

1. Общие положения построение линии пересечения поверхности плоскостью;
2. Пересечение поверхностей плоскостью частного положения.

Выводы.

1. Общие положения построения линии пересечения поверхности плоскостью

Сечением является плоская замкнутая фигура, полученная в результате пересечения заданной плоскости с поверхностью.

Для того чтобы построить линию пересечения любой поверхности с плоскостью, необходимо найти ряд точек, принадлежащих как поверхности, так и плоскости, и затем эти точки соединить плавной линией (кривой, ломаной и т.д.). Точки линии сечения классифицируются следующим образом: *характерные и промежуточные* (случайные). Характерные точки принадлежат ребрам гранных поверхностей, очерковым образующим криволинейных поверхностей, линиям основания на чертеже, точки, разграничивающие видимую и невидимую часть линии сечения, а также наинизшие и наивысшие. Промежуточные – произвольные точки, принадлежащие линиям каркаса поверхности.

Для того чтобы найти точку, принадлежащую линии сечения, выполняют графические построения в следующей последовательности.

1. Проводят вспомогательную плоскость.
2. Находят линии пересечения этой плоскости с поверхностью и заданной плоскостью.
3. На пересечении найденных линий получают искомые точки (чаще всего – две).

В итоге, проводя ряд вспомогательных плоскостей, определяют необходимое число точек, соединяют их соответствующей линией и при необходимости определяют видимость заданных геометрических образов.

Примечание: вспомогательную плоскость следует выбирать так, чтобы линия пересечения ее с поверхностью проецировалась на плоскости проекций в виде простейших линий – прямых либо окружностей.

Рассмотрим в общем виде, какие линии сечения образуются в результате пересечения гранных и криволинейных поверхностей заданной плоскостью и какие имеются способы решения задач по определению линии сечения.

Сечение многогранника

Многогранник состоит из плоскостей (граней) и прямых линий (ребер). Проекциями сечения многогранников, в общем случае, являются многоугольники, вершины которых принадлежат ребрам, а стороны – граням многогранника. Поэтому задачу определения сечения многогранника можно свести к многократному решению задачи по определению точки пересечения прямой с плоскостью. В итоге, для определения пересечения ребер либо граней многогранника с заданной плоскостью разработаны: *способ ребер; способ граней.*

Сечение криволинейных поверхностей

Если заданная поверхность криволинейная с прямолинейными образующими для построения линии сечения, необходимо вписать в нее гранную поверхность, т.е. в итоге при составлении графического алгоритма решения задачи будет применяться способ *ребер*. При этом необходимо знать вид и характер образованной линии сечения поверхности (цилиндра, конуса, шара ...,) с заданной плоскостью.

Сечение цилиндра

Плоскость пересекает поверхность прямого кругового цилиндра:

1. По окружности, если плоскость перпендикулярна оси цилиндра;
2. По эллипсу, если плоскость произвольно наклонена к оси цилиндра;
3. По двум образующим, если плоскость параллельна оси цилиндра;
4. По одной образующей, если плоскость - касательная к поверхности цилиндра.

Сечение конуса

Плоскость, проходящая через вершину прямого кругового конуса, пересекает его поверхность:

1) по одной образующей, если плоскость является касательной к поверхности конуса;
2) по двум образующим (треугольнику), если плоскость проходит через ось конуса.

Плоскость, не проходящая через вершину прямого кругового конуса, пересекает его поверхность:

1) по окружности, если плоскость перпендикулярна оси конуса;
2) по эллипсу, если плоскость пересекает все образующие конуса и не перпендикулярна оси конуса;
3) по параболе, если плоскость параллельная одной из образующих конуса;
4) по гиперболе, если плоскость параллельна оси конуса.

Примечание: геометрия построения указанных сечений конуса приведена в лекции № 14.

Сечение шара

Любая плоскость пересекает поверхность шара по окружности.

В частном случае плоскость является касательной к поверхности шара.

Примечание: поверхность вращения пересекается по окружности плоскостью, перпендикулярной к ее оси.

2. Пересечение поверхностей плоскостью частного положения

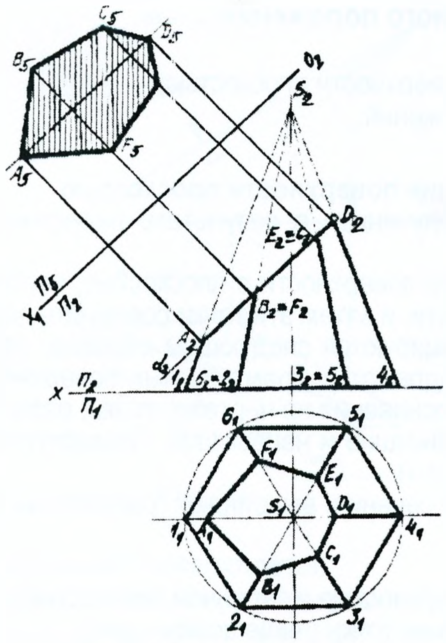


Рис. 10.1

Задача 1. Построить проекции линии пересечения поверхности пирамиды плос-костью частного положения (рис.10.1).

Алгоритм решения

1. Выявляем характерные точки, принадлежащие линии сечения А, В, С….
2. Учитывая свойство собирательности плоскости **α** (**α**2), фронтальная проекция линии пересечения на чертеже A_2, B_2, C_2… будет принадлежать фронтальному следу плоскости α_2 в пределах очерка пирамиды.
3. Горизонтальная проекция линии пересечения построена на основании условия принадлежности точек А,В,С …. горизонтальным проекциям ребер пирамиды.
4. Натуральная величина линии сечения на чертеже определена способом замены плоскостей проекций.

Задача 2. Построить проекции линии пересечения поверхности цилиндра плоскостью частного положения (рис. 10.2).

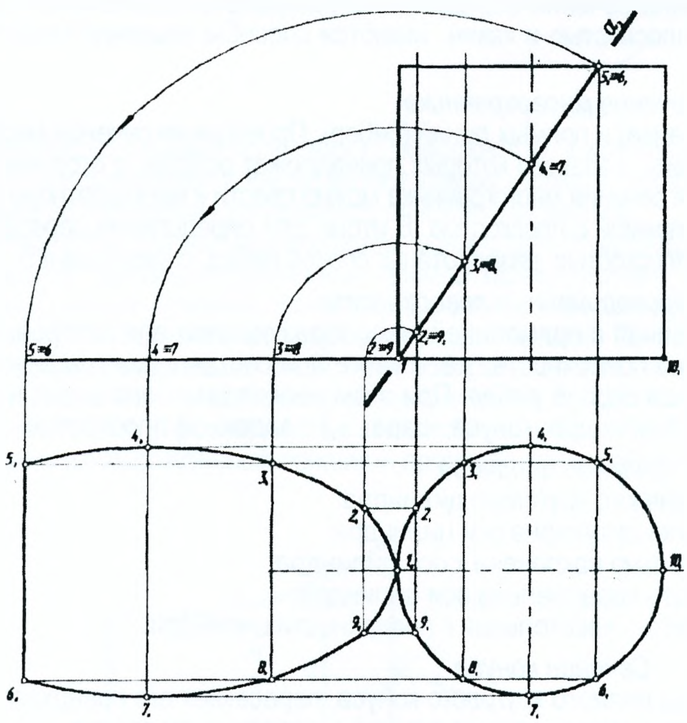


Рис. 10.2

Алгоритм решения

Аналогично предыдущему примеру, для выявления характерных и промежуточных точек, принадлежащих линии сечения, мысленно впишем в поверхность цилиндра n-гранную призму, т.е. на чертеже выполняем графические построения каркаса поверхности цилиндра. Фронтальная проекция линии сечения совпадает с фронтальным следом плоскости **α** -**α**2. Горизонтальная проекция - совпадает на чертеже с горизонтальной проекцией основания цилиндра, на основании свойства собирательности проецирующего геометрического образа, т. к. поверхность цилиндра перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. Натуральная величина сечения определена методом плоскопараллельного перемещения.

Задача 3. Построить линию пересечения поверхности конуса с плоскостью **α.**

Алгоритм решения

Для составления алгоритма решения задачи предварительно необходимо выполнить графические построения. По условию задачи задана криволинейная поверхность, в которой отсутствуют ребра либо грани. Каркас такой поверхности состоит из образующих – прямых линий, проходящих через вершину конуса и его основание. В итоге, решение данной задачи сводится к следующему: графически выполняем построения каркаса, мысленно впишем в криволинейную поверхность конуса, n-гранную поверхность пирамиды. Для этого на чертеже делим основание конуса на равные части, а затем проводим через вершину конуса и обозначаем проекции образующих.

Учитывая свойство собирательности плоскости α_1, фронтальная проекция линии пересечения на чертеже будет принадлежать фронтальному следу плоскости α_2 в пределах очерка конуса. Горизонтальную проекцию линии сечения определяем исходя из принадлежности точек линии сечения геометрическому образу общего положения, т.е. в данном случае - поверхности конуса. При этом вначале выделяют характерные точки линии сечения, а затем промежуточные.

В данном примере натуральную величину линии сечения определяем способом замены плоскостей проекций, однако можно применять и другие возможные методы. Последовательность выполнения графических построений линии сечения и натуральной величины сечения представлены на рис. 10.3.

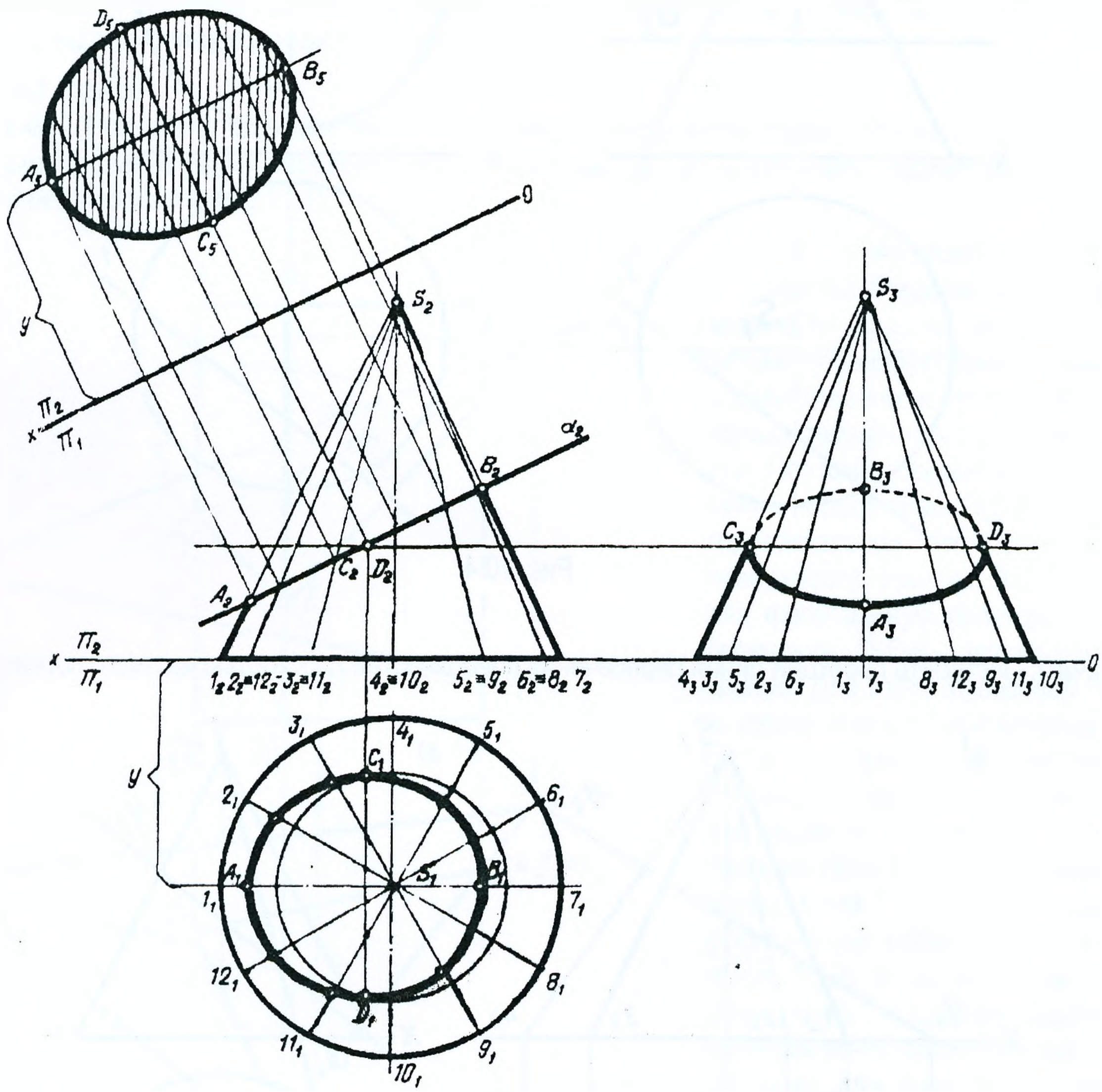


Рис. 10.3

Выводы: в результате пересечения поверхности плоскостью частного положения решение задачи имеет частный характер, т.к. проецирующий геометрический образ обладает свойством собирательности. В этом случае на чертеже одна из проекции искомой линии сечения совпадает с вырожденной проекцией проецирующего геометрического образа частного положения. Вторая недостающая проекция линии сечения определяется на основании принадлежности точек геометрическому образу общего положения.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Построить проекции линии пересечения конуса и шара плоскостью частного положения.

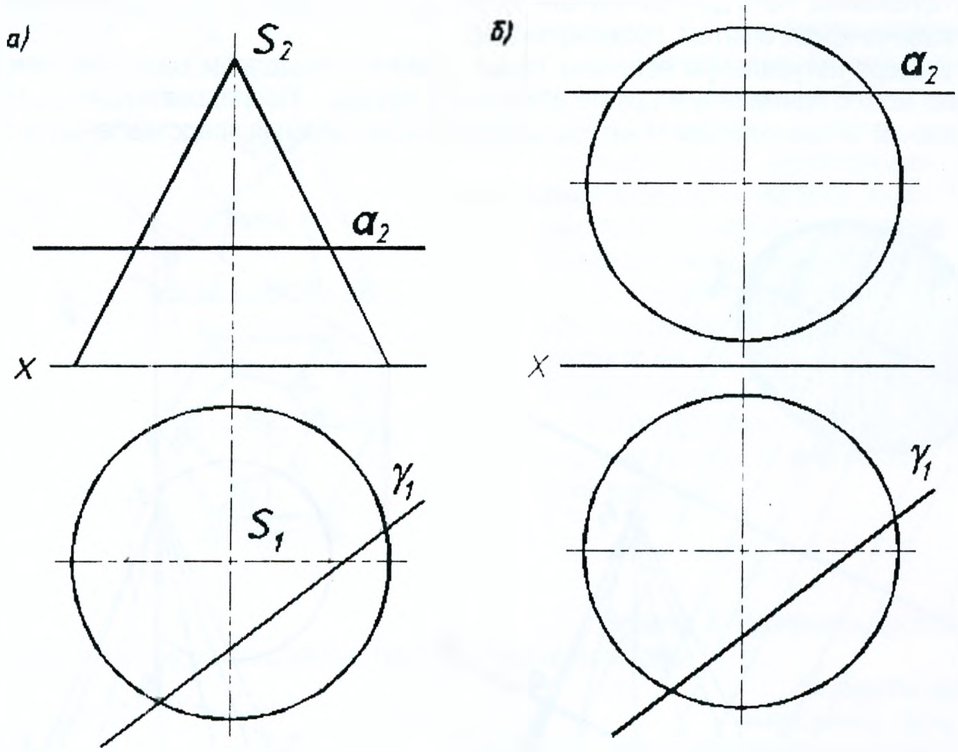


Рис. 10.4

Задача 2. Построить проекции линии пересечения поверхностей плоскостью частного положения.

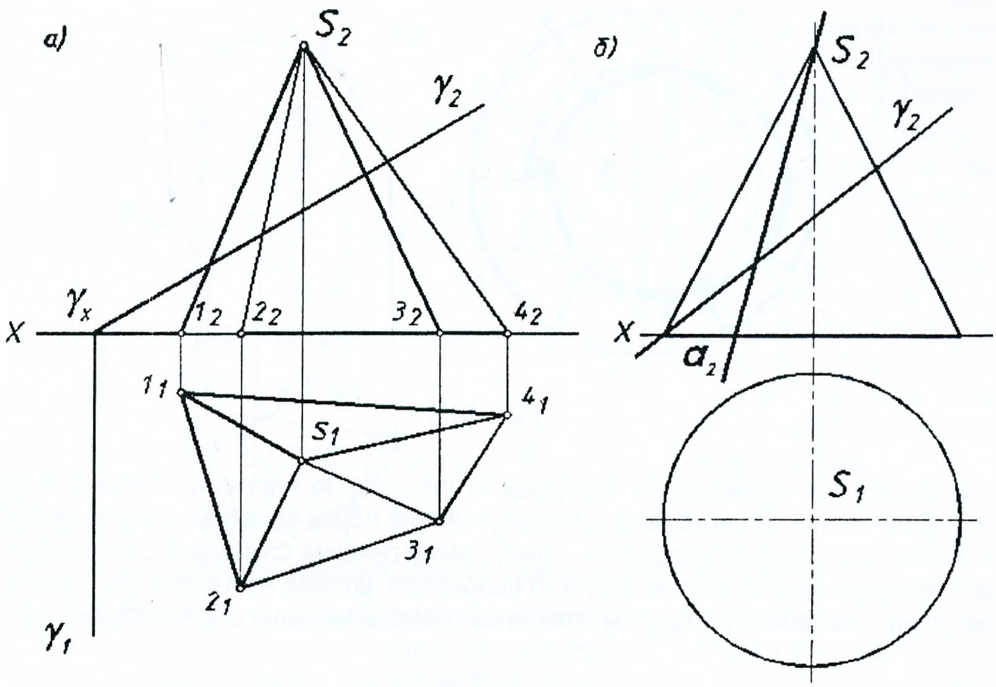


Рис. 10.5

ЛЕКЦИЯ 11

Тема. Пересечение поверхности плоскостью общего положения

Вопросы:

1.Пересечение поверхности плоскостью общего положения:
– метод ребер; метод граней.

1. Пересечение поверхности плоскостью общего положения

При решении задач по определению линии пересечения поверхности плоскостью общего положения применяются методы *граней и ребер*. Сущность методики построения графического алгоритма решения такого типа задач основана на том, что заданная плоскость является плоскостью общего положения и может быть задана произвольным отсеком и следами.

Метод граней

Задача 1. Построить проекции линии пересечения поверхности призмы плоскостью общего положения. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми (а∩ в). Определить видимость линии сечения, поверхности и плоскости (рис.11.1).

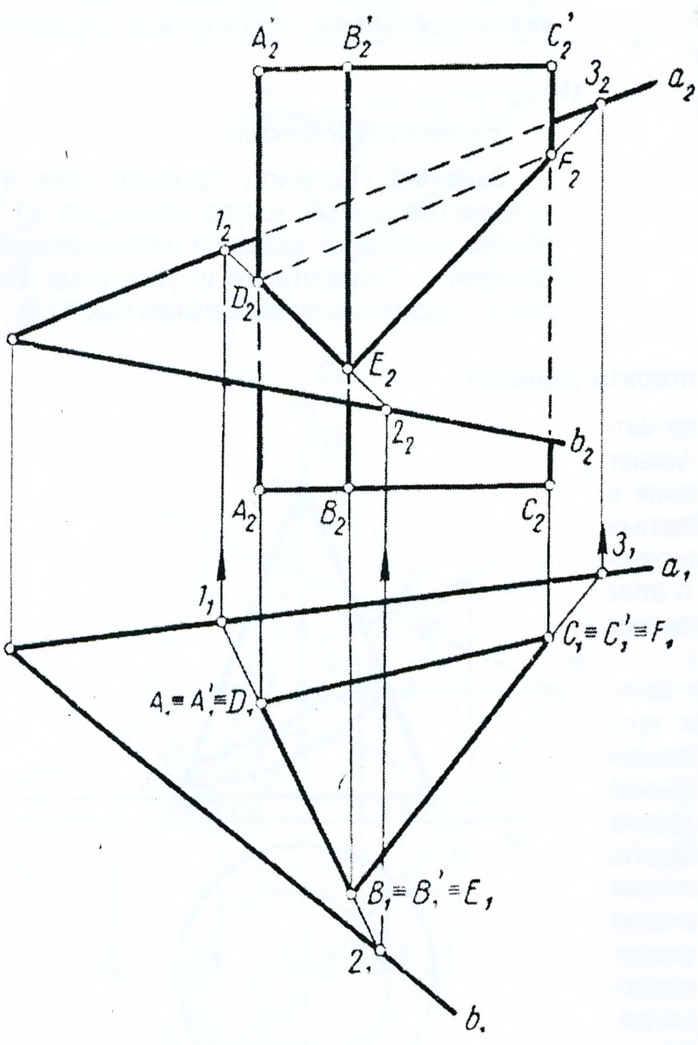


Рис. 11.1

Алгоритм решения

Так как боковые ребра данной поверхности призмы являются горизонтально-проецирующими прямыми, то соответственно и грани представляют горизонтально-проецирующие плоскости. Поэтому горизонтальная проекция линии пересечения $D_1E_1F_1$ совпадает с горизонтальной проекцией основания поверхности призмы $A_1B_1C_1$. Определяя фронтальную проекцию линии пересечения $D_2E_2F_2$, используем метод *граней*. Для этого заключаем грань АВ в горизонтально-проецирующую плоскость **α**. Определяем горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости **α** с заданной плоскостью, т.е. 1_1 и 2_1. Находим фронтальную проекцию линии пересечения - $1_2 2_2$. На пересечении фронтальной проекции линии пересечения 1_2 2_2 и фронтальной проекции грани A_2 B_2 определяем фронтальные проекции точек линии сечения D_2 E_2. По аналогии, для определения недостающей точки **F** линии сечения необходимо провести аналогичные графические построения. Определив все точки линии пересечения, соединяем их ломаной линией и определяем видимость.

Метод ребер

Задача 2. Построить проекции линии пересечения поверхности призмы плоскостью общего положения. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми. Определить видимость: линии сечения, поверхности и плоскости (рис.11.2).

Алгоритм решения

В данной задаче приведено построение линии пересечения поверхности плоскостью методом *ребер*. Последовательно заключаются на чертеже горизонтальные проекции ребер поверхности призмы в горизонтально-проецирующие плоскости. В соответствующей последовательности определяются проекции линии пересечения двух плоскостей – заданной и плоскостей-посредников частного положения. Далее на пересечении, в данном случае фронтальных проекций линий пересечения и соответствующих фронтальных проекций ребер поверхности призмы, определяются фронтальные проекции точек линии сечения $1_2, 2_2, 3_2$. Горизонтальные проекции точек линии сечения определяются на соответствующих горизонтальных проекциях ребер поверхности призмы. Соединяем полученные точки ломаной линией и определяем видимость.

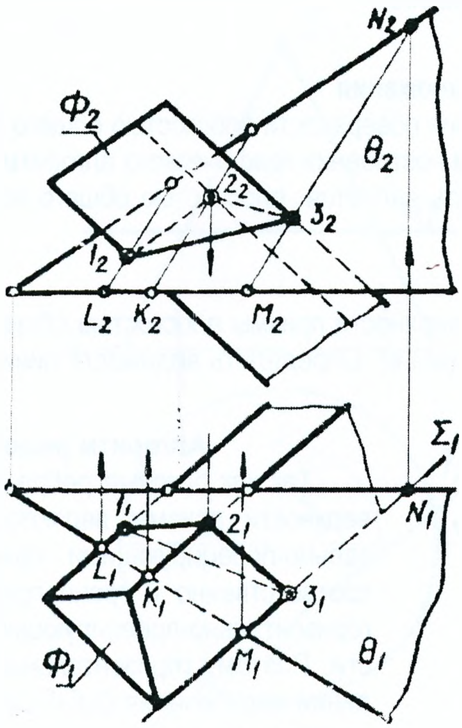


Рис. 11.2

Кривые поверхности

Задача 3. Построить проекции линии пересечения поверхности конуса плоскостью $\alpha(f \cap \hat{h})$ общего положения заданной пересекающимися прямыми – горизонталью и фронталью. Определить видимость линии сечения (рис.11.3).

Алгоритм решения

В рассматриваемой задаче оба заданных геометрических образа, поверхность и плоскость, занимают общее положение. При построении линии сечения в первую очередь необходимо определить характерные точки: высшую и низшую; точки, принадлежащие очерковым образующим; промежуточные. В связи с этим построение алгоритма решения задачи представляет собой следующую геометрию:

1.Определяем характерные точки линии сечения. Для определения высшей и низшей точек проводим плоскость **σ** через вершину конуса, перпендикулярную к горизонтали $\hat{h}_1$, а значит и к заданной плоскости **α** .Плоскость **σ**, являясь общей плоскостью симметрии и для конуса и для секущей плоскости, пересечет плоскость **α** по прямой **m** – оси симметрии искомого сечения. Высшая и низшая точки сечения определяются пересечением прямой **m** с образующими SA и SB, по которым плоскость **σ** пересекает конус. Для определения точек 3 и 4 линии сечения, принадлежащих очерковым образующим, проводим вспомогательную плоскость $\beta(\beta_1)$ через вершину конуса, параллельную плоскости проекций Π_2.

2. Определяем промежуточные точки, в которых прямолинейные образующие, составляющие каркас поверхности конуса, пересекаются с плоскостью **α**. На рис.11.3 в качестве примера построена точка 5, при-

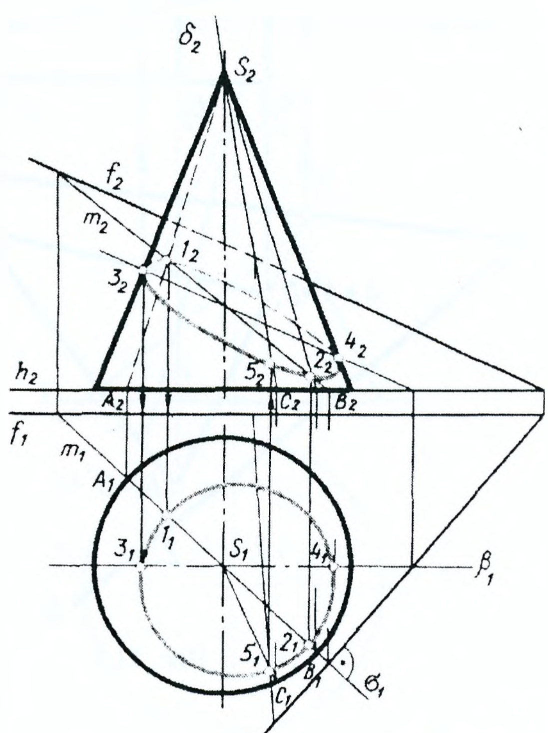


Рис. 11.3

надлежащая образующей SC. Для этого необходимо заключить эту и последующие образующие в плоскость частного положения и решить основную задачу начертательной геометрии, т.е. задачу на построение точки пересечения прямой с плоскостью.

3. Определив все необходимые точки сечения, необходимо соединить их плавной кривой и определить видимость.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью общего положения (рис.11.4) .

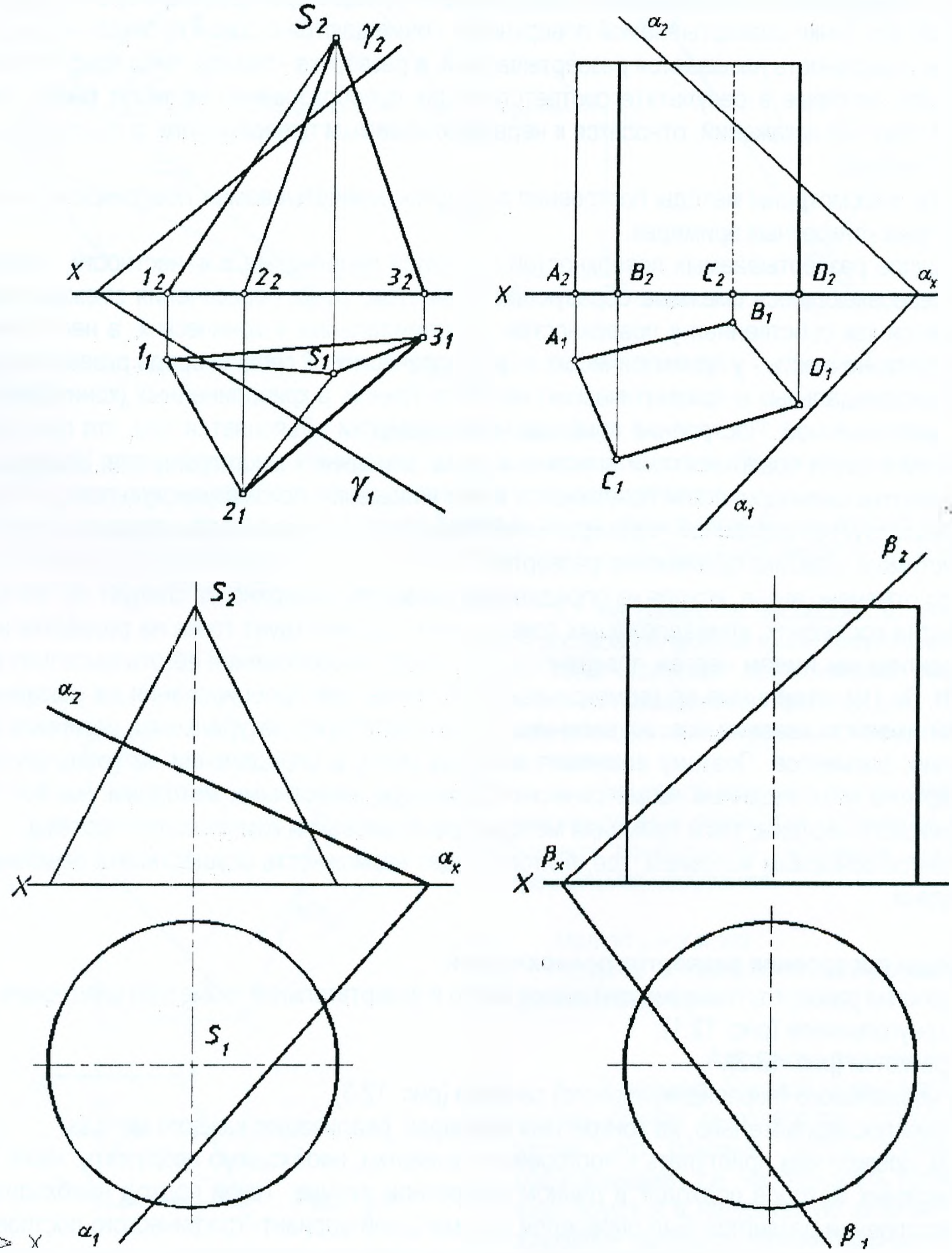


Рис. 11.4

ЛЕКЦИЯ 12

Тема. Развёртки поверхностей

Вопросы:

1. Общие сведения о развёртках поверхностей;
2. Методы построения развёрток поверхностей.

Выводы.

1. Общие сведения о развертках поверхностей

Развёртка поверхностей представляет собой соответствующее преобразование, в результате выполнения которого все точки развёртываемой поверхности совмещаются с одной плоскостью без искажений. В этом случае поверхность называется развёртываемой, а развёртка - точной, либо приближённой.

Поверхности, которые в результате соответствующих преобразований не могут быть совмещены с одной плоскостью без искажений, относятся к неразвёртываемым поверхностям, а поэтому их развёртка называется условной.

Ниже будут рассмотрены методы построения развёрток развёртываемых поверхностей и их реализация на некоторых конкретных примерах.

Итак, к группе развёртываемых поверхностей относятся линейчатые и в, частности, те из них, которые имеют пересекающиеся смежные образующие. При этом, точка пересечения смежных образующих рассматривается как собственная у поверхностей - пирамидальных и конических, а несобственная, т.е. удалённая в бесконечность - у призматических и цилиндрических. В свою очередь развёртка гранных поверхностей (пирамидальных и призматических) является точной, а криволинейных (конических и цилиндрических) - приближённой. Построение приближённой развёртки объясняется тем, что при этом поверхности апроксимируются поверхностями вписанных, либо описанных многогранников. Например, для построения развёртки цилиндрической поверхности в неё вписывают призматическую поверхность, коническая - аппроксимируется вписанной пирамидальной поверхностью. Неточность, вызвана аппроксимацией, вполне допустима в практике применения развёрток.

Как было отмечено выше, исходя из определения развёртки поверхности следует то, что каждой точке из множества последних, принадлежащих поверхности, соответствует точка на развёртке и наоборот. Однако в практике мы имеем чертёж поверхности, где ввиду расположения её относительно плоскостей проекции ($П_1$; $П_2$; $П_3$), отдельные её геометрические элементы при проецировании на указанные плоскости проекций имеют искажение, т.е. их величины не соответствуют натуральным, истинным величинам геометрических элементов. Поэтому возникает необходимость в определении натуральных величин на исходном чертеже всех заданных геометрических элементов известными методами, как без преобразования комплексного чертежа, так и применяя методы преобразования комплексного чертежа.

Это является основным условием, где, в итоге, будет возможность осуществлять решение прямой и обратной задачи.

2. Методы построения разверток поверхностей

Для построения развёрток поверхностей имеют место в начертательной геометрии следующие методы:

- метод треугольников (рис. 12.1);
- метод раскатки (рис. 12.2);
- метод нормального (перпендикулярного) сечения (рис. 12.3).

Рассмотрим последовательно, на конкретных примерах, реализацию каждого метода.

При этом, прежде чем приступать к построению развертки, необходимо продумать, какой из предложенных возможных методов подходит в данном конкретном случае. Такой подход необходим для того, чтобы при построении развертки был определен оптимальный вариант графического построения, а также как можно более точно была бы возможность использования соответствующего метода при выполнении определенных графических построений и, в итоге, получение более точной развертки.

Метод треугольников

Задача 1. Построить полную развёртку пирамиды SABC.

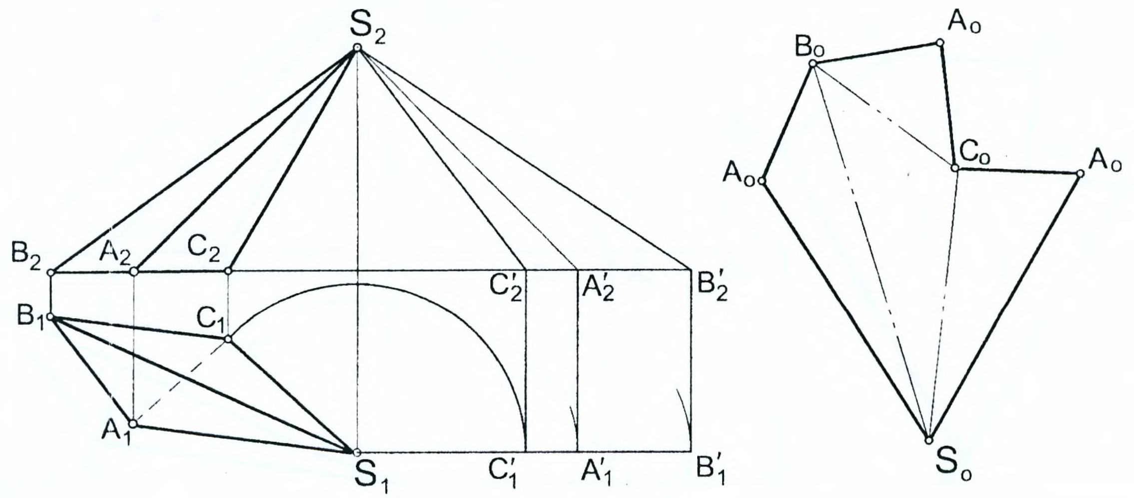


Рис. 12.1

Алгоритм решения

1. Основание ABC расположено в горизонтальной плоскости уровня. Поэтому его стороны на горизонтальную плоскость проекций П1 проецируются в натуральную величину.

2. Для определения натуральных величин боковых рёбер используем метод вращения отрезка вокруг проецирующей оси, проходящей через вершину (точку S). Натуральной величиной боковых рёбер являются отрезки: S_2C_2; S_2A_2; S_2B_2

3. На развёртке последовательно выполняются построения каждой грани треугольника пирамиды по трём сторонам. Выполненные построения понятны из приведенного примера (рис. 12.1), на котором равновеликие отрезки отмечены одинаковыми «значками».

4. Так как по условию задачи требуется построение полной развёртки пирамиды, к развёртке боковой поверхности пирамиды пристраивается треугольник основания.

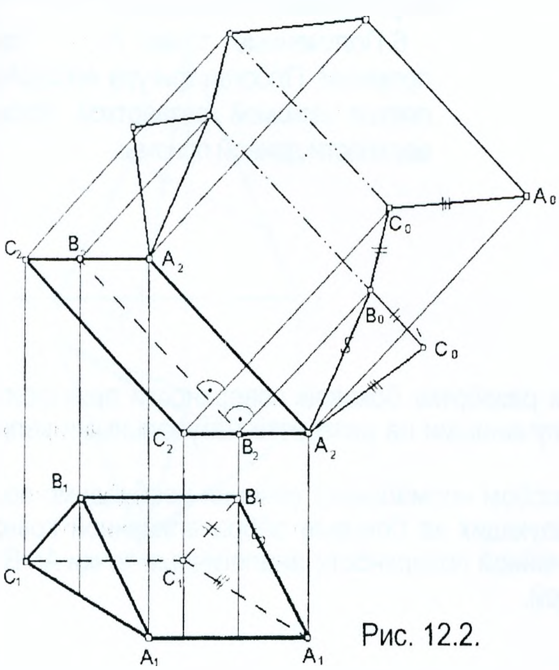


Рис. 12.2.

Метод раскатки

Задача 2. Построить полную развёртку трехгранной призмы.

Алгоритм решения

1. Развёртка боковой поверхности призмы в данном случае выполняется способом раскатки, потому что боковые ребра призмы являются фронтальными, т.е. на плоскость проекций П2 они проецируются в натуральную величину; плоскости оснований являются горизонтальными плоскостями уровня и на плоскость проекций П1 треугольники оснований проецируются также в натуральную величину.

2. Мысленно разрезаем боковую поверхность призмы по ребру AA и вращением вокруг него последовательно совмещаем все боковые грани призмы с фронтальной плоскостью, проходящей через это ребро (рис. 12.2).

3. При совмещении грани AA BB с этой плоскостью ребро AA не меняет своего положения, а точка B вращается во фронтально проецирующей плоскости, перпендикулярной ребру. Для построения повёрнутого положения точки B нужно помнить, что после совмещения точки B с фронтальной плоскостью уров-

ня, проходящей через ребро АА, она будет удалена от точки А на величину отрезка АВ. Отметим, что натуральная величина отрезка АВ на чертеже задана на горизонтальной проекции. Поэтому для построения точки B_0 на развёртке через её фронтальную проекцию мысленно проводим вырожденную проекцию плоскости, перпендикулярной A_2A_2, на которой от точки A_2 делаем засечку дугой радиуса $A_2B_0=A_1B_1$.

4. Далее аналогичными построениями (вращением вокруг ребра ВВ) совмещаем с фронтальной плоскостью грань ВС и т.д.

5. Затем к развёртке боковой поверхности пристраиваем нижнее и верхнее основание призмы.

Метод нормального (перпендикулярного) сечения

Задача 3. Построить развёртку поверхности треугольной призмы.

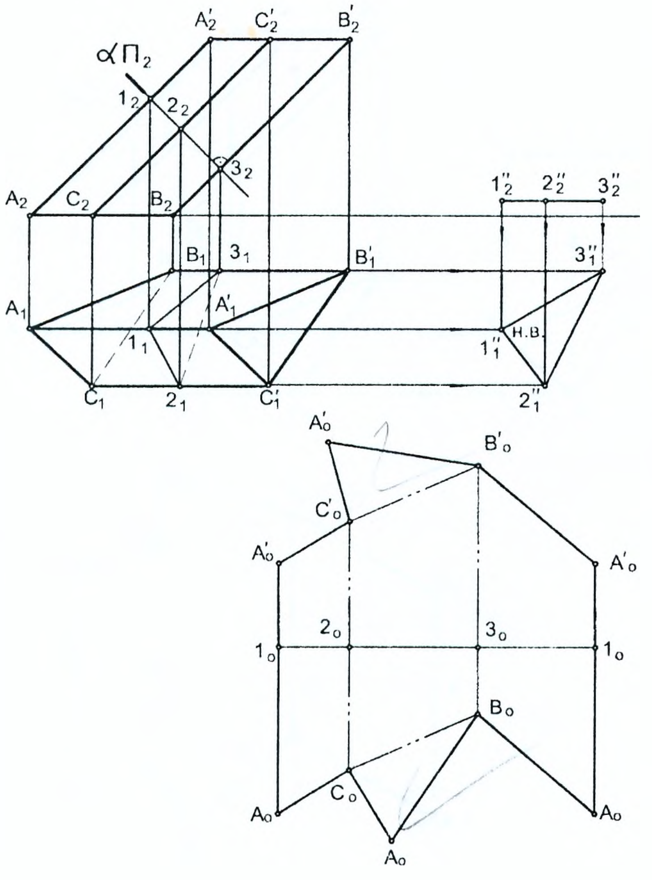


Рис. 12.3

Алгоритм решения

1. В данном примере боковые рёб-ра призмы проецируются на плоскость $П_2$ в натуральную величину.

2. Проведём плоскость $\alpha(\alpha П_2)$, перпендикулярную к боковым рёбрам призмы ($\alpha П_2$ перпендикулярно A_2A_2 и т.д.) построим перпендикулярное (нормальное) сечение и определим его натуральную величину.

3. Все стороны нормального сечения последовательно отложим на прямой 1_02_0; 2_03_0; 3_01_0.

4. Полученный отрезок 1_01_0 равен периметру нормального сечения.

5. Через точки 1_02_0, проведём прямые, перпендикулярные к 1_01_0, и отложим на них натуральные величины боковых рёбер, т.е. $A_0A_0= A_2A_2$, и т.д.

6. Полученные точки A'_0,... соединим прямыми. Плоская фигура $A_0C_0B_0A_0A_0$... является искомой развёрткой боковой поверхности данной призмы.

Для построения полной развёртки необходимо к развёртке боковой поверхности пристроить натуральные величины оснований, воспользовавшись полученными на развёртке натуральными величинами их сторон.

Для развёртки цилиндрической поверхности способом нормального сечения необходимо проделать те же построения, приняв ряд прямолинейных образующих за боковые рёбра вписанной поверхности призмы. Полученные при этом на развёртке криволинейной поверхности аналогичные точки A_0, B_0... , необходимо соединять плавной лекальной кривой линией.

Частный случай построения развёртки

1. Если призматическая, либо цилиндрическая поверхность проецирующая, то периметром нормального сечения будет периметр выродившейся проекции этой поверхности.

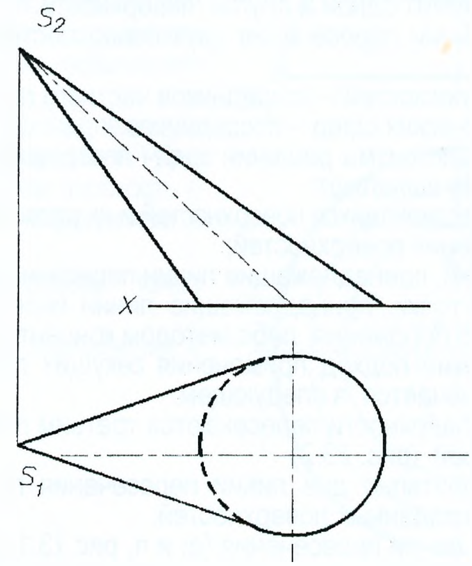
2. Развёртка поверхности прямого кругового конуса является центром круга радиуса, равного длине образующей.

Выводы:

1. Прямая на заданной поверхности (оригинале) переходит в прямую на развёртке;
2. Параллельные прямые на заданной поверхности будут параллельными прямыми на развёртке;
3. Длины отрезков линии на заданной поверхности и те же линии на развёртке равны;
4. Углы между линиями на заданной поверхности с вершиной в обыкновенной точке этой поверхности и между соответствующими линиями на развёртке равны;
5. Площадь развёртки равна площади заданной поверхности, т.к. все размеры на развёртке имеют натуральную величину.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Построить развертку наклонного конуса



Задача 2. Построить развертку усеченной пирамиды.

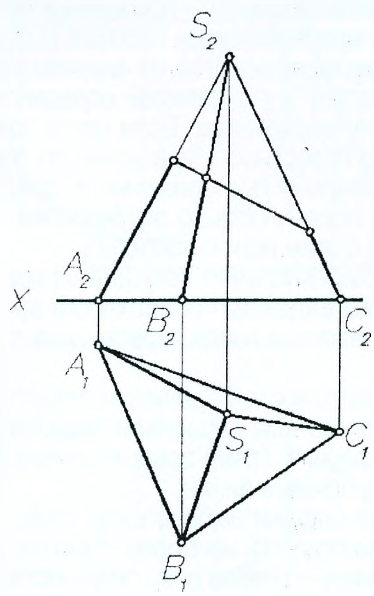


Рис. 12.5

ЛЕКЦИЯ 13

Тема. Пересечение поверхностей

Вопросы:

1. Общие сведения о пересечении поверхностей;
2. Методы построения линии пересечения двух поверхностей:

– метод секущих плоскостей – посредников частного положения;

– метод концентрических сфер – посредников.

Выводы.

1. Общие сведения о пересечении поверхностей

В результате пересечения поверхностей образуется пространственная, реже, плоская замкнутая линия, вид и форма которой зависит от вида пересекающихся поверхностей. При этом линия пересечения одновременно принадлежит одной и другой поверхности.

Для построения линии пересечения двух поверхностей в данном случае рассматриваются два основных метода:

– метод секущих плоскостей – посредников частного положения;

– метод концентрических сфер – посредников.

При составлении алгоритма решения задач построения проекций линии пересечения поверхностей на комплексном чертеже выявляют:

– вид заданных пересекающихся поверхностей и их расположение относительно плоскостей проекций;

– область пересечения поверхностей;

– характерные точки, принадлежащие линии пересечения;

– промежуточные точки, принадлежащие линии пересечения (методом секущих плоскостей – посредников частного положения, либо методом концентрических сфер-посредников).

Общий методический подход применения секущих плоскостей-посредников либо концентрических сфер-посредников заключается в следующем:

– заданные две поверхности пересекаются третьим посредником – плоскостью частного положения Q (рис. 13.1) либо сферой (рис. 13.2);

– определяются поэтапно две линии пересечения m и n плоскости – посредника либо сферы-посредника с каждой из заданных поверхностей;

– две полученные линии пересечения (m и n, рис.13.1), принадлежащие третьему посреднику (плоскости), пересекаясь, определяют точки, принадлежащие искомой линии пересечения двух поверхностей.

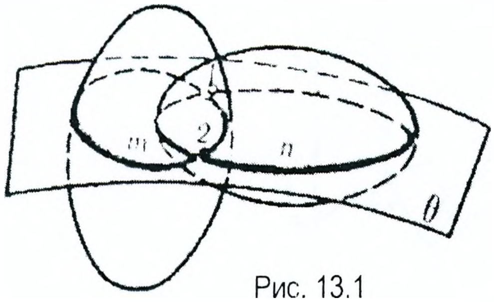


Рис. 13.1

Примечание: концентрические сферы – посредники применяются в том случае, когда пересекающиеся соосные (с общей осью) поверхности вращения пересекаются по окружностям – параллелям. Число окружностей – параллелей определяется числом точек пересечения их меридианов. Если центр сферы поместить на ось какой-либо поверхности вращения, то сфера станет соосной с данной поверхностью вращения и, следовательно, также пересечет эту поверхность по окружностям – параллелям (рис. 13.2). В связи с этим можно заключить:

1. Для того, чтобы вспомогательная секущая сфера пересекала по параллелям две заданные поверхности вращения, центр сферы должен лежать в точке пересечения осей этих поверхностей;

2. Если оси заданных поверхностей вращения параллельны плоскости проекций, то на чертеже параллели пересечения вспомогательной секущей сферы с этими поверхностями проецируются на эту плоскость в прямые линии;

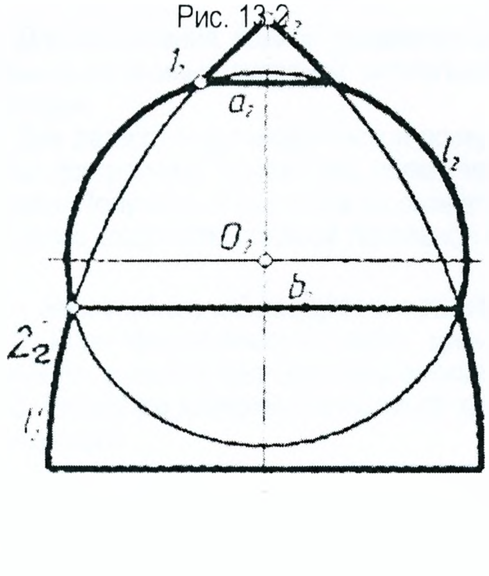
3. Плоскости – посредники следует выбирать так, чтобы они пересекали заданные поверхности по наиболее простым для графического построения линиям – прямым либо окружностям;

4. Концентрические сферы – посредники применяются только в том случае, когда две пересекающиеся поверхности являются:

- поверхностями вращения;
- оси вращения этих поверхностей пересекаются и должны быть расположены параллельно одной и той же плоскости проекций или одна из осей должна быть проецирующей прямой, а вторая – линией уровня.

Рассмотрим последовательно каждый из приведенных методов на конкретном примере.

Рис. 13.2



2. Методы построения линии пересечения двух поверхностей

А. Метод секущих плоскостей – посредников

На конкретном примере рассмотрим общий подход составления алгоритма.

Задача 1. Построить линию пересечения поверхностей конуса и сферы (рис. 13.3).

Алгоритм решения

(обе поверхности общего положения)

1. Секущие плоскости – посредники выбираются так, чтобы при пересечении их с каждой из поверхностей образовались удобные для построения линии (прямые или окружности). В данном примере в качестве посредников выбираем горизонтальные плоскости, которые пересекают конус и сферу по окружностям.
2. Определяем характерные точки 1 и 2, принадлежащие очерковым образующим одной и другой поверхности. Для определения характерных точек 3 и 4 используем плоскость – посредник $\alpha^1{}_2$. Промежуточные точки 5, 6, ... определяем с помощью плоскостей $\alpha^2{}_2$ и т.д.
3. Плавной кривой соединяем полученные точки проекций линии пересечения.
4. Определяем видимость проекций линии пересечения и заданных поверхностей.

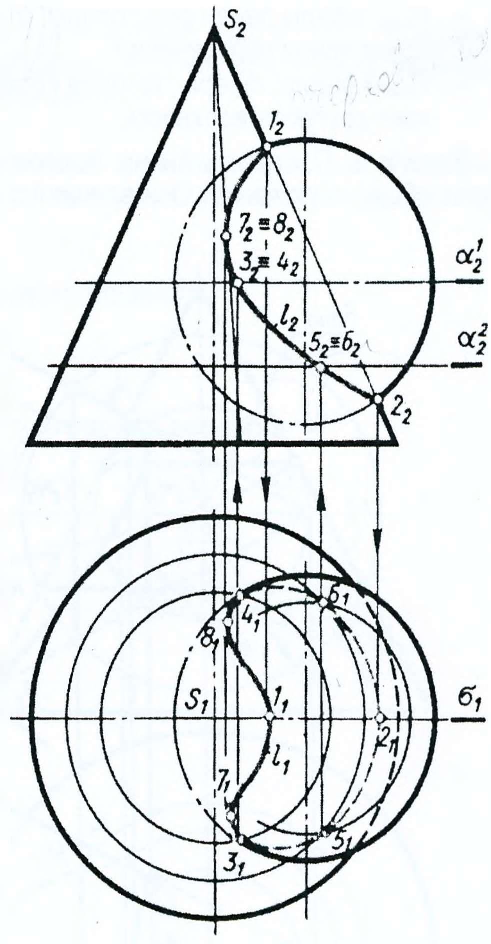


Рис. 13.3

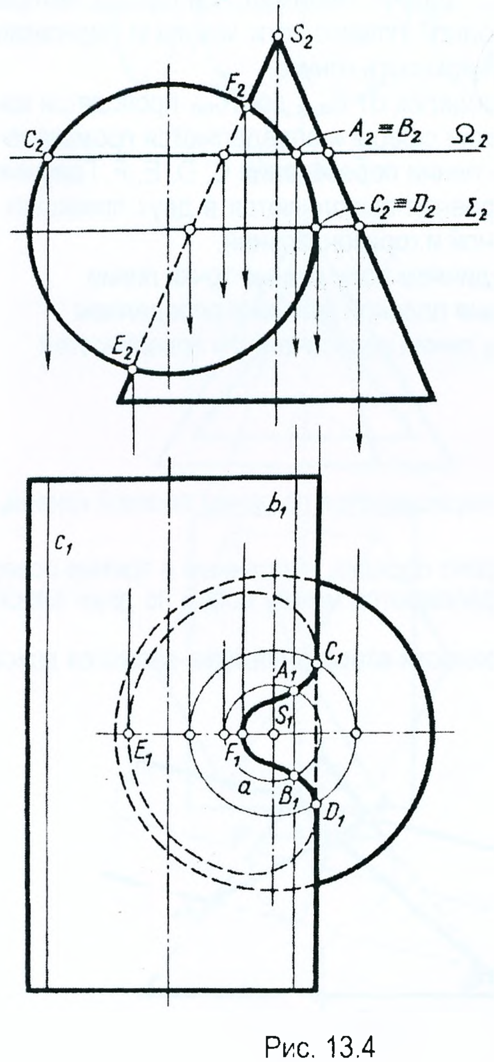


Рис. 13.4

Задача 2. Построить линию пересечения двух поверхностей конуса и цилиндра (рис.13.4).

Алгоритм решения

(одна поверхность занимает общее положение, вторая – частное)

1. Поверхность цилиндра расположена $\perp \Pi_2$, а поверхность конуса занимает общее положение. Следовательно, с фронтальной проекцией поверхности цилиндра совпадает фронтальная проекция искомой линии пересечения $E_2F_2A_2B_2C_2D_2$.
2. Горизонтальные проекции характерных и промежуточных точек, отмеченных на этой линии, находим по принадлежности их поверхности конуса. Эти построения выполняем с помощью секущих плоскостей-посредников горизонтального уровня (параллельных Π_1) т.е. Σ_2 и т.д. Соединяем плавной кривой на горизонтальной плоскости проекций горизонтальную проекцию линии пересечения $E_1F_1A_1B_1C_1D_1$.
3. Определяем видимость линии пересечения и заданных пересекающихся поверхностей.

Б. Метод концентрических сфер – посредников.

Общий подход составления алгоритма:

1. Определяем характерные точки, принадлежащие линии пересечения;
2. Для определения промежуточных точек определяем область проведения концентрических сфер, которые находятся между сферами ($R_{max} \div R_{min}$), при этом:

– R_{max} сферы равен расстоянию от центра проведения сферы до самой удаленной характерной точки линии пересечения;
– R_{min} – радиус сферы, которая касается одной пересекаемой поверхности и одновременно пересекает другую поверхность.

Задача 3. Построить линию пересечения поверхностей вращения. Обе заданные поверхности занимают общее положение. Оси вращения заданных поверхностей пересекаются и образуют плоскость, параллельную $П_2$ и перпендикулярную $П_1$ (рис. 13.5).

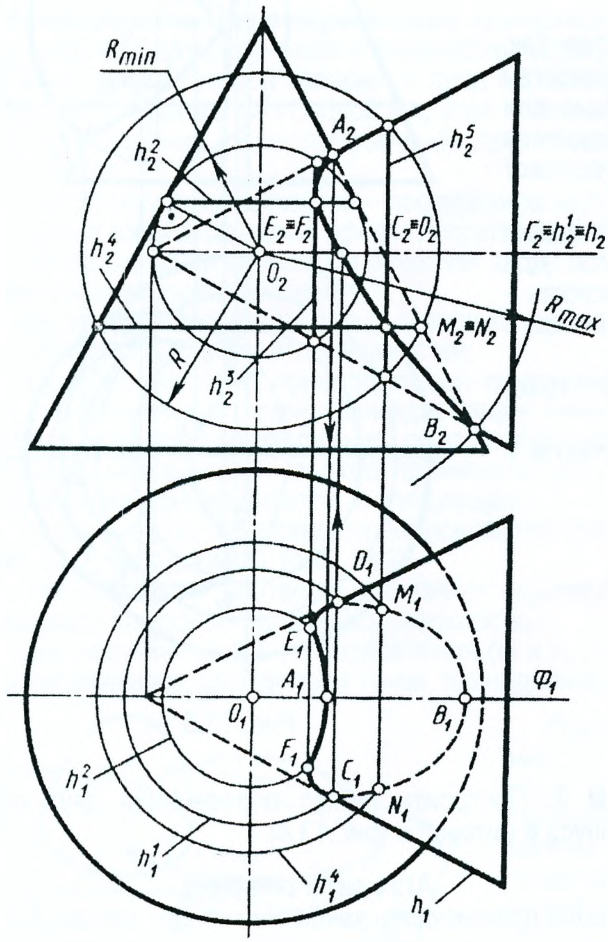


Рис. 13.5

Алгоритм решения

1. Характерными точками на чертеже являются A_2, B_2 - точки пересечения очерковых образующих заданных поверхностей во фронтальной плоскости проекций. Горизонтальные их проекции определяем на основании принадлежности данных точек одной из поверхности, методом простейших графических построений. Для определения промежуточных точек C, D, E, F принадлежащих линии пересечения необходимо провести следующие графичес-кие построения: выявить область проведения концентрических сфер-посредников; установить радиус максимальной и радиус минимальной сферы.

2. Расстояние на фронтальной проекции чертежа от O_2 до наиболее удаленной точки E_2 является радиусом максимальной сферы (R_{max}).

3. R_{min} – радиус минимальной сферы, которая касается одной поверхности конуса и пересекает вторую поверхность конуса.

4. В пределах от R_{max} до R_{min} проводятся концентрические сферы и определяются промежуточные точки линии пересечения C, D, E, F. Графические построения выполняются в двух проекциях - фронтальной и горизонтальной.

5. Соединяем полученные точки линии пересечения плавной кривой и определяем видимость линии пересечения и поверхностей.

Частный случай пересечения поверхностей вращения

Теорема 1. Если две поверхности вращения второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются еще по другой плоской кривой.

Теорема 2 (Теорема Монжа). Две поверхности вращения второго порядка, вписанные в третью поверхность вращения второго порядка или описанные вокруг нее, пересекаются между собой по двум плоским кривым второго порядка.

Иллюстрация теоремы Монжа приведена на рис. 13.6. Поверхности второго порядка касаются вписанной поверхности сферы.

а) б)

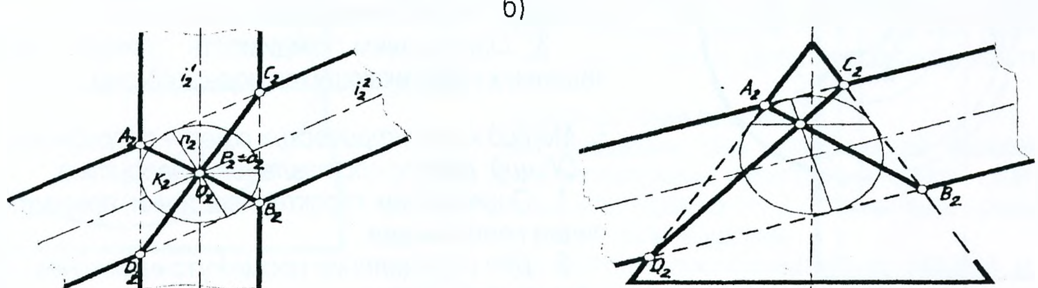


Рис. 13.6

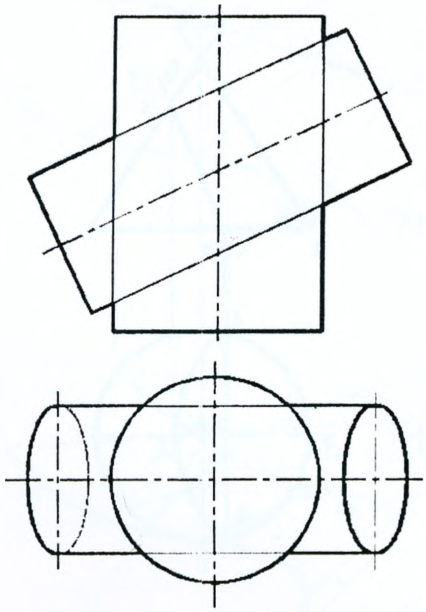
Фронтальными проекциями линий пересечения поверхностей будут прямые A_2B_2 и C_2D_2, проходящие через точки пересечения очерковых образующих поверхностей вращения и точки пересечения окружности n и k. Этим положением руководствуются при решении такой группы задач.

Выводы:

учитывая многообразие, существующее в начертательной геометрии, двух пересекающихся поверхностей, необходимо, в первую очередь, четко проводить анализ поставленного условия для выбора правильного возможного варианта решения.

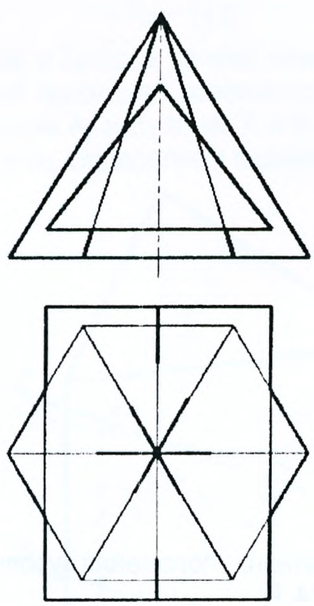
Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. **Построить линию пересечения поверхностей.**



Записать алгоритм решения

Рис. 13. 7



Записать алгоритм решения

Рис. 13. 8

ЛЕКЦИЯ 14

Тема. Конические сечения. Пересечение прямой с поверхностью

Вопросы:

1. Конические сечения;
2. Общие положения пересечения прямой с поверхностью;
3. Алгоритмы определения точек пересечения прямой с поверхностью.

1. Конические сечения

Коническими сечениями называются линии, которые получаются при пересечении плоскостью конической поверхности второго порядка.

Форма и характер кривой зависит от положения секущей плоскости. В данном случае рассматривается плоскость только лишь частного положения.

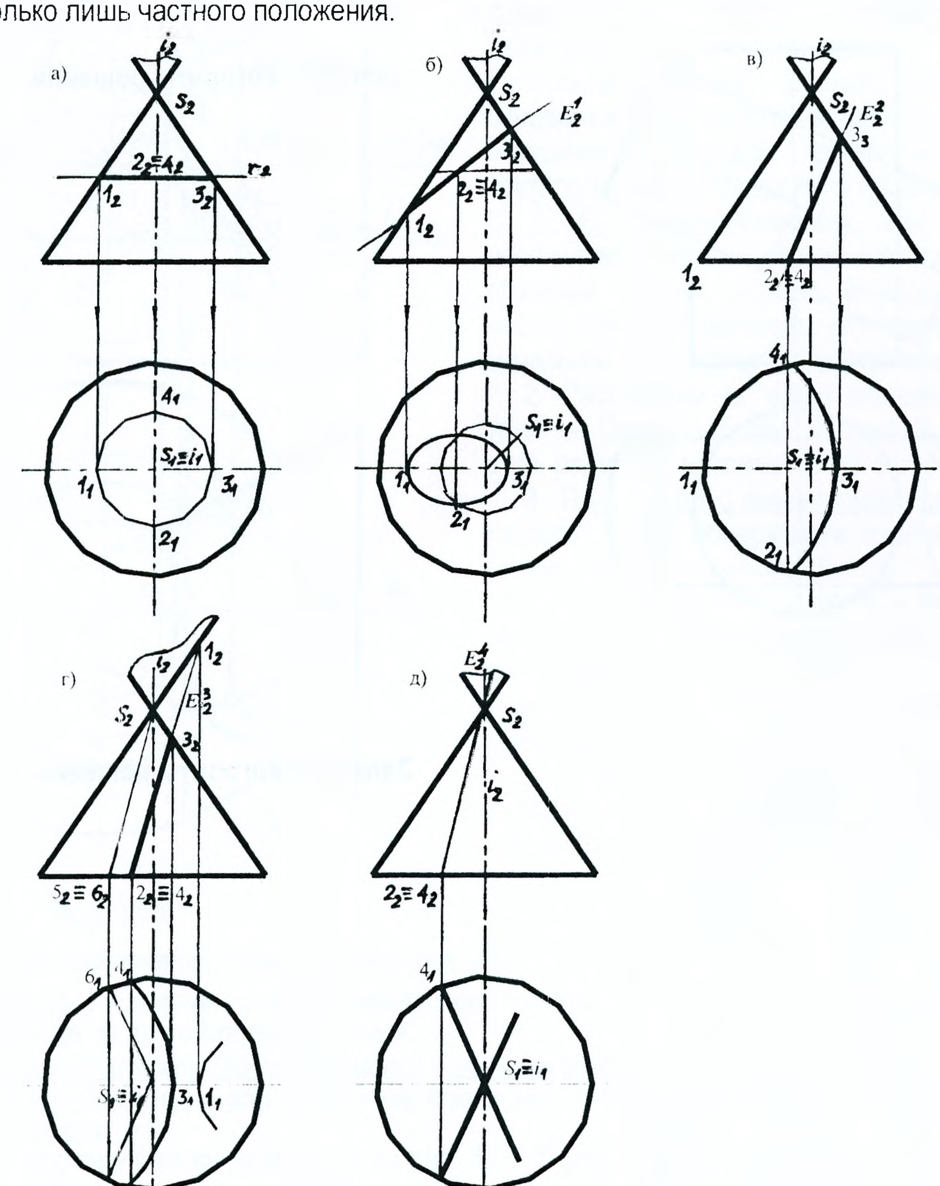


Рис. 14.1

В сечении *конической поверхности вращения* плоскостью частного положения (уровня, либо проецирующей) могут быть получены следующие линии сечения (рис.14.1):

- *окружность*, если секущая плоскость R перпендикулярна оси вращения (14.1а);
- *эллипс*, если секущая плоскость E пересекает все образующие поверхности (14.1б);
- *парабола*, если секущая плоскость E параллельна только одной образующей (S-1) поверхности (14.1в); *гипербола*, если секущая плоскость E параллельна образующим (S-5) и (S-6) поверхности (14.1г);
- *две образующие (прямые)*, если секущая плоскость E проходит через вершину S поверхности (14.1д).

Проекции кривых линий сечений строятся по отдельным точкам, принадлежащим одновременно поверхности конуса и секущей плоскости (например, точки 2, 4 на рис. 14.1.).

2. Общие положения пересечения прямой с поверхностью

Определение *точек* пересечения прямой линии с поверхностью на чертеже, основывается на построении проекций линии плоского сечения, при пересечении с которым, в итоге, одной из проекций прямой определяются искомые точки. Алгоритм решения такого типа задач аналогичен алгоритму задач на определение точки пересечения прямой линии с плоскостью. Последовательность выполнения графических операций следующая:

1. Через данную прямую проводится вспомогательная плоскость- посредник;
2. Определяют линию сечения плоскости- посредника с поверхностью;
3. Точки пересечения полученной линии сечения с заданной прямой и будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью (рис.14.2). Такие точки иногда называются *точками входа и выхода.*
4. Определяется видимость заданных геометрических образов.

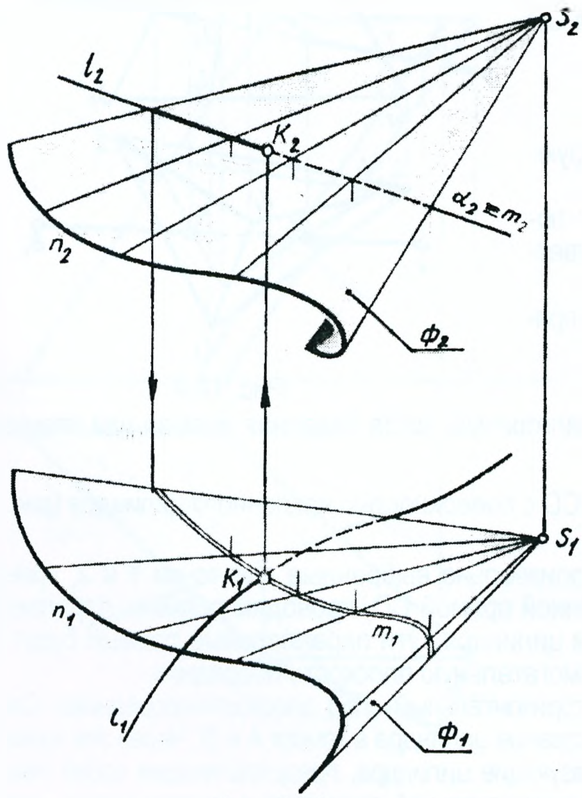


Рис. 14.2

Примечание: плоскости-посредники могут быть частного и общего положения. При этом решение задачи упрощается в случае, если заданные геометрические образы занимают проецирующее положение, которым присуще свойство собирательности. При реализации на чертеже графического алгоритма и, в итоге, отсутствия точек пересечения означает, что прямая не пересекает заданную поверхность.

3. Алгоритмы определения точек пересечения прямой с поверхностью

Один из заданных геометрических образов занимает проецирующее положение

На рис. 14.3 приведено построение проекций точек пересечения прямой F с поверхностью призмы. Прямая F фронтального уровня, поверхность призмы занимает проецирующее положение, т.е перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. В связи с этим горизонтальные проекции точек, в которых прямая пересекает заданную поверхность на чертеже имеются и совпадают с горизонтальной проекцией поверхности на основании свойства собирательности. Обозначаем горизонтальные проекции A_1 и B_1 точек A и B. С помощью линий проекционной связи находим их фронтальные проекции - A_2 и B_2. Определяем видимость заданных геометрических образов.

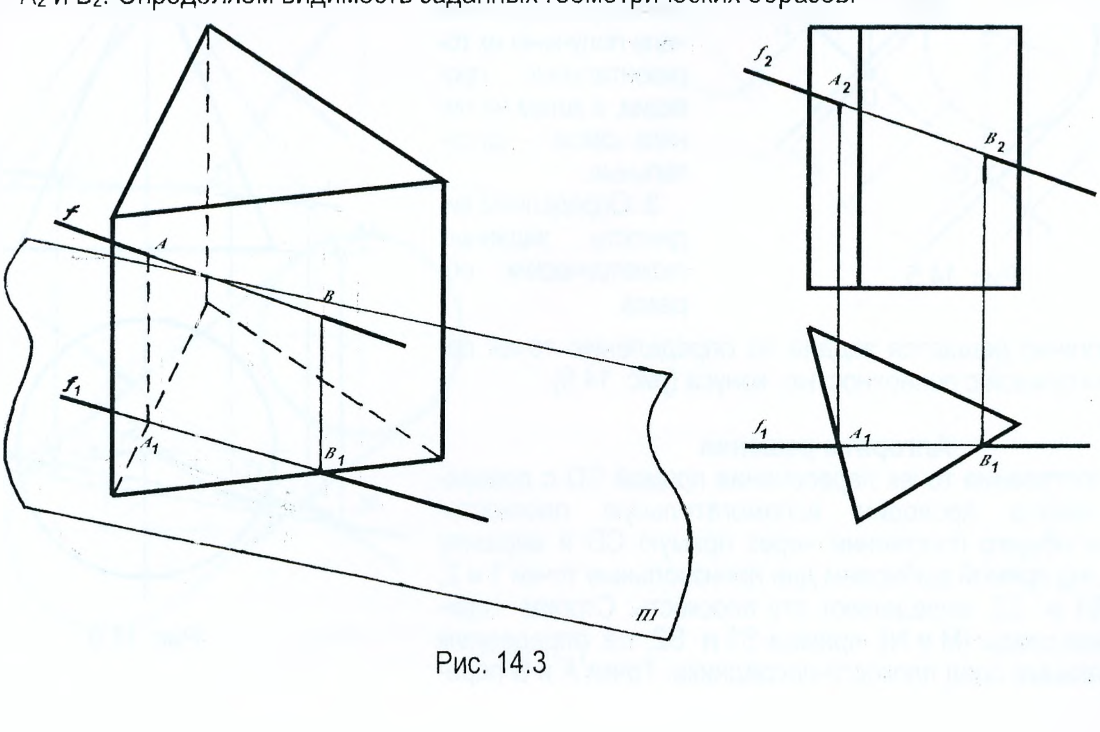


Рис. 14.3

Составляя графический алгоритм, используя плоскости-посредники, можно заключать прямую как в плоскость частного положения, так и в плоскость общего положения.

Рассмотрим примеры составления алгоритмов решения такой группы задач, когда заданная прямая заключается в плоскость частного положения.

Задача 2. Определить точки пересечения прямой CD с поверхностью пирамиды (рис.14.4).

Алгоритм решения

1. Заключаем прямую AB во фронтально-проецирующую плоскость α (α_2);
2. Находим линию пересечения плоскости α(α_2) с поверхностью пирамиды, это точки $1_1, 2_1, 3_1$; $1_2\ 2_2\ 3_2$ соответственно.
3. На пересечении линии сечения 1,2,3 и заданной прямой AB опреляем искомые точки входа и выхода - M и N.
4. Определяем видимость прямой AB.

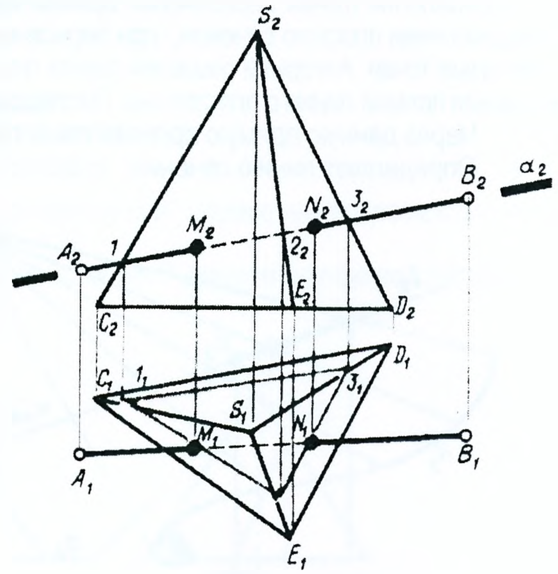


Рис. 14.4

Рассмотрим примеры составления графического алгоритма, когда заданная прямая при этом заключается в плоскость – посредник общего положения.

Задача 3. Определить точки пересечения прямой CD с поверхностью наклонного цилиндра (рис.14.5).

Алгоритм решения

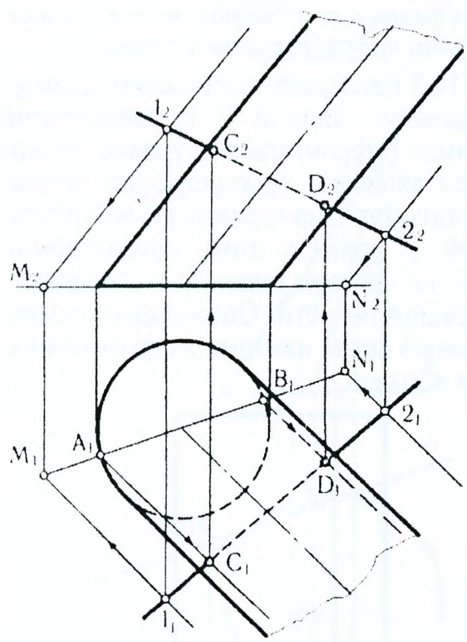


Рис. 14.5

1.Через произвольно выбранные две точки 1 и 2, принадлежащие заданной прямой CD, проводим прямые, параллельные образующим цилиндра. Эти параллельные прямые будут определять вспомогательную плоскость-посредник.

2.Строим горизонтальный след плоскости-посредника. След пересекает основание цилиндра в точках A и B. Через эти точки пройдут две образующие цилиндра, представляющие собой линии пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью цилиндра. Точки C и D, которые получаются в пересечении полученных образующих цилиндра с заданной прямой будут искомыми точками. На рис. 14.5 вначале получены их горизонтальные проекции, а затем на линиях связи – фронтальные.

3. Определяем видимость заданных геометрических образов.

Аналогично решается задача по определению точек пересечения прямой с поверхностью конуса (рис. 14.6).

Алгоритм решения

Для построения точек пересечения прямой CD с поверхностью конуса проводим вспомогательную плоскость-посредник общего положения через прямую CD и вершину конуса S. На прямой выбираем две произвольные точки 1 и 2, прямые S1 и S2 определяют эту плоскость. Строим горизонтальные следы (M и N) прямых S1 и S2, т.е. определяем горизонтальный след плокости-посредника. Точки A и B пере-

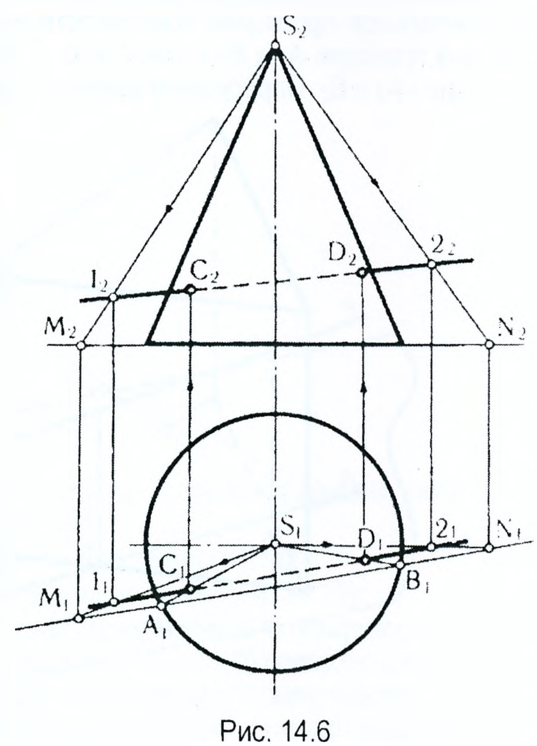


Рис. 14.6

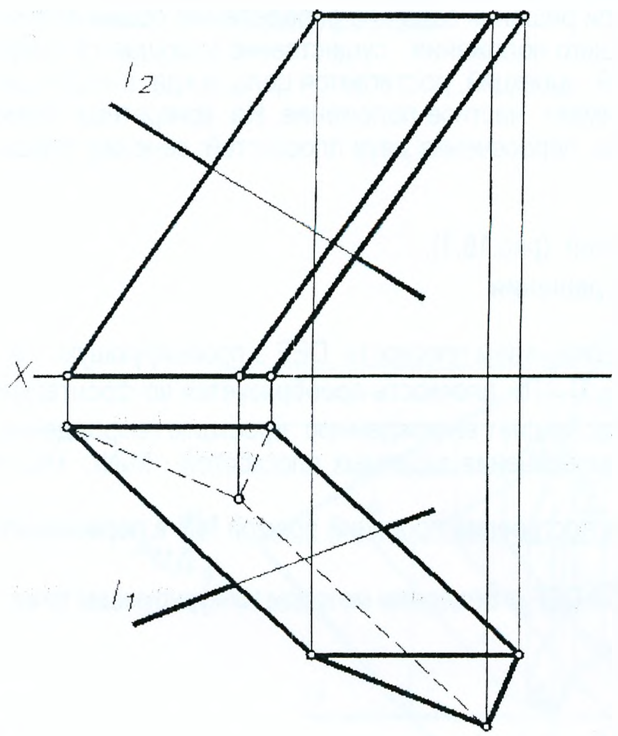
сечения следа плоскости с основанием конуса определяют образующие, по которым плоскость пересекает конус. В пересечении их с заданной прямой находим искомые точки C и D.

Указанный прием используется также для построения точек пересечения прямой общего положения и с другими поверхностями.

Задачи для самостоятельного решения

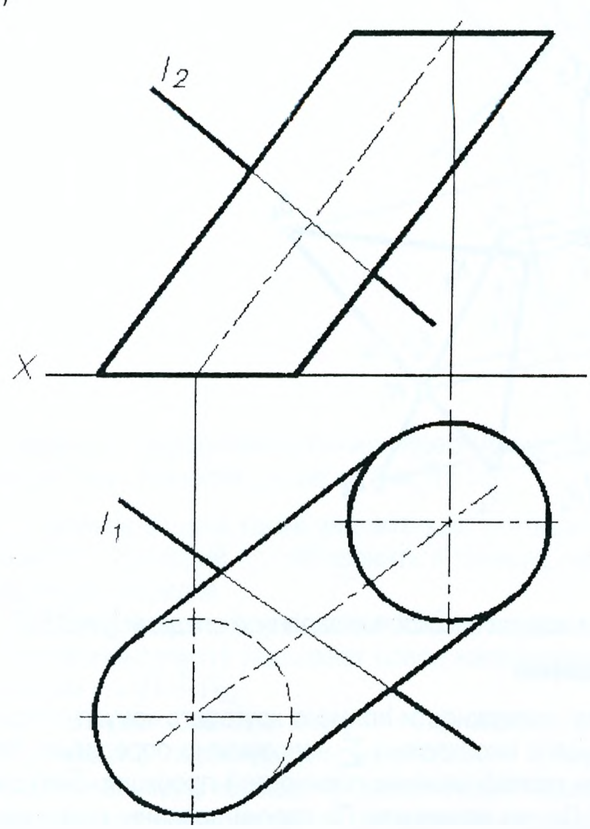
Задача. Определить точку пересечения прямой с поверхностью.

а)



Записать алгоритм решения

б)



Записать алгоритм решения

Рис. 14.7

ЛЕКЦИЯ 15

Тема. Позиционные задачи с преобразованием чертежа

Вопросы:

1. Решение позиционных задач с преобразованием чертежа.

Выводы.

1. Решение позиционных задач с преобразованием чертежа

Применяя методы замены плоскостей проекций при решении задач по определению общих элементов пересечения заданных геометрических образов общего положения, существенно упрощается графический алгоритм. Преобразовывая систему плоскостей проекций, достигается цель, когда в итоге один из заданных геометрических образов на чертеже занимает частное положение. На конкретных примерах рассмотрим решение задач по определению: линии пересечения двух плоскостей; сечения плоскости с поверхностью.

Задача 1. Определить линию пересечения плоскостей (рис.15.1).

Алгоритм решения

1. В плоскости DEF проводим горизонталь H.
2. Способом замены плоскостей проекций преобразовываем плоскость DEF в проецирующую, т.е. в новой образованной системе плоскостей проекций $x_{1,4}$ $П_1 \perp П_4$ плоскость преобразуется во фронтально-проецирующую, т.е. DEF $\perp$ $П_4$. Проекция $D_4E_4F_4$ представляет вырожденную проекцию (вырожденный след) плоскости, которой будет принадлежать линия пересечения заданных плоскостей M_4N_4, (N_4) на чертеже не приводится.
3. Обратными проекционными лучами выполняем построение проекций прямой MN в первоначальной системе плоскостей проекций $x_1(П_1 \perp П_2)$.
4. Видимость сторон плоскостей треугольников ABC и DEF определяем методом конкурирующих точек.

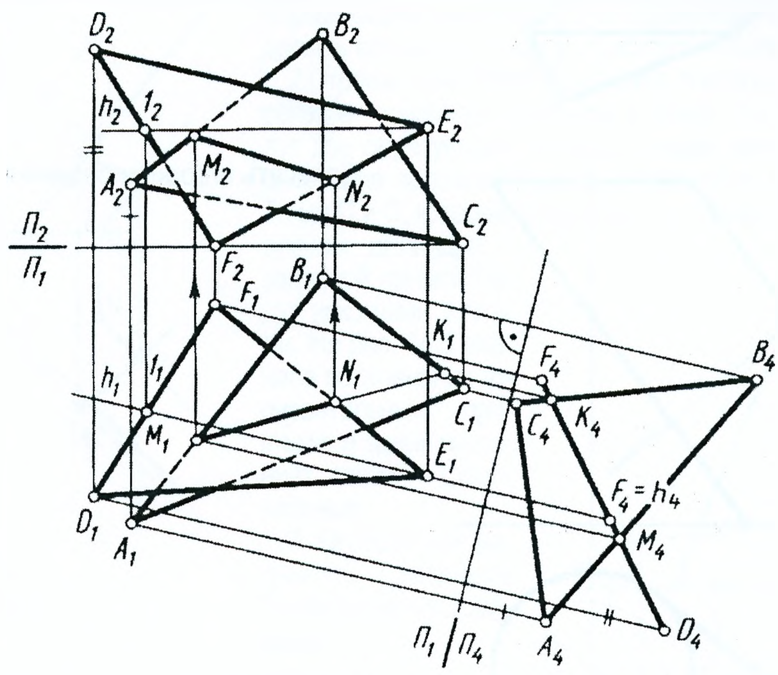


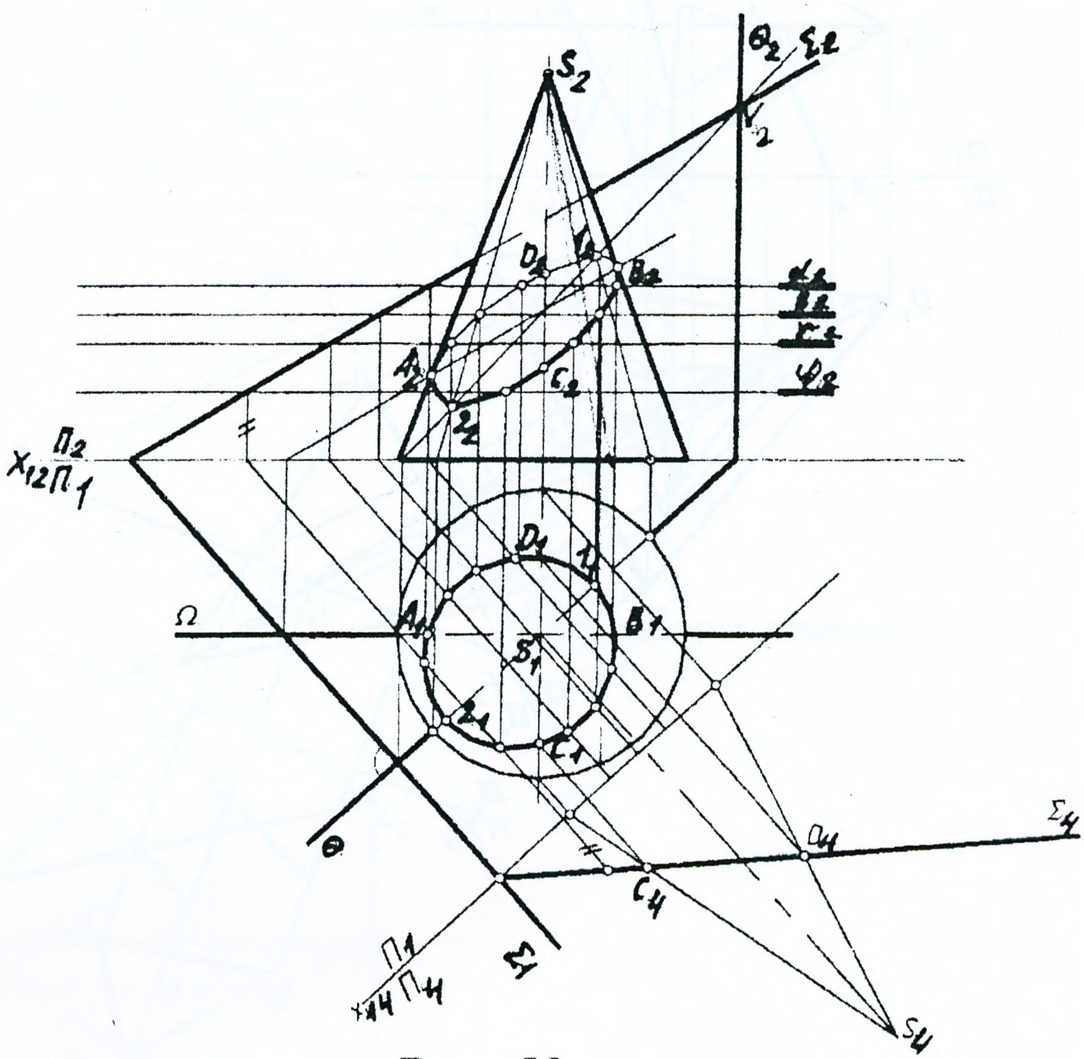
Рис. 15.1

Задача 2. Определить линию пересечения поверхности конуса плоскостью заданной следами (рис.15.2).

Алгоритм решения

В задаче необходимо построить линию пересечения поверхности прямого кругового конуса плоскостью $\sum$. Точки пересечения очерковых образующих конуса с плоскостью $\sum$ невозможно определить без дополнительных построений. В данном случае применен способ замены плоскостей проекций. Секущая плоскость $\sum$ преобразована в проецирующую, т.е. $\sum \perp П_4$. на плоскости $П_4$ спроецированы очерковые крайние образующие конуса. В итоге, полученные проекции образующих пересекаются со следом $\sum_4$ в искомых точках $C(C_4)$ и $D(D_4)$. Обратными проекционными лучами выполняем построение проекций этих точек в первоначальной системе- $x_{1,2}$ ($П_1 \perp П_2$).Все недостающие точки, принадлежащие линии сечения, определяем следующим образом:

1. Для определения наивысшей точки 2 и наинизшей точки 1 линии сечения проводим через вершину конуса горизонтально-проецирующую плоскость.
2. Для определения видимости линии сечения проводим через вершину конуса плоскость фронтального уровня Ω.
3. Для определения точек линии сечения, принадлежащих профильным образующим, используется способ замены плоскостей проекций.



Задача 3. Определение линии пересечения поверхности пирамиды плоскостью общего положения, заданной треугольником (отсеком) (рис.15.3).

Решение задачи также значительно упрощается, если плоскость треугольника ABC методом замены плоскостей проекций преобразовать в проецирующую. Алгоритм в этом случае должен быть выполнен в следующем порядке:

1. В плоскости треугольника ABC проводим горизонталь h (h_1,h_2). Направление горизонтальной проекции горизонтали h1 указывает новое направление ортогонального проецирования в системе плоскостей проекций $x_{1,4}$ ($П_1 \perp П_2$).
2. В новой системе $x_{1,4}$ ($П_1 \perp П_4$) плоскость треугольника ABC займет фронтально-проецирующее положение, т.е. перпендикулярно плоскости проекций $П_4$. Вырожденной основной проекции $1_4 2_4 3_4$ будет принадлежать одна искомая проекция линии пересечения.
3. Известными методами определяем проекции линии сечения на исходном чертеже и определяем видимость.

4. Используя метод замены плоскостей проекций, плоскость α преобразовалась в плоскость фронтально-проецирующую в системе x_1 ($П_1 \perp П_4$), которая обладает свойством собирательности. Поэтому, для определения натуральной величины сечения здесь также применяется метод замены плоскостей проекций (на рис.15.3 $x_2 \parallel \alpha$).

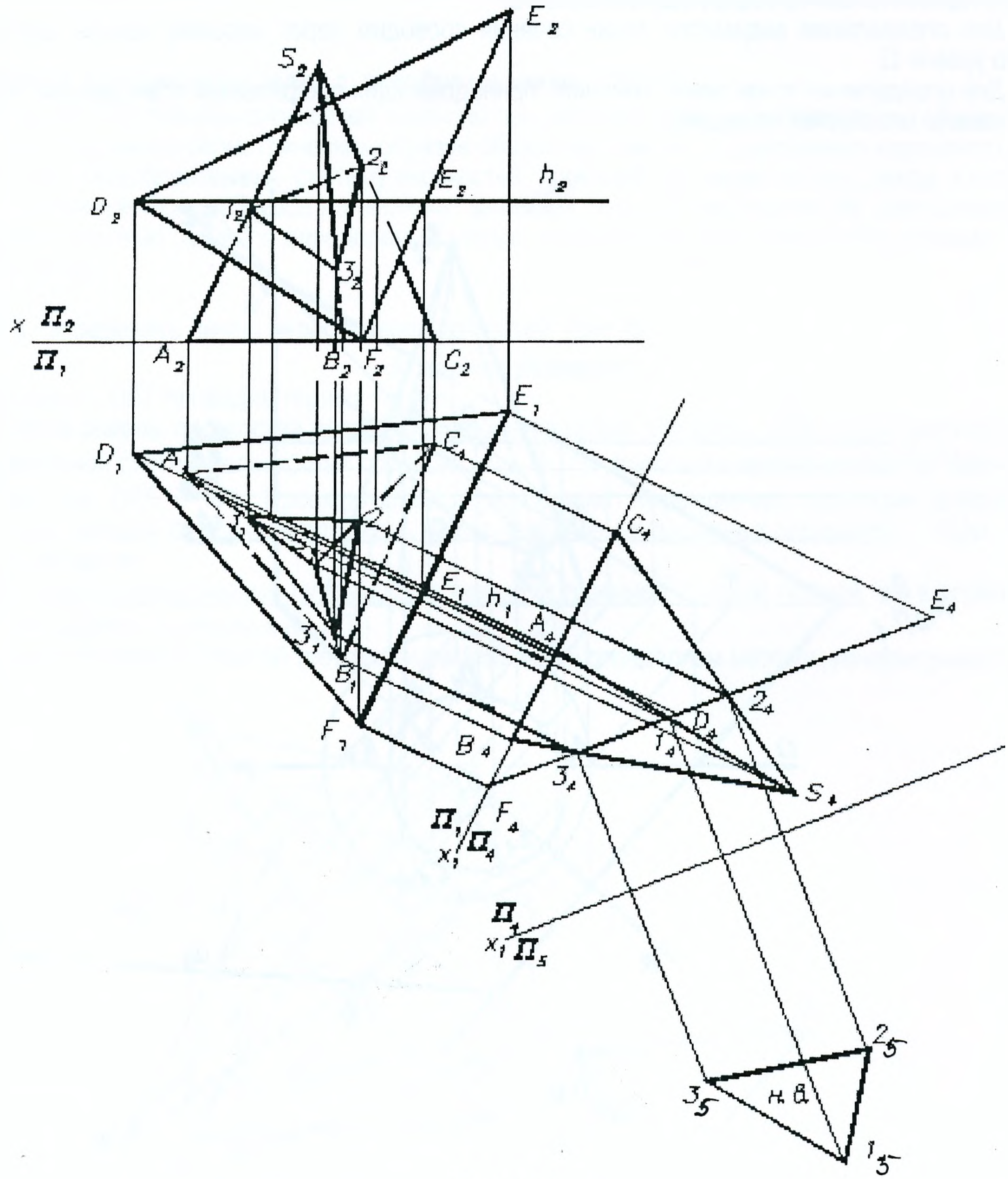


Рис. 15.3

Выводы:

при использовании методов преобразования комплексного чертежа в решении основных позиционных и метрических задач значительно упрощается графический алгоритм.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Построить линию пересечения плоскости общего положения с пирамидой методом замены плоскостей проекций (рис. 15.4).

Задача 2. Определить линию пересечения плоскостей методом преобразования чертежа (рис 15.5).

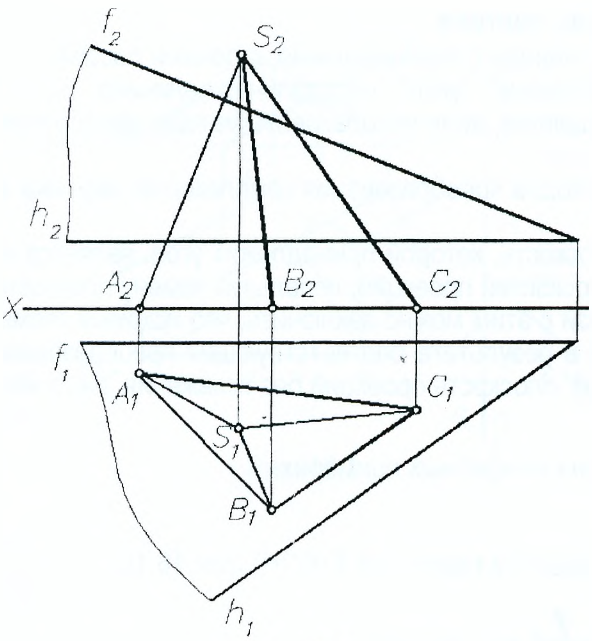


Рис. 15.4

Записать алгоритм решения

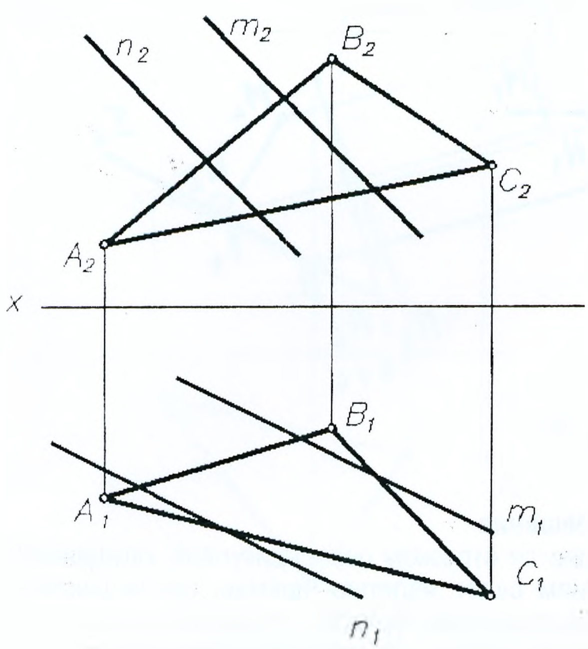


Рис. 15.5

Записать алгоритм решения

ЛЕКЦИЯ 16

Тема. Метрические задачи с преобразованием чертежа

Вопросы:

1. Решение метрических задач с преобразованием чертежа.

Выводы.

1. Решение метрических задач с преобразованием чертежа

Как отмечалось выше, в начертательной геометрии наряду с позиционными задачами рассматриваются и метрические задачи, связанные с понятиями “расстояние”, “угол”, “натуральная величина ” и т.д.

Алгоритмы решения таких задач значительно упрощаются, если использовать методы преобразования комплексного чертежа.

Суть решения метрических задач с применением методов преобразования комплексного чертежа заключается в следующем:

– если отрезок, определяющий расстояние, или плоскость, которой принадлежит угол, является натуральной величиной, то соответственно на одной из плоскостей проекций, используя замену плоскостей проекций, можно будет получить решение задачи. В связи с этим можно заключить, что искомый геометрический образ, с искомой численной характеристикой, в результате соответствующих преобразований комплексного чертежа проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения, т.е. в натуральную величину.

Рассмотрим решение некоторых характерных задач на конкретных примерах.

Задача 1. Определить расстояние от точки (.) М до заданной плоскости $\sum(F\cap H)$ (рис.16.1).

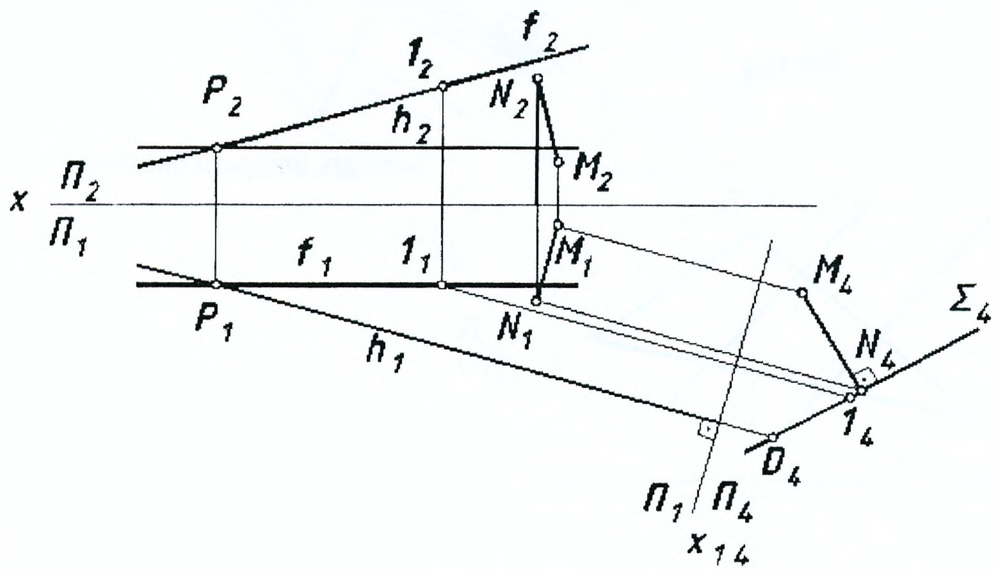


Рис. 16.1

Алгоритм решения

Расстояние от точки (.) М до плоскости $\sum$ определяется отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на данную плоскость. Следовательно, расстоянием будет являться прямая, перпендикулярная плоскости $\sum$. Точка (.) М и плоскость $\sum$ являются при этом единой жесткой системой. Преобразовывая комплексный чертеж методом замены плоскостей проекций, необходимо на чертеже провести новую ось $X_{1,4} \perp h_1$. Выполнив соответствующие преобразования, в новой образованной системе плоскостей проекций получаем след плоскости $\sum_4$, который обладает свойством собирательности. В связи с этим имеется возможность из точки M_4 провести $\perp$ на $\sum_4$ и определить (.) N_4 – точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью $\sum_4$. Полученный отрезок M_4N_4 будет натуральной величиной расстояния от точки М до плоскости $\sum$. Определяем проекции расстояния в первоначальной заданной системе.

Задача 2. Определить расстояние между параллельными прямыми (рис. 16.2).

Алгоритм решения

Известно, что расстояние между двумя параллельными прямыми измеряется отрезком перпендикуляра между ними. Используя метод замены плоскостей проекций, построение графического алгоритма решения задачи выполняется следующим образом:

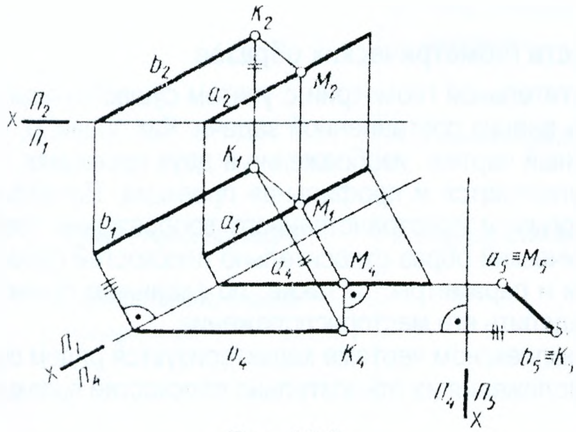


Рис. 16.2

1.Осуществляем проецирование прямых в новой образованной системе плоскостей проекций (х $\Pi_4 \perp \Pi_1$), где прямые занимают положение фронтального уровня.

2. Образовываем систему плоскостей проекций (х $\Pi_4 \perp \Pi_5$), в которой прямые занимают горизонтально-проецирующее положение. Отрезок K_5 M_5, между вырожденными проекциями определяет натуральную величину искомого расстояния.

2. Определяем проекции расстояния между заданными проекциями прямых в исходной системе плоскостей проекций (х $\Pi_1 \perp \Pi_2$).

Выводы: при использовании методов преобразования комплексного чертежа, в частности, метод замены плоскостей проекций, решение метрических задач значительно упрощается.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить натуральную величину расстояния от точки (.) К до плоскости Δ АВС методом замены плоскостей проекций (рис.16.3).

Задача 2. Определить натуральную величину Δ АВС методом замены плоскостей проекций (рис. 16.4).

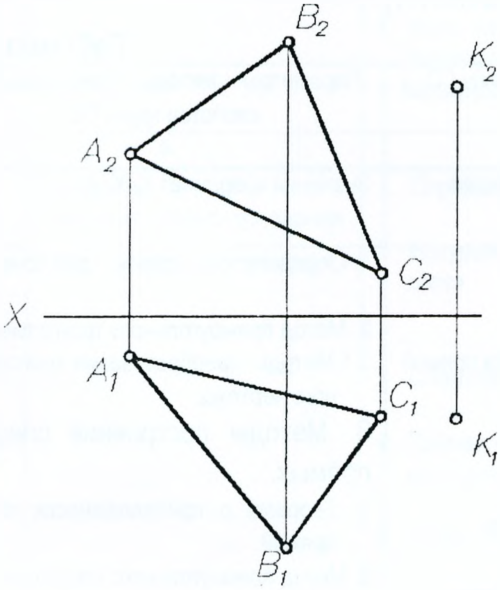


Рис. 16.3

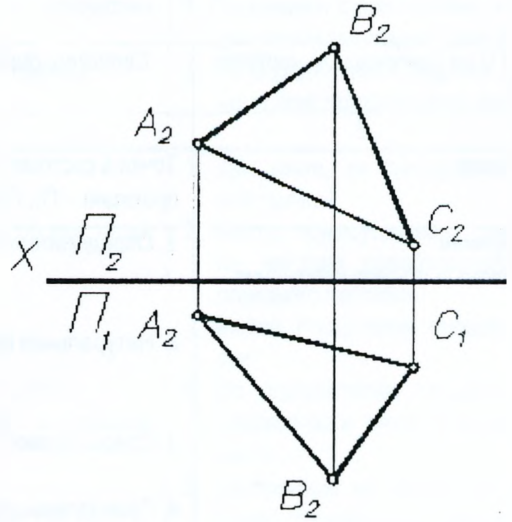


Рис. 16.4

ЛЕКЦИЯ 17

Тема. Обобщение методик разделов начертательной геометрии

Вопросы:

1. Классификация групп, характеристик и свойств геометрических образов;
2. Позиционные задачи;
3. Метрические задачи.

Выводы.

1. Классификация групп, характеристик и свойств геометрических образов

При разработке алгоритма решения задач начертательной геометрии с учетом существующих методов необходимо уметь, в первую очередь, проводить анализ поставленной задачи. Как правило, условие задачи представляет собой плоскостной комплексный чертеж изображения в двух проекциях, горизонтальной и фронтальной, а при необходимости выполняется и профильная проекция. Проводимый анализ на основании теоретических исследований, логики и пространственного воображения требует знаний и умений классифицировать заданный геометрический образ относительно плоскостей проекций, определить его свойства, необходимые характеристики и параметры, а также по заданным проекциям уметь представить оригинал (ГО) в пространстве и определить его месторасположение.

Определенная группа геометрических образов на комплексном чертеже характеризуется рядом совокупности и общности свойств, ввиду особенностей расположения их относительно плоскостей проекций. Например:

Геометрический образ – точка. *Характерная особенность* – определение положения точки в пространстве и на чертеже по координатам: X, Y, Z .

Геометрический образ - прямая линия. *Общие свойства*: натуральная величина отрезка прямой; угол наклона отрезка прямой к соответствующей плоскости проекций; следы прямой; условие принадлежности точки прямой; деление отрезка прямой какой-либо точкой в заданном отношении.

Геометрический образ – плоскость. *Общие свойства*: натуральная величина отсека плоскости; угол наклона плоскости к соответствующей плоскости проекций; следы плоскости; условие принадлежности точки и прямой линии заданной плоскости; особые линии плоскости.

При этом имеют место параметры и методы, позволяющие конкретизировать и определить эти свойства. Такая обобщенная система позволяет подходить целенаправленно к разработке графического алгоритма в решении поставленной конкретной задачи (см. табл.17.1).

Таблица 17.1

№ п/п	ГО на комплексном чертеже	Свойства, определяющие группу ГО	Параметры и методы, определяющие свойства групп ГО
1	2	3	4
1.	Точка	Точка в системе 2-х и 3-х плоскостей проекций – $П_1$, $П_2$, $П_3$	Значения координат X, Y, Z
2. 2.1	Прямая Прямые общего положения	1. Определитель прямой 2. Натуральная величина отрезка прямой 3. Следы прямой 4. Принадлежность точки прямой 5. Углы наклона прямой к плоскостям проекций 6. Взаимное положение 2-х прямых 7. Расстояние между прямыми	1. Определитель прямой – две точки. 2. Метод прямоугольного треугольника. 2.1.Методы преобразования комплексного чертежа. 3. Методы построения следов прямых. 4. Теорема о принадлежности точки прямой. 5. Метод прямоугольного треугольника; метод преобразования комплексного чертежа. 6. Теоремы о взаимном положении двух прямых. 7. Алгоритмы решения задач с применением методов без преобразования комплексного чертеже или с преобразованием комплексного чертежа.

Продолжение таблицы 17.1

2.2	Прямые уровня: - горизонтального ‖ $П_1$; - фронтального ‖ $П_2$; - профильного ‖ $П_3$	1. Натуральная величина отрезка прямой 2. Следы прямой 3. Принадлежность точки прямой 4. Углы наклона прямой к плоскостям проекций. 5. Взаимное положение 2-х прямых.	1. Определена на чертеже по заданному условию, соответственно на $П_1$, $П_2$, $П_3$. 2. Метод построения следов. 3. По определению теоремы о принадлежности точки прямой. 4. Определены на чертеже для прямых ‖ $П_1$, $П_2$. (Для прямой ‖ $П_3$ необходимо построение профильной проекции). 5. По определению теоремы о взаимном расположении двух прямых.
2.3	Прямые проецирующие: - горизонтально-проецирующие ⊥ $П_1$; - фронтально-проецирующие ⊥ $П_2$; - профильно-проеци-рующие ⊥ $П_3$;	1. Натуральная величина отрезка прямой 2. След прямой 3. Принадлежность точки прямой 4. Углы наклона прямой к плоскостям проекций 5. Взаимное положение 2-х прямых	1. Определена на чертеже перпендикулярно $П_1$ – по заданному условию в системе 2-х плоскостей проекций на плоскости $П_2$, в системе 3-х плоскостей проекций на плоскости $П_2$ и $П_3$. перпендикулярно $П_2$ – по заданному условию в системе 2-х плоскостей проекций на плоскости $П_1$, в системе 3-х плоскостей проекций на плоскости $П_1$ и $П_3$ перпендикулярно $П_3$ – по заданному условию в системе 2-х и 3-х плоскостей проекций на плоскости $П_1$ и $П_2$. 2. Метод построения следов. 3. По определению теоремы с учетом свойств собирательности проецирующих ГО. 4. Составляют с плоскостями, к которым они перпендикулярны, угол 90^0. 5. По определению теоремы о взаимном расположении двух прямых.
3. 3.1	Плоскость Плоскость общего положения	1. Определитель 2. Натуральная величина отсека плоскости. 3. След плоскости 4. Принадлежность точки и прямой плоскости 5. Особые линии плоскости 6. Углы наклона плоскости к плоскостям проекций 7. Взаимное положение двух плоскостей, прямой и плоскости 8. Расстояние от точки до плоскости	1. Три точки, не принадлежащие одной прямой. 2. Метод прямоугольного треугольника, методы преобразования комплексного чертежа. 3. Метод построения следов плоскости. 4. По определению теоремы о принадлежности точки и прямой плоскости. 5. Построение на основании определения (горизонтали, фронтали и л. н. с.) 6. Алгоритм решения задачи, применяя линию наибольшего ската плоскости. 7, 8. Алгоритмы решения задач с применением методов без преобразования или с преобразованием комплексного чертежа

Продолжение таблицы 17.1

3.2	Плоскость уровня: - горизонтального ‖ $П_1$; - фронтального ‖ $П_2$; - профильного ‖ $П_3$	1. Натуральная величина отсека плоскости. 2. След плоскости 3. Принадлежность точки и прямой плоскости 4. Особые линии в плоскости 5. Углы наклона плоскости к плоскостям проекций. 6. Взаимное положение двух плоскостей, прямой и плоскости 7. Расстояние от точки до плоскости	1. Определена на чертеже по заданному условию соответственно: - ‖ $П_1$ на плоскости $П_1$; - ‖ $П_2$ на плоскости $П_2$; - ‖ $П_3$ на плоскости $П_3$ 2. Метод построения следов. 3. По определению теоремы о принадлежности точки и прямой плоскости. 4. Построение на основании определения главных линий плоскости. 5. 0^0, 90^0, 90^0. 6, 7. Алгоритмы решения задач с применением методов без преобразования комплексного чертежа
3.3	Проецирующие плоскости: - горизонтально-проецирующие ⊥ $П_1$; - фронтально-проецирующие ⊥ $П_2$; - профильно-проеци-рующие ⊥ $П_3$;	1. Натуральная величина отсека плоскости. 2. След плоскости. 3. Принадлежность точки и прямой плоскости. 4 Особые линии в плоскости	1. Методы преобразования комплексного чертежа. 2. Метод построения следов. 3. По определению теоремы с учетом собирательности проецирующих ГО. 4. Построение на основании определителя. 5. Определение на чертеже по заданному условию. 6. Алгоритм решения конкретных задач с преобразованием или без преобразованием комплексного чертежа.
4. 4.1 4.2	Поверхности Поверхность общего положения. Поверхность частного положения: ⊥ $П_1$; ⊥ $П_2$; ⊥ $П_3$.	1.1 Определитель 1.2 Определитель 2. Принадлежность точки и линии поверхности. Характерные особые точки и линии, принадлежащие каркасу поверхности. 3. Взаимное положение 2-х поверхностей, поверхности и прямой линии, поверхности и плоскости.	1.1 Классификация в соответствии с определителем. 1.2 Классификация по наличию в их определителе проецирующего ГО (прямой или плоскости). 2. По определению теоремы из условия принадлежности точки поверхности. 3. Составление алгоритмов решения задач с использованием методов секущих плоскостей-посредников частного и общего положения, методы концентрических сфер, методы преобразования комплексного чертежа.
4.3.	Развертка поверхностей	1. Построение точной развертки	1. Методы треугольников, раскатки, нормального (перпендикулярного) сечения.

Обратимость чертежа

Обратимость чертежа – основная цель и задача начертательной геометрии.

Прямая задача – представить геометрический образ в пространстве и по нему на основании известных методов проецирования выполнить чертеж на соответствующих плоскостях проекций.

Обратная задача – по выполненному чертежу воспроизвести заданный геометрический образ (оригинал) в пространстве.

На рис.17.1; 17.2 имеется возможность проанализировать выше изложенное. Так, например, (рис.17.1) по ортогональному плоскостному комплексному чертежу, представленному горизонтальной и фронтальной проекцией усеченного цилиндра, без затруднений воспроизводится геометрический образ (оригинал), представленный в виде аксонометрического изображения. Также не вызовет трудностей, по наглядному изображению представить ортогональный чертеж, т.е. проекции геометрического образа (оригинала).

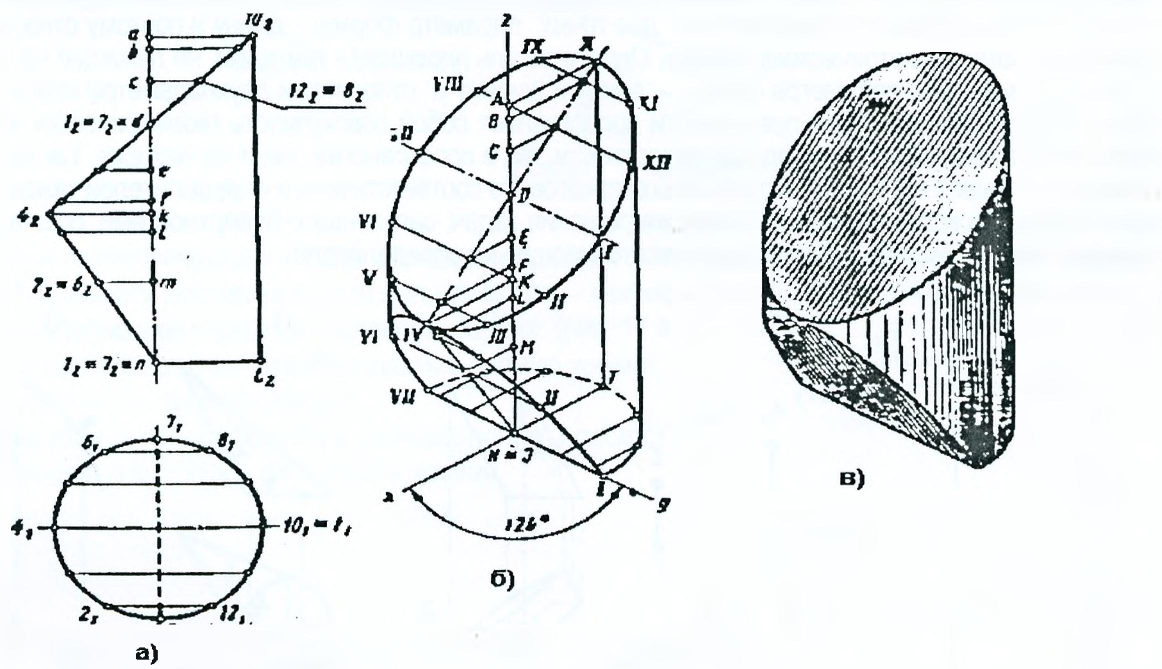


Рис. 17.1

Прямой круговой цилиндр (цилиндр вращения), пересечённый двумя фронтально-проецирующими плоскостями: а – ортогональный чертёж; б – прямоугольная изометрия; в – технический рисунок

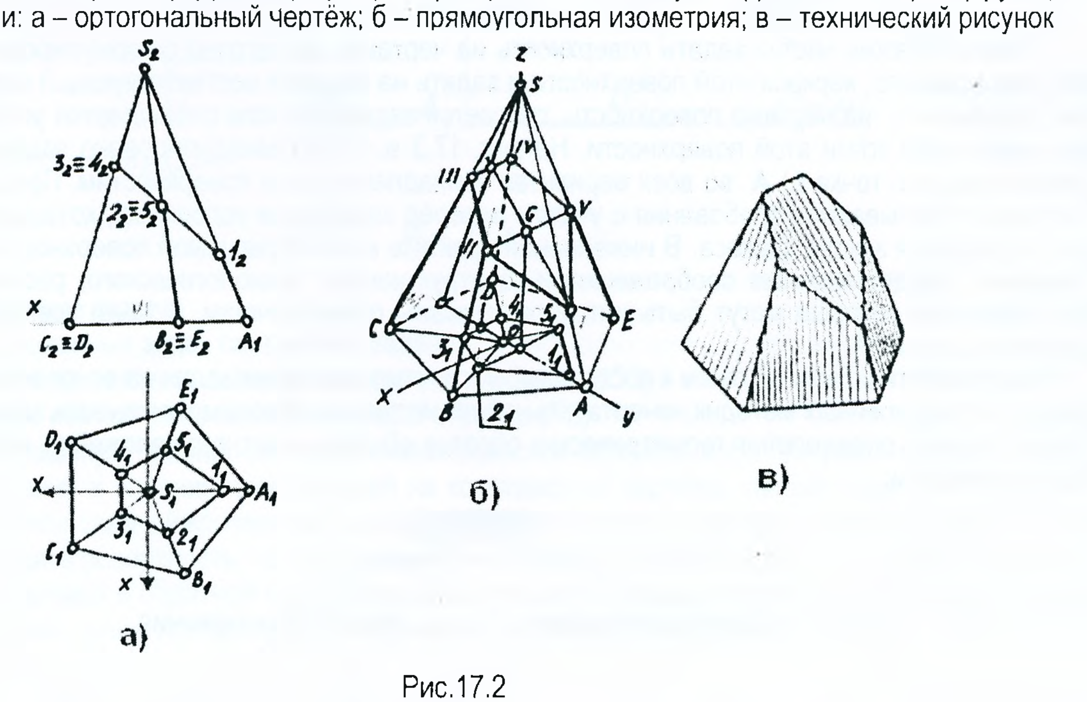


Рис.17.2

Правильная пятиугольная пирамида, усеченная фронтально-проецирующей плоскостью: а – ортогональный чертёж; б – прямоугольная изометрия; г – технический рисунок

В ортогональных проекциях проецирование осуществляется на две, а при необходимости на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Решение прямой и обратной задачи с учётом всех известных геометрических закономерностей возможно применяя и одну плоскость. В аксонометрических проекциях это достигается построением аксонометрической и вторичной проекции геометрического образа.

Геометрические образы и их определители

При изучение начертательной геометрии рассматриваются следующие геометрические образы: точка, линия (прямая и кривая), плоскость, поверхность (плоскость – частный случай поверхности) (рис.17.3). В изучении и представлении каждого геометрического образа необходимо конкретизировать его определитель и параметры, в связи с тем, что обозначенные ГО абстрактны. К примеру – точка, абстрактный геометрический образ, не имеет параметра формы, т.е. не имеет определителя и характеризуется координатами X,Y,Z. Линия имеет: определитель - две точки; параметр формы – длину и поэтому относится к однопараметрическому геометрическому образу. Определитель плоскости - три точки, не лежащие на одной прямой. Плоскость имеет два параметра формы – длину и ширину и относится к двухпараметрическому геометрическому образу. Определитель поверхности представляет собой совокупность геометрических элементов, что позволяет реализовать закон каркаса поверхности, как в пространстве, так и на чертеже. Так как одна и та же поверхность имеет несколько непрерывных каркасов, то соответственно и определителей каждая поверхность может иметь несколько. Однако в практике решения задач, связанных с поверхностями, обычно выбираются каркасы в виде простейших линий и соответствующие их определители.

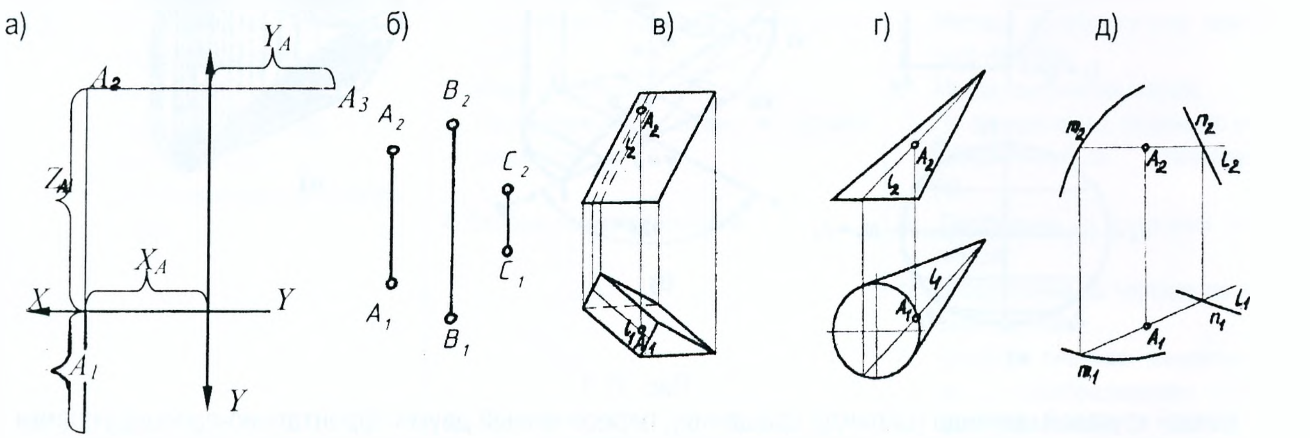


Рис. 17.3

Таким образом, чтобы задать поверхность на чертеже, достаточно сформулировать закон какого-либо непрерывного каркаса этой поверхности и задать на чертеже соответствующий определитель. При этом, однозначно, на чертеже поверхность считается заданной, если соблюдается условие принадлежности какой-либо точки этой поверхности. На рис. 17.3 в, г, д проанализировано задание приведенных поверхностей, т.к. точка (.) **A** во всех вариантах принадлежит этим поверхностям. При конструировании поверхности учитываются требования с учетом наперёд заданными условиями, которые являются основой для создания закона каркаса. В инженерной практике к конструируемой поверхности предъявляются требования, продиктованные соображениями конструктивного, технологического, расчетного, эстетического характера, которые могут быть интерпретированы геометрически, с точки зрения позиционных и метрических условий.

Чтобы подойти и быть готовым к построению алгоритмов решения задач на основании существующих методов и определенных методик начертательной геометрии, необходимо учитывать классификацию, а соответственно и определения геометрических образов общего и частного положения в следующей последовательности:

ПРЯМЫЕ

Общего положения   Частного положения

уровня   проецирующие

ПЛОСКОСТИ

Общего положения Частного положения

уровня проецирующие

ПОВЕРХНОСТИ

Общего положения Частного положения

уровня проецирующие

При наличии геометрического образа частного положения значительно упрощается решение задачи. В случае необходимости достижения этой цели имеются – *методы преобразования комплексного чертежа*. Основополагающими при этом являются задачи: (рис. 17.4).

- прямую общего положения преобразовать в прямую уровня;
- прямую уровня – в проецирующую;
- плоскость общего преобразовать в проецирующую плоскость;
- проецирующая плоскость – в плоскость уровня.

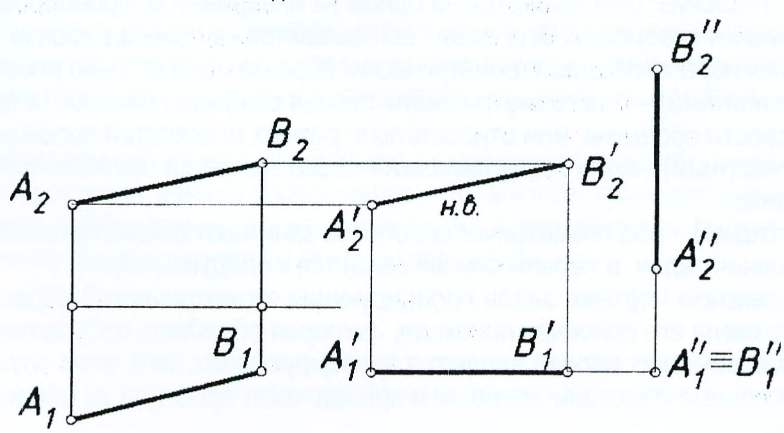


Рис. 17.4

2. Позиционные задачи

Группу позиционных задач составляют задачи:

- *на взаимную принадлежность геометрических образов (ГО);*
- *на взаимное пересечение геометрических образов (ГО).*

Задачи на взаимную принадлежность геометрических образов, подробно рассматриваются в разделе конструирования и задания поверхностей на комплексном чертеже, так как задача на принадлежность точки является задачей-критерием задания этой поверхности. Поэтому, если необходимо какимлибо способом задать поверхность, то это означает, что должен решаться вопрос о принадлежности точки поверхности в прямой и обратной постановке. При этом необходимо исходить из следующего общеизвестного положения – точка принадлежит поверхности, если она принадлежит некоторой линии этой поверхности (рис.17.5).

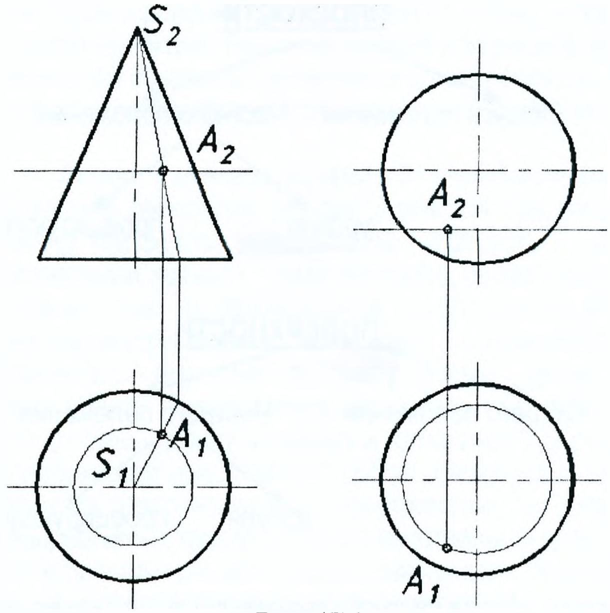


Рис. 17.5

Задачи на взаимное пересечение геометрических образов:

- на пересечение двух линий;
- на пересечение плоскости, линии и поверхности;
- на пересечение двух поверхностей.

Первая из этих задач сводится к следующей – заданы две линии и требуется определить, пересекаются они или нет. Решение основывается на одном из инвариантов проецирования.

Методика решения следующих двух задач основывается на *трёх алгоритмах*, соответствующих трём случаям расположения пересекающихся геометрических образов относительно плоскостей проекций.

1-й случай (частный) – оба геометрических образа занимают частное положение относительно одной и той же плоскости проекций, или относительно разных плоскостей проекций;

***2-й случай* (частный)–** один геометрический образ является частного положения, а второй занимает общее положение.

3-й случай (общий) – оба геометрических образа занимают общее положение.

Алгоритм решения задач в первом случае сводится к следующему.

Если на комплексном чертеже задан проецирующий геометрический образ, то на одной из плоскостей проекций изображена его *основная проекция, которая обладает собирательным свойством.*

Если оба геометрических образа являются проецирующими, то в этом случае на комплексном чертеже даны их две основные проекции, которым и принадлежат проекции их общих элементов – *точек или линий пересечения.*

Алгоритм решения задач во втором случае заключается в следующем**.** Один из заданных ГО является проецирующим, и на чертеже изображена одна основная проекция, которой принадлежит проекция искомого общего элемента. Имея одну проекцию искомого общего элемента, можно найти вторую, решив при этом задачу на принадлежность геометрического элемента не проецирующему ГО.

Алгоритм решения задач в третьем, общем, случае заключается в следующем**.** В этом случае нет проецирующих поверхностей, и соответственно нет на чертеже проекций со свойствами собирательности. Основным способом решения задач является способ вспомогательных плоскостей частного положения либо способ концентрических сфер.

3. Метрические задачи

В этой группе можно выделить задачи, имеющие приоритетную значимость: *на перпендикулярность прямых линий; перпендикулярность прямых линий к произвольной плоскости (оригиналу) заданной в пространстве.* Задачи проанализированы на рис.17.6:

- через заданную точку провести прямую, перпендикулярную плоскости;
- через заданную точку провести плоскость и прямую, перпендикулярную прямой; определение натуральной величины отрезка прямой, методом прямоугольного треугольника.

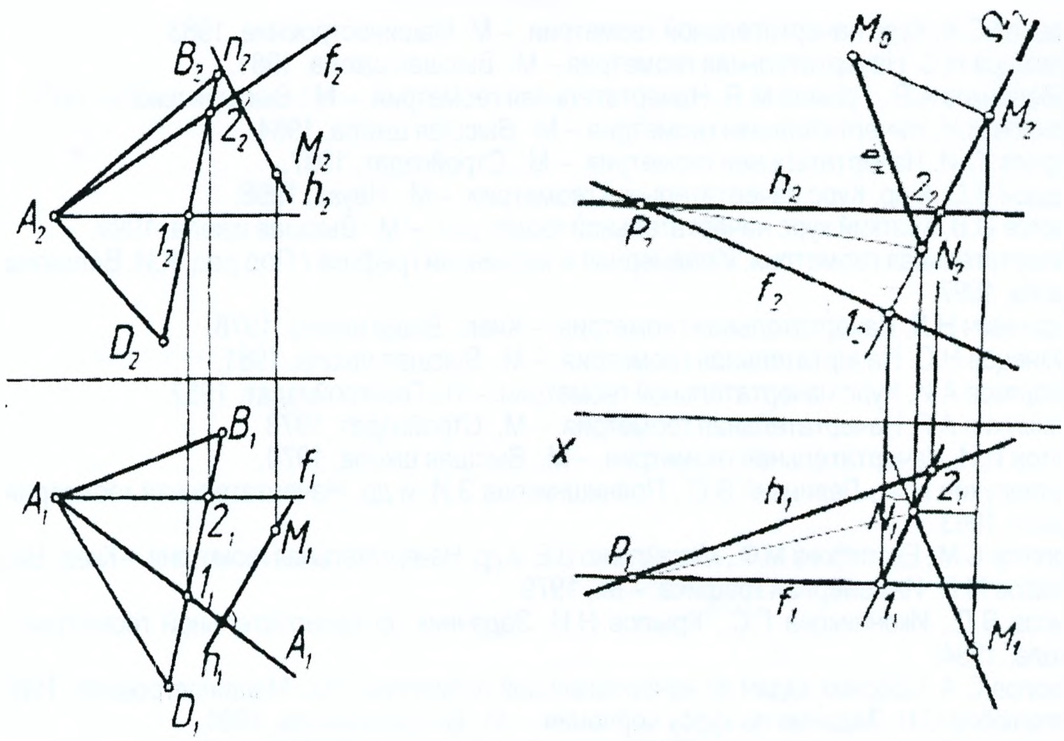


Рис. 17.6

При решении метрических задач необходимо использовать теорему о проецировании прямого угла, теоремы о перпендикулярности плоскостей и прямых к плоскостям, а также алгоритмы решения задач по определению общих геометрических элементов в результате пересечения геометрических образов.

Выводы: целенаправленный комплексный подход к изучению начертательной геометрии позволяет развивать у студента пространственное воображение, что, в итоге, приводит к приобретению и развитию практических навыков, необходимых при решении задач, и способствует получению студентами необходимых знаний, формирующих инженерное мышление в целом.

ЛИТЕРАТУРА

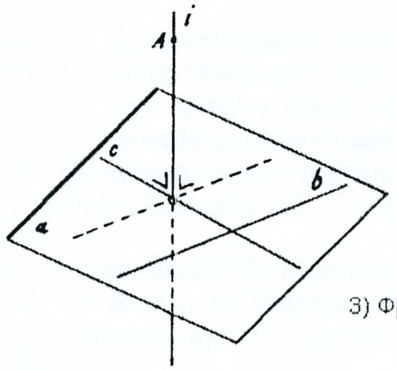
1. Фролов С.А. Курс начертательной геометрии. – М: Машиностроение, 1983
2. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия – М.: Высшая школа, 1981.
3. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1973.
4. Крылов Н.Н. Начертательная геометрия – М.: Высшая школа, 1984.
5. Короев Ю.И. Начертательная геометрия. – М.: Стройиздат, 1987.
6. Гордон В.О. и др. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1998.
7. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1999.
8. Начертательная геометрия. Инженерная и машинная графика / Под ред. К.И. Валькова. – М.: Высшая школа, 1997.
9. Русскевич Н.Л. Начертательная геометрия. – Киев.: Вища школа, 1978.
10. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1981.
11. Добряков А.И. Курс начертательной геометрии. – Л.: Госстройиздат, 1952.
12. Климухин А.Г. Начертательная геометрия. – М.: Стройиздат, 1973.
13. Котов И.И. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1970.
14. Четверухин Н.Ф., Левицкий В.С., Прянишникова З.И. и др. Начертательная геометрия. - М.: Высшая школа, 1963.
15. Колотов С.М., Евстифеев М.Ф., Михайленко В.Е. и др. Начертательная геометрия. – Киев.: Вища школа, 1975.
16. Власов М.П. Инженерная графика. – М., 1979.
17. Засов В.Д., Иконникова Г.С., Крылов Н.Н. Задачник по начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1984.
18. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии – М.: Машиностроение, 1980.
19. Боголюбов С.Н. Задания по курсу черчения. – М.: Высшая школа, 1984.
20. Н.С. Брилинг, Ю.П. Евсеев. Задания по черчению. – М.: Стройиздат, 1984.
21. Черчение: Учебное пособие для сред. спец. учеб. заведений. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1989.
22. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. – М.: Просвещение, 1969.
23. Глазунов Е.А., Четверухин Н.Ф. Аксонометрия. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953.
24. Боголюбов С.К. Черчение. – М.: Машиностроение, 1989.
25. Короев Ю.И. и др. Инженерно-строительное черчение. – М.: Высшая школа, 1983.
26. Машиностроительное черчение / Под ред. Г.П. Вяткина. – М.,1985.
27. Старостина Л.А. Введение в АВТОКАД. – М.,1991.
28. Государственные стандарты Единой системы конструкторской документации (ЕСКД). Общие правила выполнения чертежей. – М., 1985.
29. Стандарт университета. Общие требования и правила оформления. / Под редакцией Т.Н. Базенкова. – Брест: БГТУ, 2002.
30. Русскевич Н.Л. Справочник по инженерно-строительному черчению. – К., 1987.
31. Годик Е.И., Хаскин А.М. Справочное руководство по черчению. – М.: Машиностроение, 1974.
32. Новичихина Л.И. Справочник по техническому черчению. – Мн.: Высш. шк., 1976.
33. Уласевич З.Н. Обобщение методик преподавания курса начертательной геометрии //Новые технологии в машиностроении и вычислительной технике. Часть I / БПИ. – Брест,1998. – с.226-231.
34. Уласевич З.Н. Методические особенности общего подхода к теме «вращение» в начертательной геометрии // Высшее техническое образование: проблемы и пути развития: Материалы международной научно-методической конференции, Минск, 17–18 марта 2004г. – Мн.: БГУИР, 2004. – с. 210.
35. Уласевич З.Н., Шумская Л.П., Чипурных Т.В. Методика представления графической информации задач начертательной геометрии по теме «Вращение» с использованием слайдов // Образовательные технологии в преподавании графических дисциплин: Республиканская научно-техническая конференция, Брест, 9–10 июня 2005г. – Брест: БГТУ, 2005. – с.86-89.
36. Чипурных Т.В., Уласевич З.Н. Инновационные подходы в активизации познавательной деятельности студентов при изучении начертательной геометрии // Инновационные технологии преподавания и изучения графических дисциплин технических специальностей / I республиканская научно-практическая конференция молодых учёных и студентов, Брест, 28–29 октября 2004г. – Брест: БГТУ, 2004. – с. 80–82.
37. Методические указания по начертательной геометрии. Часть I / Уласевич З.Н. и др. – Брест: БГТУ, 2001.
38. Методические указания по начертательной геометрии. Часть П / Уласевич З.Н. и др. – Брест: БГТУ, 2001.
39. Методические указания по начертательной геометрии для выполнения домашних графических работ и контрольных аудиторных работ / Уласевич З.Н. и др. – Брест: БГТУ, 2001.
40. Практикум по начертательной геометрии / Уласевич З.Н., Яромич А.И., Шумская Л.П. и др. – Брест: БГТУ, 2004.

ПРИЛОЖЕНИЯ

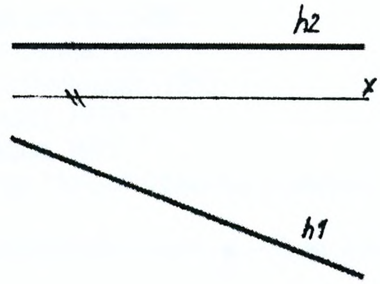
I. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

1) Геометрическая модель плоскости α, расположенной в пространстве.

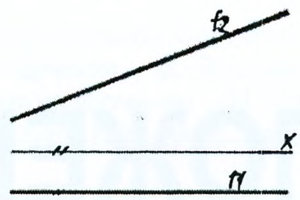
Пересекаются прямые C и B



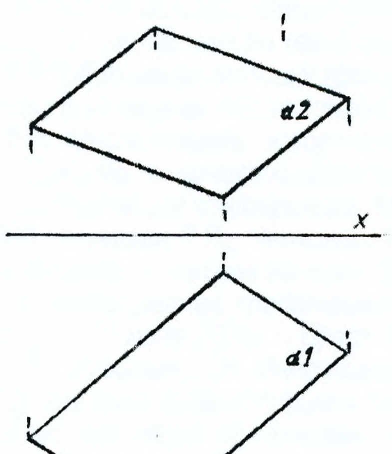
2) Горизонталь H (h_1;h_2)



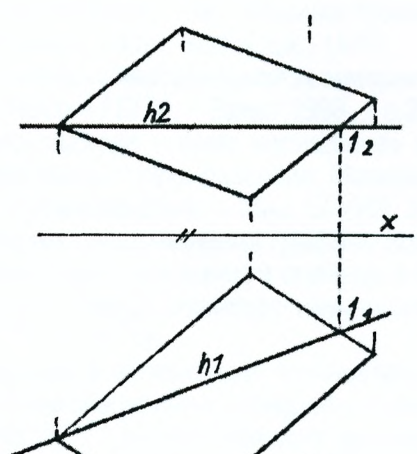
3) Фронталь F (f_1;f_2)



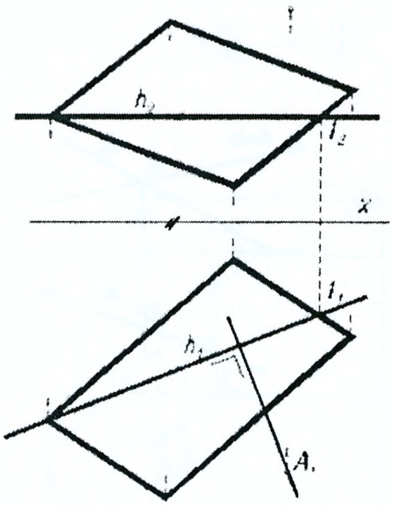
4) Плоскостной чертеж отсека α ($α_1$;$α_2$)



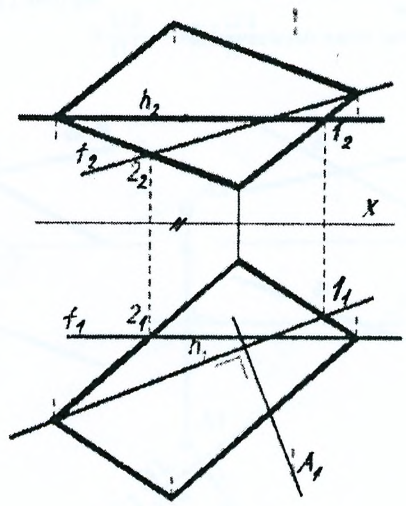
5) Горизонталь H (h1;h2), принадлежащая плоскости α и проходящая через точку 1 (1_1;1_2)



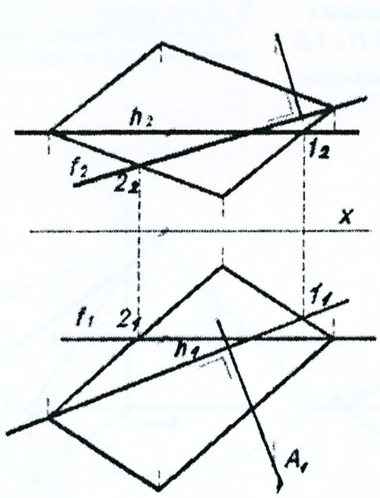
6) Горизонталь h (h_1;h_2) к плоскости α; на чертеже из (.) A ⊥ к h_1



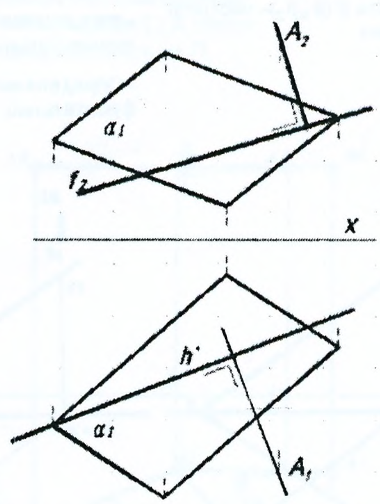
7) Горизонталь F (f_1;f_2),принадлежащая плоскости и проходящая через точку 2 (2_1;2_2).
Перпендикуляр, опущенный из (.)A к плоскости α



8) Фронтальная проекция перпендикуляра к плоскости α; на чертеже из (.) A ⊥ к f_2



9) Горизонтальная проекция перпендикуляра из (.)A $_1$ ⊥ к h_1;
- фронтальная проекция перпендикуляра из (.) A $_2$⊥ к f_2;



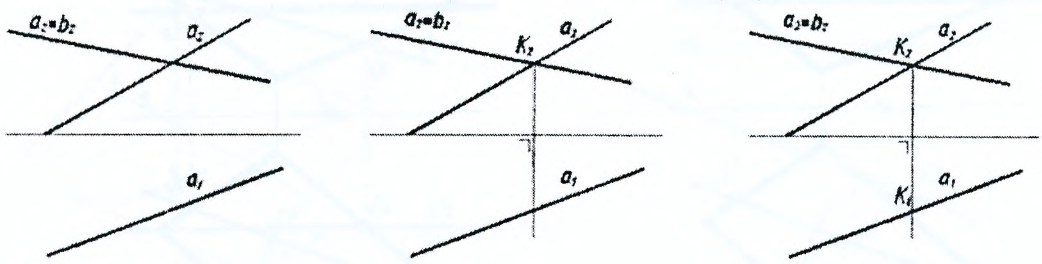
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ (плоскость задана следом)

Частный случай – плоскость частного положения, т.е. α (α_2) $\perp П_2$

1) **Дано**: плоскость α (α_2) $\perp П_2$; прямая А ($А_1$; $А_2$) – общего положения. Определить точку пересечения

2) Определяем на чертеже ( )$К_2$

3) Определяем ( ) $К_1$



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ 2-Х ПЛОСКОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ СЛЕДАМИ

1) **Дано**: - плоскость α (α_1;α_2)– общего положения;

- плоскость β (β_1;β_2)– частного положения

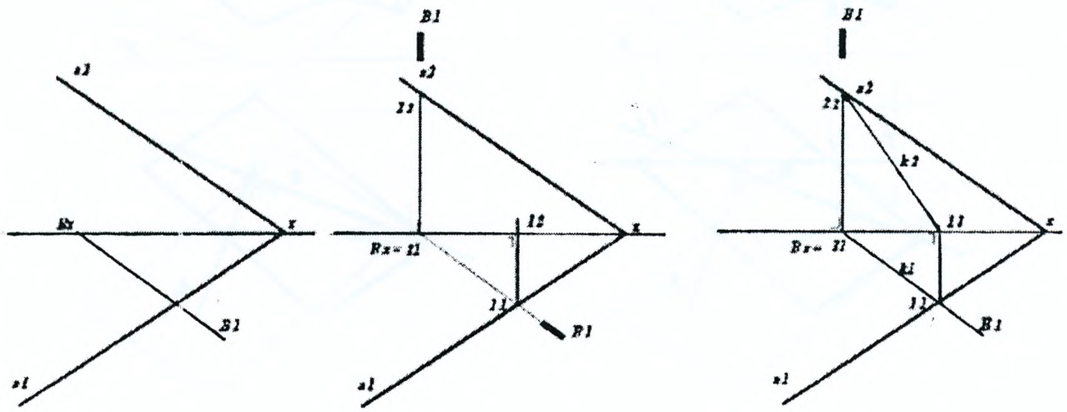
2) Проводим фронтальный след пл-ти $\beta \rightarrow \beta_2$; $\beta_2 \perp$оси ОХ;

- определяем точку пресечения горизонтальных следов 1 (1_1; 1_2);

- Определяем точку пересечения фронтальных следов 2 (2_2;2_1).

3) – $1_1 2_1$ – горизонтальная проекция линии пересечения 2-х плоскостей $\alpha \cap \beta$;

- $1_2 2_2$ – фронтальная проекция линии пересечения 2-х плоскостей $\alpha \cap \beta$;

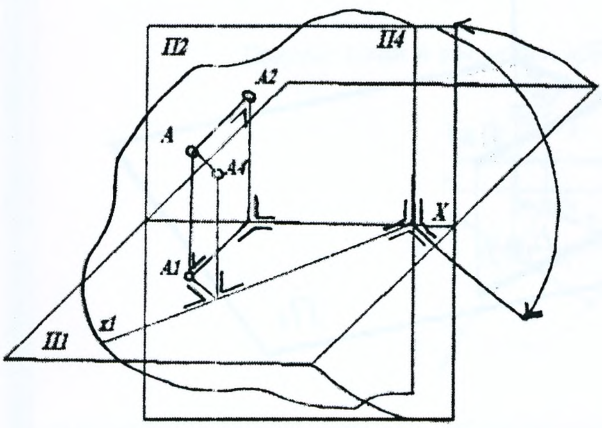


II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Метод замены плоскостей проекций

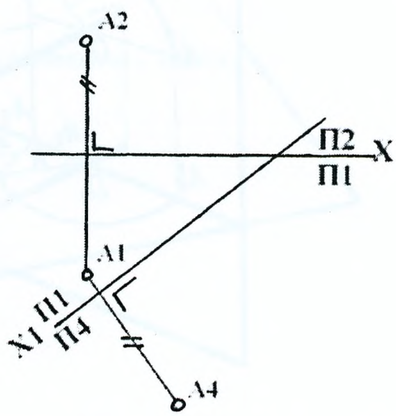
1) Пространственный комплексный чертеж (.) А в системе плоскостей проекций

$$X\frac{\Pi 2}{\Pi 1} \longrightarrow X1\frac{\Pi 4}{\Pi 1}$$



1) Плоскостной чертеж (.) А в системе плоскостей проекций

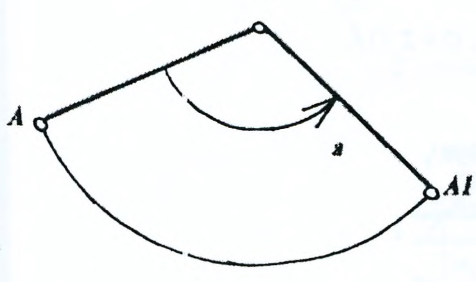
$$X\frac{\Pi 2}{\Pi 1} \longrightarrow X1\frac{\Pi 4}{\Pi 1}$$



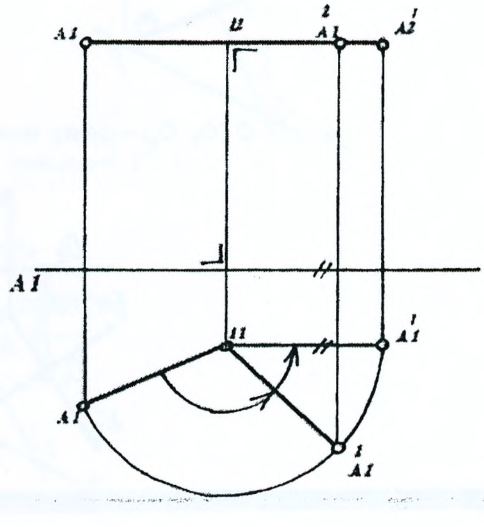
Методы вращения

Вращение вокруг проецирующей оси

1) Пространственная модель вращения (.) А в плоскости α вокруг оси ⊥ П1



2) Плоскостной комплексный чертеж вращения (.) А вокруг проецирующей оси I ⊥ $П_1$



Вращение вокруг линии уровня (горизонтали)

Аппарат вращения

Точка *A* – объект вращения.

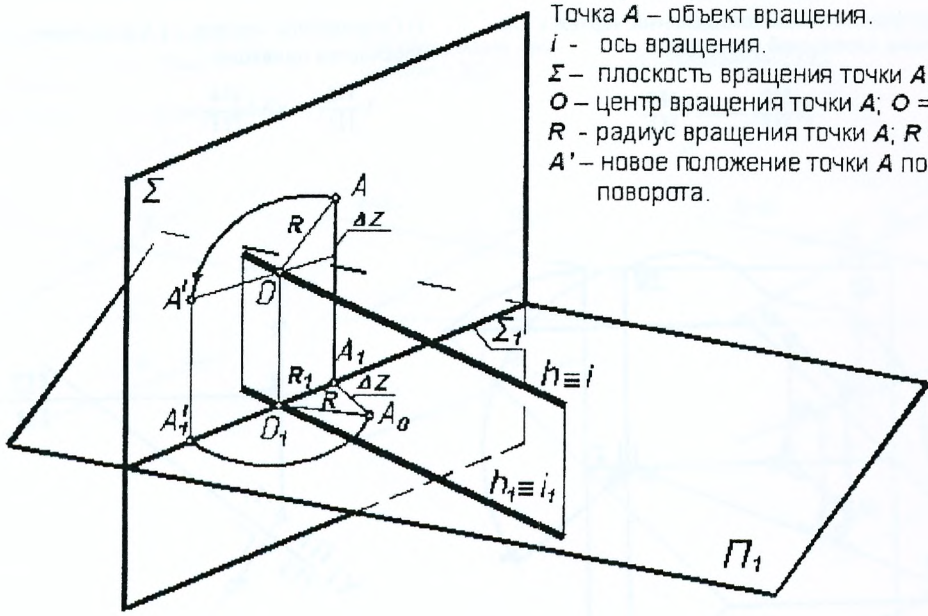
i - ось вращения.

Σ – плоскость вращения точки *A*; $\Sigma \perp i$.

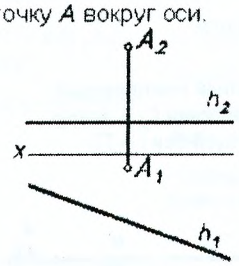
O – центр вращения точки *A*; $O = \Sigma \cap i$.

R - радиус вращения точки *A*; $R = OA$.

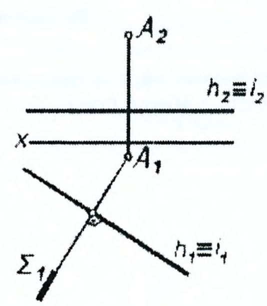
A' – новое положение точки *A* после поворота.



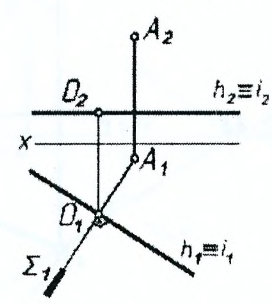
Дано: точка $A\ (A_1, A_2)$ – объект вращения.
Линия горизонтального уровня $h\ (h_1, h_2)$ – ось вращения.
Повернуть точку *A* вокруг оси.



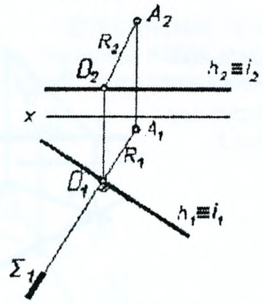
Ось вращения – $i \equiv h\ (i_1 \equiv h_1,\ i_2 \equiv h_2)$.
Σ – плоскость вращения; $\Sigma \perp i$.



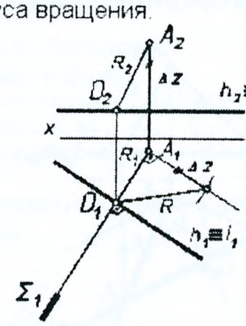
$O\ (O_1, O_2)$ – центр вращения; $O = \Sigma \cap i$.



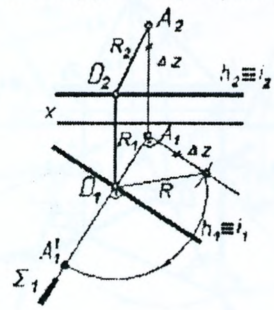
O_1, A_1, O_2, A_2 – проекции радиуса вращения.



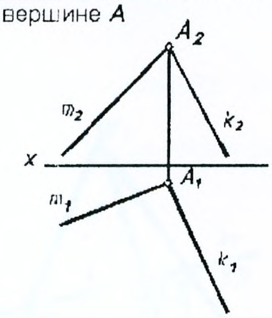
Определение натуральной величины радиуса вращения.



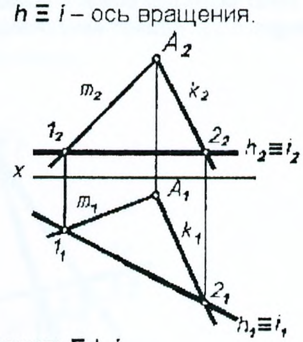
Поворот точки A вокруг оси вращения (возможны 2 варианта).



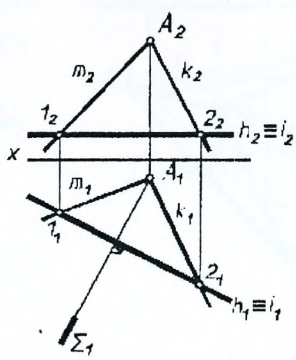
<u>Дано:</u> пересекающиеся прямые ($m \cap k$)
<u>Определить:</u> натуральную величину угла при вершине A



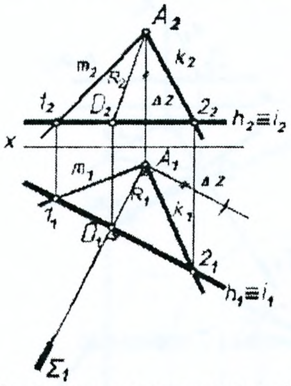
Построение горизонтали h (h_1, h_2).
$h \equiv i$ – ось вращения.



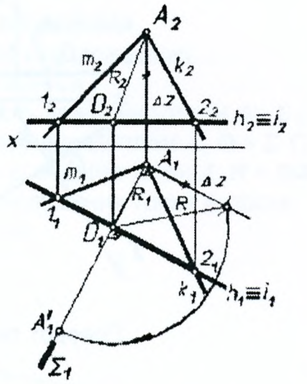
Σ – плоскость вращения; $\Sigma \perp i$.



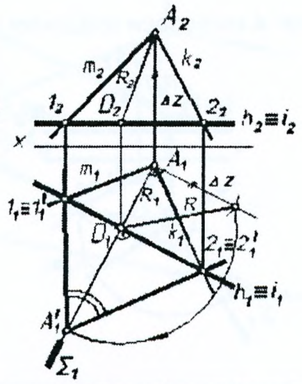
O (O1, O2) – центр вращения; *O* = $\Sigma \cap i$.
R1, *R2* – проекции радиуса вращения *R*.



Определение натуральной величины *R* вращения. Поворот точки *A* вокруг оси вращения (возможны 2 варианта).



Определение натуральной величины угла, образованного двумя пересекающимися прямыми.



III. ПОВЕРХНОСТИ

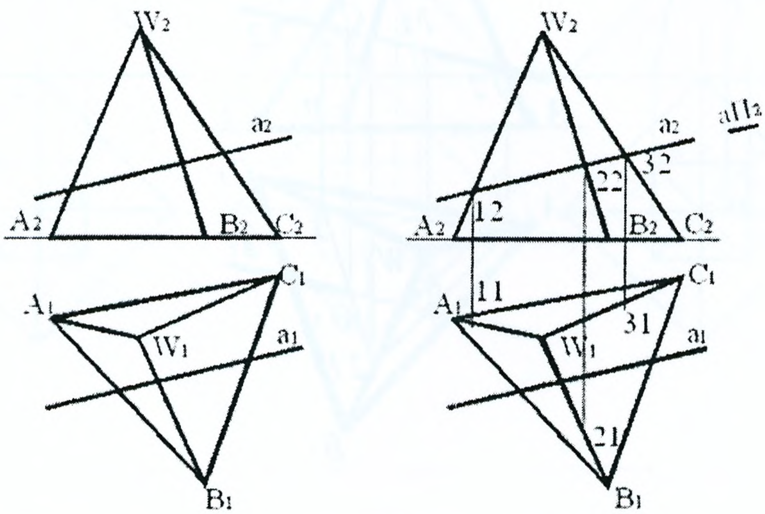
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ПИРАМИДЫ

Дано: - поверхность пирамиды ABCW ($A_1B_1C_1W_1$;$A_2B_2C_2W_2$); - прямая A (A_1;A_2)

Опрeделлить точки пересечения прямой A с поверхность пирамиды ABCW

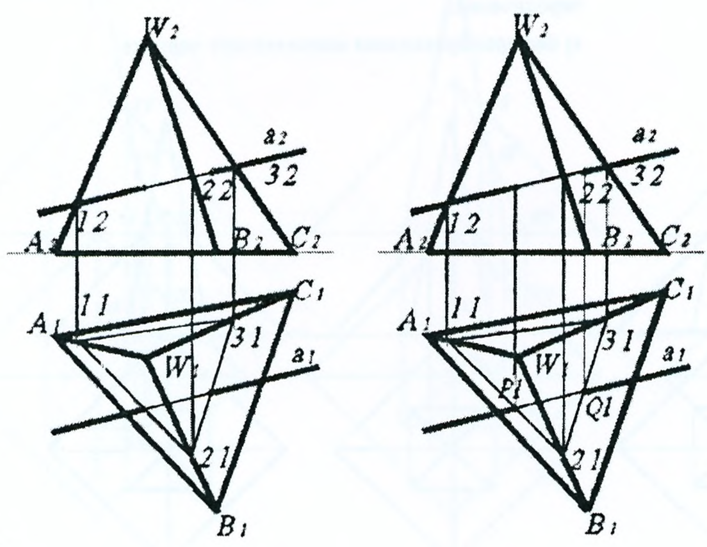
а) условие задачи
Дано: - пов-ть пирамиды;
- прямая A (a_1;a_2)

б) - заключаем прямую A во фронтально-проецирующую пл-ть
α (α$П_2$) → $1_12_13_1$;
- определяем фронтальную проекцию линии пересечения – $1_12_23_2$.

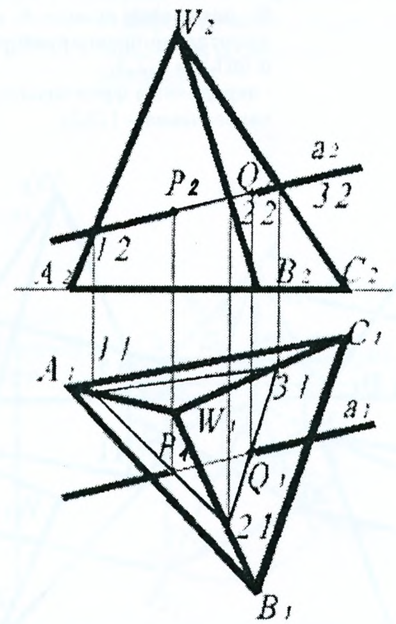


3) Определяем горизонтальную проекцию линии пересечения – $1_12_13_1$;

4) Определяем (.) P_1; (.) Q_1 – горизонтальные проекции точек пересечения прямой A с поверхностью пирамиды



5) Обозначаем (.)P_2;(.)Q_2 – т.е. фронтальные проекции точек пересечения прямой А с поверхностью.



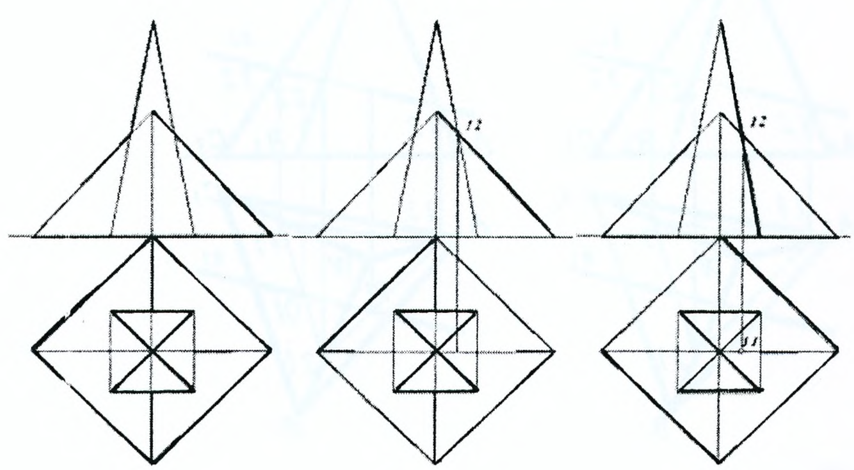
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

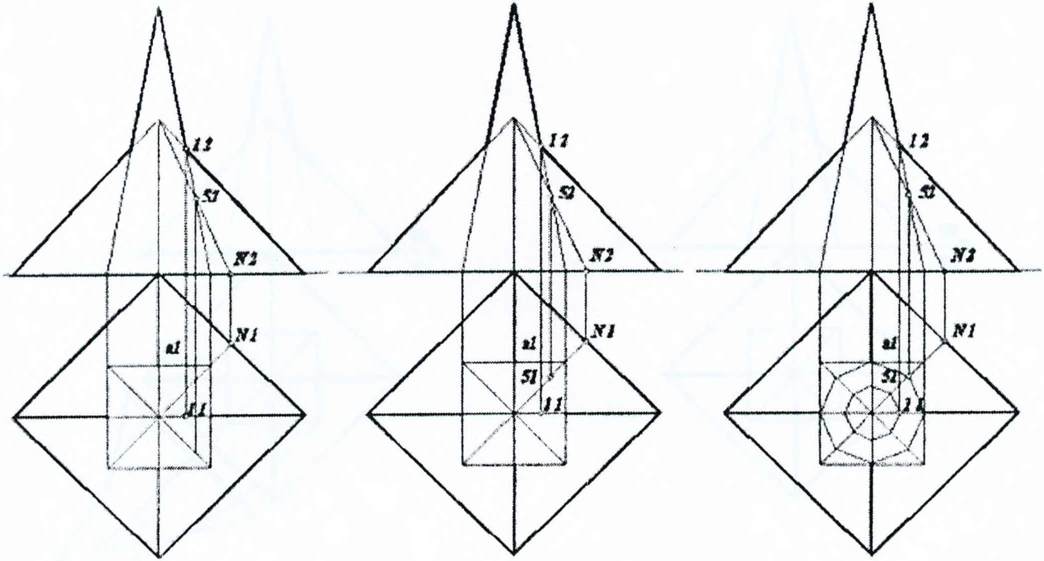
На данном примере проанализировано построение характерных точек при определении линии пересечения 2-х поверхностей

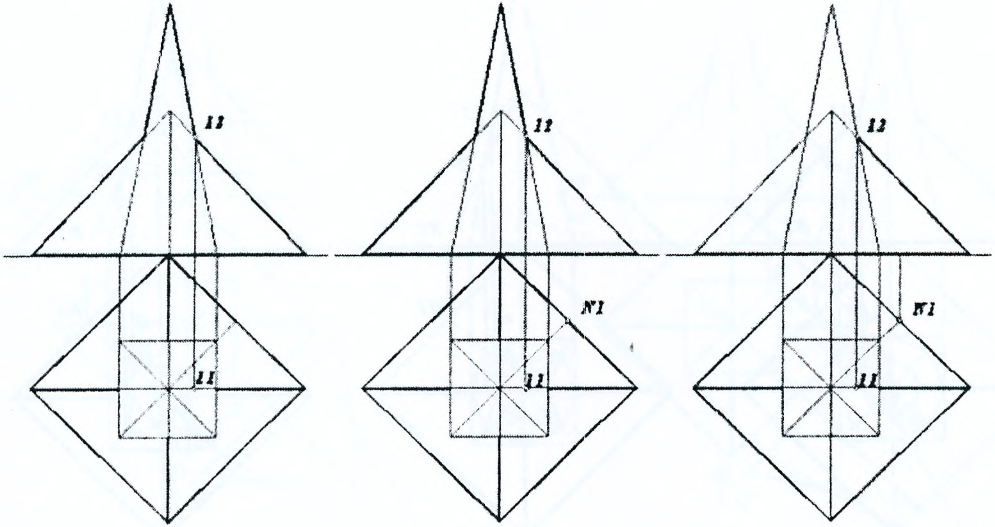
1. Условие задачи;

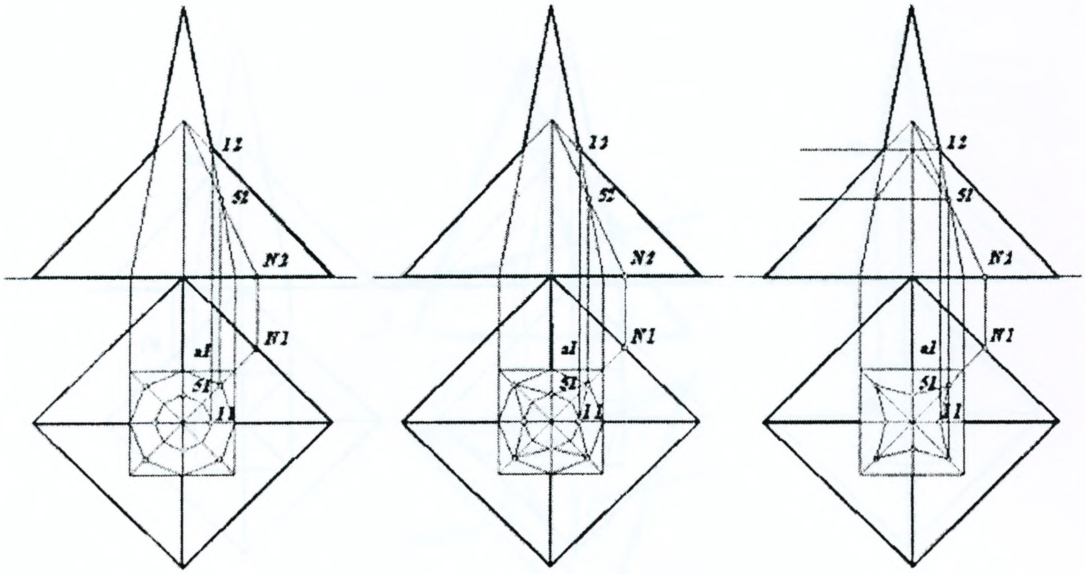
2) Возможность определения характерных точек линии пересечения;

а) без преобразования комплексного чертежа

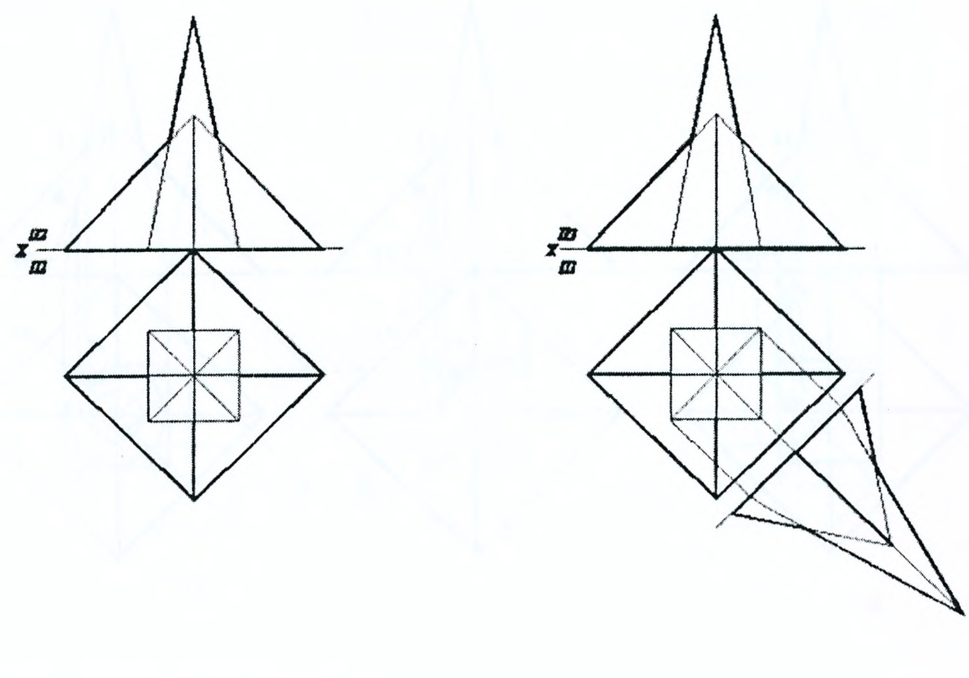


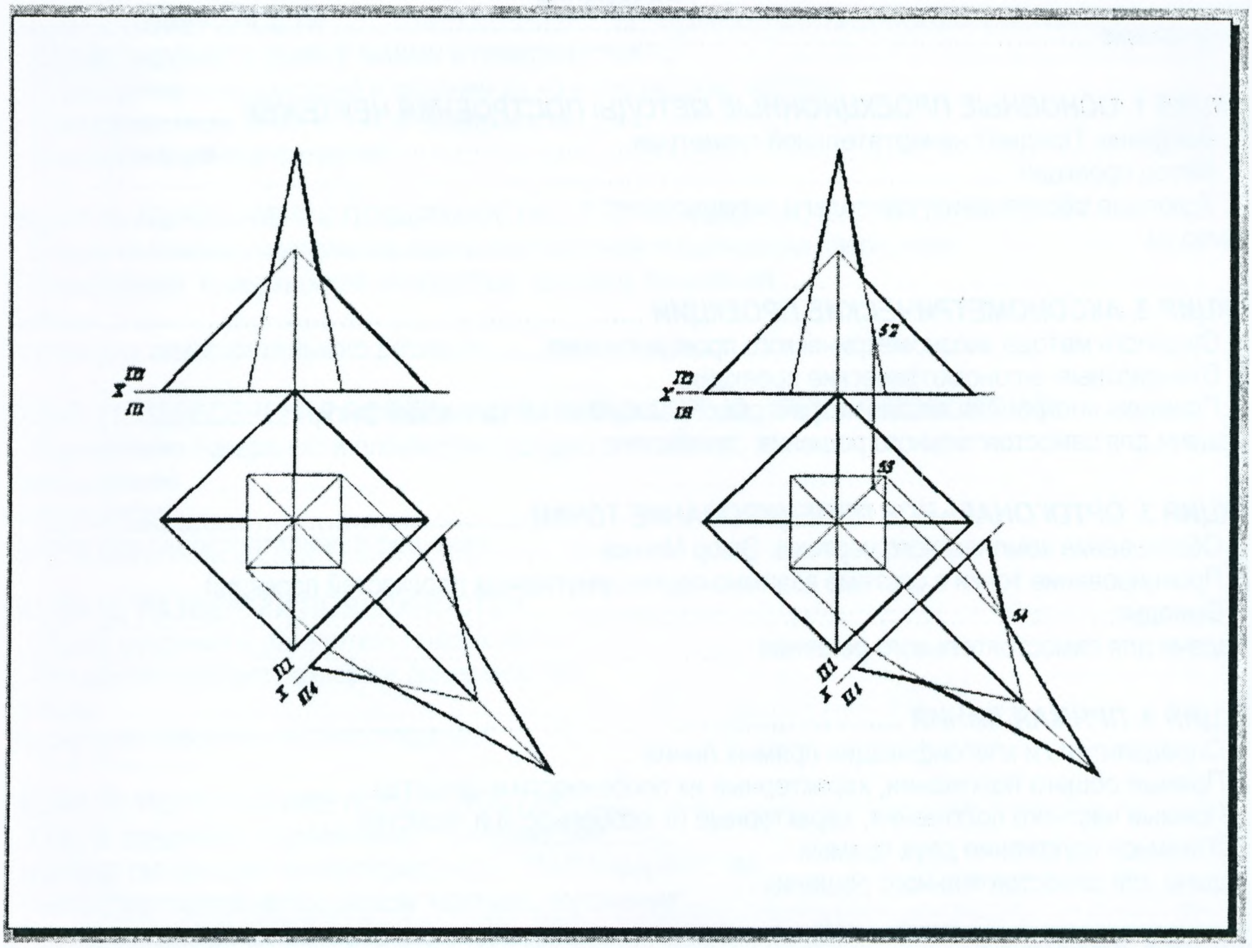

1 2
S2
N2
N1
a1
1 1
1 1
S2
N2
N1
a1
S1
1 1
1 2
S2
N2
N1
a1
S1
1 1


12
11
12
N1
11
12
N1
11



б) Возможность определения характерных точек линии пересечения поверхностей с применением метода замены плоскостей проекций




S2
S3
S4

Содержание

Учебное издание

Составители:

Уласевич Зинаида Николаевна
Чипурных Татьяна Вячеславовна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Курс лекций
с задачами для самостоятельной работы

для студентов специальности
1 - 70 01 01 – «Производство строительных изделий и конструкций»

Ответственный за выпуск: ***Уласевич З.Н.***
Редактор: ***Строкач Т.В.***
Компьютерная верстка: ***Боровикова Е.А.***
Корректор: ***Никитчик Е.В.***

Подписано к печати 2.11.2005 г. Формат 60x84 $^1/_8$. Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 11,6. Уч.-изд. л. 12,5. Заказ № 1040. Тираж 200 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.