А. И. ЖУК, Е. Н. ЗАЩУК
Брест, БрГТУ

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t),\ \ i=\overline{1,p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0)=x_0$, где f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ – удовлетворяют условию линейного роста и ограничены на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ непрерывны справа. Решения уравнения (1) с непрерывными функциями $L^j(t)$ получены в [1].

Пусть R – вещественная прямая. На множестве всех последовательностей из элементов R $(x_n)\sim(y_n)$, если $\exists n_0\in N$, $\forall n\geq n_0$, $x_n=y_n$, тогда обобщенным числом назовем класс эквивалентности $\tilde{x}=[(x_n)]$. Множество обобщенных чисел обозначим $\tilde{R}$. Аналогично строится расширение $\tilde{T}$ отрезка T. Выделим в $\tilde{R}$ следующие подмножества:

$$H=\{\tilde{h}\in\tilde{R}:\tilde{h}=[(h_n)],h_n>0,\forall n\in N,\lim_{n\to\infty}h_n=0\},$$

$$S=\{\tilde{h}\in H:h_n=o(1/n),h_n\to 0,n\to\infty,\forall(h_n)\in\tilde{h}\}.$$

На множество всех последовательностей $\{f_n\}$ таких, что $f_n \in C^\infty(R)$ $(f_n)\sim(g_n)$, если $\exists n_1 \in N$, $\forall n \geq n_1$, $\forall x \in R$, $f_n(x) = g_n(x)$. Класс эквивалентности $[(f_n)]$ будем называть мнемофункцией и обозначать $\widetilde{f}$. Обозначим через $G(R)$ множество всех мнемофункций, которое является алгеброй с покоординатными операциями умножения и сложения. Алгебру мнемофункций вида $\widetilde{f}(\widetilde{x}) = [(f_n(x_n))]$, где $\widetilde{x} = [(x_n)] \in \widetilde{R}$, а $[f_n(x)] \in G(R)$, $\forall x \in R$, обозначим как $G(\widetilde{R})$. Определим на $G(\widetilde{T})$ обобщенный дифференциал $d_{\widetilde{h}}\widetilde{f}(\widetilde{x}) = [(f_n(x+h_n) - f_n(x))]$, $\widetilde{x} = [(x)] \in \widetilde{T}$, $\widetilde{h} \in H$.

Обобщенный дифференциал $d_{\widetilde{h}}$ назовем S-обобщенным дифференциалом и будем обозначать $d_{\widetilde{h}}^S$, если $\widetilde{h} \in S$. Будем говорить, что $\widetilde{f} = [(f_n)]$ ассоциирует элемент f из топологического пространства Ω, если последовательность $\{f_n\}$ при $n \to \infty$ сходится к f в топологии Ω.

Заменяем обычные функции уравнений в (1) на соответствующие им новые обобщенные функции и получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}),\ i = \overline{1,p} \tag{2}$$

с начальным условием $\widetilde{x}|_{[0,\widetilde{h})} = \widetilde{x}^0$, где обобщенные функции $\widetilde{f}^{ij}$, $\widetilde{L}^j$ ассоциируют функции f^{ij} и L^j соответственно.

Наряду с задачей (2) с начальным условием $\widetilde{x}|_{[0,\widetilde{h}]} = \widetilde{x}^0$ рассмотрим систему уравнений с S-обобщенным дифференциалом:

$$d_{\widetilde{h}}^S\widetilde{x}^i(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t})\quad i = \overline{1,p} \tag{3}$$

Будем говорить, что функция x является S-ассоциированным решением уравнения (2), если данная функция является ассоциированным решением задачи (3).

Заменим в (2) каждую новую обобщенную функцию представителем класса, ее определяющего, получим запись (2) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)],\ x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t),\ i = \overline{1,p} \tag{4}$$

Для описания предельного поведения задачи (4) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)),\ i = \overline{1,p}, \qquad (5)$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r +) - L^d(\mu_r -)$ – величина скачка, $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, где $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения $\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\varphi(s, \mu, x, u)ds$.

Теорема. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию линейного роста и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функций ограниченной вариации. Тогда S-ассоциированное решение задачи Коши (2) является решением системы уравнений (5) в* $L^p(T)$, *если* $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$ *в пространстве* $L^p(T)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жук, А. И. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 1. – С. 12–16.