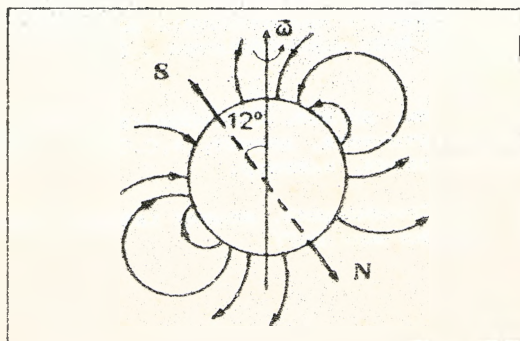


Министерство образования Республики Беларусь
Брестский политехнический институт
Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВО



**Э5. ИЗУЧЕНИЕ ПРИНЦИПА
СУПЕРПОЗИЦИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ
СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНДУКЦИИ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ
(Методические указания)**

Брест 1997

УДК 53 (076.5)

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.
Методические указания по выполнению лабораторной работы
Э5 "ИЗУЧЕНИЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ОПРЕ-
ДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПО-
ЛЯ ЗЕМЛИ", Брест, БПИ, 1997

В методических указаниях приведено описание лабора-
торной работы Э5 "Изучение принципа суперпозиции магнитных
полей и определение горизонтальной составляющей магнитного
поля Земли", в которой экспериментально проверяются зависи-
мости между физическими величинами, характеризующими ориен-
тацию магнитной стрелки в магнитном поле, и определяется
горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли.

Лабораторная работа предназначена для студентов всех
специальностей и всех форм обучения в БПИ.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА Э5

ИЗУЧЕНИЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ.

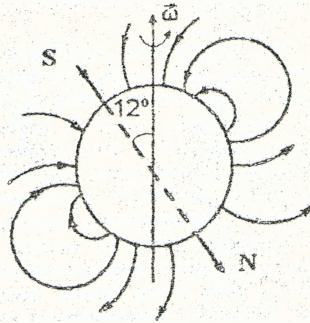
Цель работы:

- определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли;
- изучение принципа суперпозиции магнитных полей.

Приборы и принадлежности: Блок питания; установка для определения горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли, называемая иногда тангенс-гальванометром; амперметр.

ВВЕДЕНИЕ

Земля представляет собой гигантский шаровой магнит. В любой точке на ее поверхности и в окружающем пространстве обнаруживается действие магнитного поля. При этом магнитные полюсы Земли не совпадают с географическими. Южный полюс магнитного поля Земли смещен на запад относительно Северного географического полюса и расположен у берегов Сезерной Америки, а северный полюс смещен к востоку и расположен в Антарктиде. Угол между магнитной осью и осью вращения Земли составляет $\sim 12^\circ$. Схема силовых линий магнитного поля Земли показана на рисунке. При этом величина индукции \vec{B} магнитного поля Земли изменяется от минимального значения на экваторе до максимального у магнитных полюсов.



Магнитное поле Земли характеризуется следующими величинами:

а) магнитным склонением, т.е. углом между плоскостью географического меридиана и вертикальной плоскостью, в которой расположен вектор \vec{H} индукции магнитного поля Земли (плоскостью магнитного меридиана);

б) горизонтальной составляющей вектора индукции магнитного поля Земли \vec{H}_r ;

в) магнитным наклонением, т.е. углом, который образует вектор индукции магнитного поля Земли с горизонтальной плоскостью.

Р различных точках земной поверхности эти величины могут быть неодинаковыми. Изучение магнитного поля Земли имеет большое значение для навигации, геологической разведки, радиосвязи. Однако природа земного магнетизма до сих пор окончательно не выяснена.

Для магнитных полей, так же как и для электростатических, справедлив принцип суперпозиции, являющийся обобщением опытных фактов. Согласно этому принципу магнитные поля отдельных движущихся зарядов векторно складываются, причем каждый заряд возбуждает поле, не зависящее от наличия других зарядов. В данной работе принцип суперпозиции изучается на примере наложения магнитных полей Земли и кругового тока.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ.

Общий вид установки показан на рис. 1. На подставке смонтированы две круговые обмотки, включенные последовательно и подсоединенные к блоку питания. На блоке питания имеются два тумблера: один — для включения-выключения тока в обмотках, другой — для изменения направления тока на противоположное. Сила тока регулируется ручкой на передней панели блока питания и измеряется цифровым амперметром. В качестве индикатора магнитного поля используется магнитная стрелка, которая может с достаточной малым трением вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс. При этом центр магнитной стрелки находится на общей оси обмоток посередине между ними.

В отсутствие тока в обмотках и местных магнитных полей стрелка устанавливается в плоскости магнитного меридиана, причем ее конец, окрашенный в красный цвет (северный полюс стрелки), указывает направление вектора \vec{H}_r горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли. При включении тока стрелка ориентируется в направлении горизонтальной составляющей результирующего магнит-

ного поля, индукция которого находится из принципа суперпозиции: $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_0$, где \vec{H}_1 и \vec{H}_0 - соответственно индукции магнитного поля Земли и кругового тска. В каждом случае положение стрелки может быть определено с помощью отсчетной шкалы. В данной установке шкала должна быть сориентирована таким образом, чтобы ось витков проходила через деления "90°" и "270°" шкалы.

Таким образом, на данной экспериментальной установке можно провести прямые измерения положения магнитной стрелки при различных величинах и направлениях тока в витках обмоток и различных ориентациях установки относительно плоскости магнитного меридиана.

Описание любой экспериментальной ситуации дается некоторой математической моделью. Любая модель дает лишь приближенное описание ситуации, ибо в ней пренебрегают

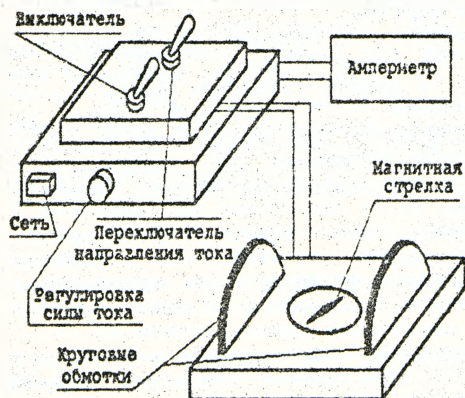


Рис. 1

влиянием некоторых факторов, упрощая тем самым реальное положение вещей. Чем большее число факторов учитывается в модели, тем, как правило, сложнее математическая структура модели и тем сложнее работа с ней. Поэтому в случае данной экспериментальной ситуации будем предполагать, что все витки обеих обмоток имеют одинаковый радиус R , их плоскости вертикальны и параллельны между собой, так что витки имеют общую горизонтальную ось, на которой находится центр стрелки. Предположим также, что расстояние h от центра стрелки до плоскости любого из витков одно и то же. Тогда индукция магнитного поля, создаваемого в центре стрелки всеми N витками, по которым протекает ток I , направлена по горизонтали вдоль оси витков и равна (см. Приложение 1):

влиянием некоторых факторов, упрощая тем самым реальное положение вещей. Чем большее число факторов учитывается в модели, тем, как правило, сложнее математическая структура модели и тем сложнее работа с ней. Поэтому в случае данной экспериментальной ситуации будем предполагать, что все витки обеих обмоток имеют одинаковый радиус R , их плоскости

$$B_0 = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + h^2)^{3/2}} = C \cdot I, \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная. Величина

$C = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + h^2)^{3/2}}$ является постоянной установки.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли в случае взаимно перпендикулярной ориентации векторов \vec{H}_r и \vec{H}_0 .

1. Убедитесь в том, что ось витков проходит через деления "90°" и "270°" отсчетной шкалы. Если необходимо, установите шкалу нужным образом.

2. Поворачивая подставку с витками при выключенном токе {I=0}, установите ее таким образом, чтобы северный полюс магнитной стрелки (в данной установке имеет красный цвет) стоял против деления "0°" отсчетной шкалы. Все дальнейшие измерения проводятся при неизменном положении установки. Следите, чтобы установка при измерениях не сдвинулась с места. Если это случилось, заново сориентируйте установку.

3. Включите установку. Вращая ручку регулятора силы тока вправо, установите такое значение тока в обмотках I_1 , при котором красный конец стрелки стоит против деления "10°" шкалы. Полученное значение I_1 и угол $\alpha = 10^\circ$ занесите в таблицу.

Для уменьшения влияния сил сухого трения в оси стрелки и увеличения точности определения положения стрелки относительно отсчетной шкалы рекомендуется при измерениях слегка постукивать по крышке корпуса, в котором находится стрелка. Следите только, чтобы не нарушилась ориентация установки.

4. Постепенно увеличивая силу тока в обмотках, установите значения токов I_1 , при которых угол α , определяющий положение стрелки относительно шкалы, будет равен 20°, 30° и т.д., и результаты занесите в таблицу. Измерения проводите до тех пор, пока сила тока не достигнет максимально возможного значения.

5. Уменьшая силу тока в обмотках от I_{max} до нуля, повторите измерения п.п. 3-4 и результаты измерений токов

I , занесите в таблицу. Для каждого угла α вычислите среднее значение силы тока в обмотках; $I = \frac{I_1 + I_2}{2}$.

6. Измените направление тока в обмотках на противоположное с помощью переключателя и измерьте токи I_1 и I_2 , при которых $\alpha = 350^\circ, 340^\circ$ и т.д., сначала увеличивая, а затем уменьшая силу тока в обмотках. Полученные значения I_1 , I_2 и I снабдите знаком "-" и занесите в таблицу

I_1, mA	I_2, mA	I, mA	$\alpha, ^\circ$	$y = \lg \alpha$
			10	
			...	
			350	
			...	

В результате для каждого значения угла α , определяющего положение магнитной стрелки, будет найден соответствующий ток I в обмотках, причем для значений $\alpha = 350^\circ, 340^\circ \dots$ сила тока считается отрицательной.

7. Теория, изложенная в Приложениях 1 и 2, дает следующую связь между величиной $y = \lg \alpha$ и силой тока I :

$$y = A \cdot I + D \cdot I^2,$$

где A, D — некоторые постоянные.

На координатной плоскости (I, y) отметьте все экспериментальные точки и соедините их плавной кривой. Теория предсказывает, что кривая $y(I)$ симметрична относительно начала координат. Проверьте, так ли это и при необходимости уточните результаты измерений.

8. На основе метода наименьших квадратов (МНК) найдите наилучшее в смысле МНК значение постоянной A (формула (П2.6)):

$$A = \frac{(\sum_{i=1}^n I_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i \cdot I_i) - (\sum_{i=1}^n I_i) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i \cdot I_i^2)}{(\sum_{i=1}^n I_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^n I_i^2) - (\sum_{i=1}^n I_i)^2}$$

где суммирование проводится по всем экспериментальным значениям.

9. По формуле $B = \frac{C}{A}$, где $C = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + h^2)^{3/2}}$, найдите горизонтальную составляющую индукцию магнитного поля Земли.

10. Оцените относительную погрешность определения B_r , по формуле $\frac{\Delta B_r}{B_r} = \frac{l}{2\sqrt{R^2 + h^2}}$, где l — длина стрелки, и запишите окончательный результат в стандартном виде.

11. При наличии времени повторите все измерения и вычисления, переместив установку в целом на новое место. Это позволит, сравнив результаты для B_r , убедиться в наличии или отсутствии местных источников магнитных полей.

12. Дополнительное задание: Верификация используемой математической модели.

Под верификацией понимается процедура, позволяющая установить степень соответствия модели реальному положению вещей. Вообще говоря, процедура верификации включает в себя много элементов, в том числе и оценку степени достоверности исходных предположений — в нашем случае нужно было бы оценить влияние того, что различные витки имеют слегка различающиеся радиусы, расстояния от плоскостей различных витков до центра стрелки также различаются, витки не строго вертикальны и т.д. Здесь мы ограничимся лишь одним элементом процедуры верификации: проверкой соответствия математической модели экспериментальным данным. Иначе говоря, в данном задании предлагается получить математическое выражение субъективной уверенности в том, что зависимость величины $y = \operatorname{tg} \alpha$ от тока имеет вид $y = A \cdot I + D \cdot I^3$.

В лабораторной работе М-1 аналогичный вопрос решался на основе критерия Пирсона (χ^2 — хи-квадрат), и здесь мы поступим аналогично. На данной установке угол α измеряется с погрешностью $\Delta \alpha = 2^\circ = \frac{\pi}{90}$ (сюда включаются и погрешности округления). Тогда погрешность определения величины y будет равна $\Delta y = (\operatorname{tg} \alpha)' \cdot \Delta \alpha = \frac{\Delta \alpha}{\cos^2 \alpha}$. Вычислите величину χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - A \cdot I_i - D \cdot I_i^3)^2 \cdot \cos^4 \alpha_i}{(\Delta \alpha)^2},$$

выведя предварительно формулу для D , аналогичную (П.2.6), и вычислив D . Сравнив значение χ^2 с табличным, оцените соответствующую вероятность, выражающую, грубо говоря, степень нашей уверенности в справедливости зависимости $y = A \cdot I + D \cdot I^3$. Письменно сформулируйте вывод.

Задание 2. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли в случае произвольной ориентации векторов B_r и B_0 .

1. Убедитесь в том, что ось витков проходит через деления "90°" и "270°" отсчетной шкалы. Если необходимо, установите шкалу нужным образом.

2. Поворачивая подставку с витками при выключенном токе ($I=0$), установите ее таким образом, чтобы северный полюс магнитной стрелки стоял против деления шкалы, соответствующего согласованному с преподавателем углу $\beta \neq 0$. Все дальнейшие измерения проводятся при неизменном положении установки — следите, чтобы установка при измерениях не сдвинулась с места. Если это случилось, заново ориентируйте установку.

3. Включите установку. Вращая ручку регулятора силы тока вправо, установите такое значение тока в обмотках I_1 , при котором красный конец стрелки стоит против деления " $\alpha = \beta + 10^\circ$ " шкалы. Полученное значение I_1 и угол α занесите в таблицу, аналогичную используемой в задании 1.

Для уменьшения влияния сил сухого трения в оси стрелки и увеличения точности определения положения стрелки относительно отсчетной шкалы рекомендуется при измерениях слегка постукивать по крышке корпуса, в котором находится стрелка. Следите только, чтобы не чарушилась ориентация установки.

4. Постепенно увеличивая силу тока в обмотках, установите значения токов I_2 , при которых угол α , определяющий положение стрелки относительно шкалы, будет равен ($\beta + 20^\circ$), ($\beta + 30^\circ$) и т.д., и результаты занесите в таблицу. Измерения проводите до тех пор, пока сила тока не достигнет максимально возможного значения.

5. Уменьшая силу тока в обмотках от I_{\max} до нуля, повторите измерения п.п. 3-4 и результаты измерений токов I_2 занесите в таблицу. Для каждого угла α вычислите среднее значение силы тока в обмотках: $I = \frac{I_1 + I_2}{2}$.

6. Изменив с помощью переключателя направление тока в витках на противоположное, определите значения I_1 и I_2 , при которых $\alpha = \beta - 10^\circ$, $\alpha = \beta - 20^\circ$ и т.д. Полученные значения I_1 и I_2 снабдите знаком "-" и занесите в таблицу. Для каждого угла α вычислите средние значения силы тока $I = \frac{I_1 + I_2}{2}$.

7. Вычислите значения $y_i = \frac{\sin(\alpha_i - \beta)}{\sin \alpha_i}$. Теория, изложенная в Приложениях 1 и 2, для данной экспериментальной ситуации дает следующую зависимость величины $y = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$ от I :

$$y = A \cdot I + B \cdot I^2 + C \cdot I^3.$$

Нанесите экспериментальные точки на координатную плоскость (I, y) и проведите через них плавную кривую. На основе метода наименьших квадратов (МНК) найдите наилучшее в смысле МНК значение постоянной A по формулам (П2.12).

8. По формуле $B_r = \frac{C}{A}$, где $C = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + h^2)^{3/2}}$, найдите горизонтальную составляющую индукцию магнитного поля Земли.

9. Оцените относительную погрешность определения B_r по формуле $\frac{\Delta B_r}{B_r} = \frac{I}{2\sqrt{R^2 + h^2}}$, где l — длина стрелки. Запишите окончательный результат в стандартной форме

10*. При наличии времени повторите все измерения и вычисления при другом значении угла β или при том же значении β , но переместив установку в целом на новое место для того, чтобы изучить влияние местных магнитных полей. Результаты для B_r усредните.

11*. Дополнительное задание.

Аналогично п. 12 в задании 1, разработайте и осуществите процедуру частичной верификации используемой математической модели.

Задание 3. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли в случае произвольной ориентации отсчетной шкалы.

При выполнении заданий 1 и 2 предполагалось, что в данной установке отсчетная шкала сориентирована таким образом, что ось витков проходит через деления "90°" и "270°" шкалы. Рассмотрим теперь более общую экспериментальную ситуацию, когда это предположение выполняется не совсем точно, и проверим, приведет ли использование более сложной математической модели к изменению получаемых результатов.

1. Поворачивая подставку с витками при выключенной токе ($I=0$), установите ее таким образом, чтобы северный полюс магнитной стрелки стоял против деления шкалы, соот-

ветвующего согласованному с преподавателем углу $\beta \neq 0$. Все дальнейшие измерения проводятся при неизменном положении установки — следите, чтобы установка при измерениях не сдвинулась с места. Если это случилось, заново ориентируйте установку.

2. Включите установку и поворотом ручки регулятора силы тока до упора вправо найдите максимально возможный ток в витках I_{\max} . Диапазон изменения силы тока $(0, I_{\max})$ разбейте на несколько интервалов и выберите шаг ΔI изменения силы тока так, чтобы провести измерения не менее, чем при 10 значениях тока.

3. Установите значение силы тока $I_1 = \Delta I$ и измерьте по шкале угол α_1 , соответствующий положению северного полюса стрелки. Переключатель для изменения направления тока в обмотках должен находиться в таком положении, что угол α_1 находится в пределах $\beta < \alpha_1 < 90^\circ$. Затем измените направление тока на противоположное и измерьте по шкале угол α_2 , определяющий новое положение северного полюса стрелки.

4. Установите значение силы тока $I_2 = 2 \cdot \Delta I$, повторите измерение углов α_1 , α_2 и т.д.

5. При каждом значении силы тока $I_k (k=1, 2, \dots)$ вычислите величину

$$y_k = \frac{\sqrt{\sin^2(\alpha_{1k} - \beta) + \sin^2(\alpha_{2k} - \beta) + 2 \sin(\alpha_{1k} - \beta) \cdot \sin(\alpha_{2k} - \beta) \cdot \cos(\alpha_{1k} - \alpha_{2k})}}{|\sin(\alpha_{1k} - \alpha_{2k})|},$$

где α_{1k} , α_{2k} — значения углов α_1 и α_2 в каждом опыте.

6. Теория, изложенная в Приложении 2, предсказывает зависимость между y и I в виде

$$y = A \cdot I + D \cdot I^2 + E \cdot I^3.$$

По формулам (П2.12) найдите наилучшее в смысле МНК значение постоянной A .

7. По формуле $B_r = \frac{C}{A}$, где $C = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + h^2)^{3/2}}$, найдите горизонтальную составляющую индукцию магнитного поля Земли.

8. Оцените относительную погрешность определения B_r по формуле $\frac{\Delta B_r}{B_r} = \frac{l}{2\sqrt{R^2 + h^2}}$, где l — длина стрелки. Запишите окончательный результат в стандартной форме.

9. Для одного из значений тока (по Вашему выбору) проведите построения, описанные в Приложении 2 для данной модели и показанные в общем виде на Рис. 5, и проверьте выполнимость соотношения (П2.17).

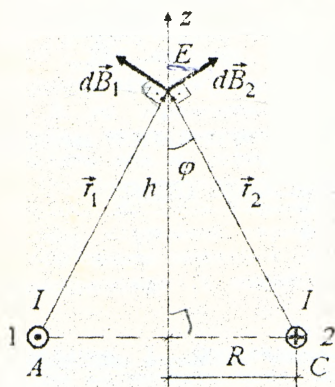
10*. При наличии времени повторите все измерения и вычисления при другом значении угла β или при том же значении β , но переместив установку в целом на новое место для того, чтобы изучить влияние местных магнитных полей. Результаты для B_r усредните.

11*. Дополнительное задание.

Аналогично п. 12 в задании 1, разработайте и осуществите процедуру частичной верификации используемой математической модели.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Магнитное поле кругового витка с током на оси симметрии.

Пусть по круговому витку радиуса R протекает ток I .



Найдем магнитную индукцию в точке, лежащей на оси витка на расстоянии h от плоскости витка. На рисунке показано сечение витка плоскостью, проходящей через ось симметрии витка, а также векторы $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$ магнитной индукции, создаваемые в точке наблюдения E диаметрально противоположными элементами кольца длиной dl , перпендикулярными плоскости рисунка (т.е. находящимися в точках A и C ; точкой и крестиком указано направление тока I). Если длины элементов одинаковы, то по закону Био-

Савара-Лапласа модули векторов $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$ равны (учтено, что $(d\vec{l}, \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$):

$$|d\vec{B}_1| = |d\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi (R^2 + h^2)},$$

причем векторы $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$ перпендикулярны соответствующим прямым AE и CE и расположены симметрично относительно оси z . Сумма этих векторов направлена вдоль оси z , т.е. горизонтальная проекция векторов при суммировании исчезает и результирующий вектор магнитной индукции будет иметь только проекцию B_z , т.е. будет направлен вдоль оси z . Имеем

$$dB_z = |d\vec{B}| \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R \cdot I \cdot dl}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

и после интегрирования получим

$$H_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R \cdot I \cdot 2\pi R}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot I}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Направление вектора \vec{B} и направление тока связаны правилом правого винта. Если поле порождается N витками одного и того же радиуса, так что точка наблюдения может считаться находящейся на их общей оси симметрии на одном и том же расстоянии h от их плоскостей, то индукция магнитного поля равна

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} \cdot I. \quad (\text{П}1.1)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Анализ экспериментальной ситуации и используемых математических моделей.

Экспериментальная ситуация, реализуемая в данной работе, может быть описана с помощью различных математических моделей. Любая модель дает упрощенное описание ситуации, ибо в любой модели не учитывается влияние некоторых факторов. Чем больше факторов учитывается в модели, тем, как правило, модель сложнее. Ниже рассматриваются три модели, каждая следующая из которых сложнее предыдущей.

Сформулируем вначале предположения, которые являются общими для всех моделей.

1. *В отсутствие тока в катушках магнитная стрелка устанавливается в плоскости магнитного меридиана так, что ее северный полюс (имеет красный конец) указывает на южный магнитный полюс Земли, который напомним, находится близки северного географического полюса.*

Для выполнимости этого предположения нужно, чтобы отсутствовали местные источники магнитных полей, в качестве которых могут выступать работающие электрические установки или просто ферромагнитные вещества, намагнитившиеся в магнитном поле Земли. Нетрудно также видеть, что предположение 1 является следствием высокой однородности магнитного поля Земли на расстояниях, определяемых длиной

стрелки (фактически, на много больших расстояниях), а также следствием предположения о том, что все другие силы типа сил сухого трения не мешают ориентации стрелки.

2. *Плоскости отдельных витков обеих катушек вертикальны и параллельны между собой, радиусы всех витков одинаковы, центр стрелки расположен на общей для всех витков горизонтальной оси их симметрии.*

3. *Центр стрелки расположен симметрично относительно обеих катушек так, что расстояние от плоскости любого витка до центра стрелки одно и то же.*

Предположения 1 и 2 выполняются в действительности весьма приближенно: различные витки имеют немножко различающиеся радиусы, их плоскости находятся на слегка различных расстояниях от центра стрелки и т.д.

4. *Сила тока во всех витках одна и та же, что обеспечивается последовательным включением обеих катушек в электрическую цепь.*

Из предположений 2-4 вытекает, что индукция магнитного поля, создаваемого в центре стрелки всеми N витками, по которым протекает ток I , направлена по горизонтали вдоль оси витков и равна, согласно Приложению 1:

$$B_0 = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} \cdot I = C \cdot I, \quad (\text{П2.1})$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, R — радиус витков, h — расстояние от плоскости витков до центра стрелки.

Дальнейшие предположения различны для различных моделей.

а) МОДЕЛЬ I.

Пусть ток в катушке отсутствует. Поворачивая подставку с обмотками, можно добиться того, что северный полюс стрелки будет стоять против нулевого деления шкалы.

В этой модели дополнительно предполагается, что ось витков при этом будет перпендикулярна стрелке, т.е. плоскости магнитного меридиана. Иначе говоря, принимается, что ось витков проходит через деления "90°" и "270°" шкалы.

Согласно принципу суперпозиции при включении тока в витках горизонтальная составляющая индукции магнитного поля в центре стрелки станет равной $\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_0$, где \vec{B}_r — горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли, модуль вектора \vec{B}_0 дается формулой (П2.1), а направлен

вектор \vec{B}_0 вдоль оси витков перпендикулярно вектору \vec{B}_r . На Рис.2 показано сечение установки горизонтальной плоскостью, направление тока в витках отмечено точкой и крестиком внутри проводника.

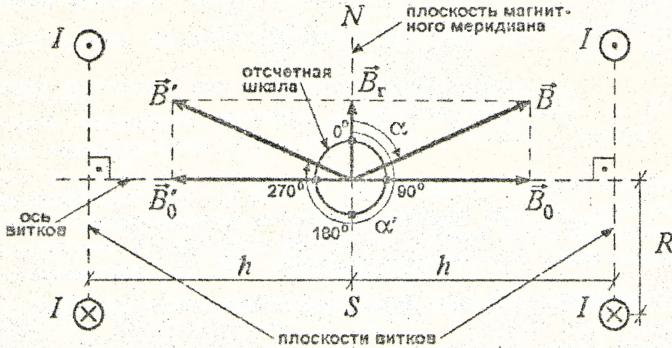


Рис.2

Если бы стрелка была очень короткой, то стрелка установилась бы вдоль вектора \vec{B} результирующего магнитного поля. В этом случае угол α , соответствующий положению северного конца стрелки при включенном токе, определялся бы соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_0}{B_r} = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} \cdot I. \quad (\text{П2.2})$$

Если изменить направление тока на противоположное, то направление вектора магнитной индукции, порождаемого током в витках, также изменится на противоположное: $\vec{B}'_0 = -\vec{B}_0$. Короткая магнитная стрелка установилась бы вдоль вектора $\vec{B}' = \vec{B}_r + \vec{B}'_0$. Соответствующий угол α' показан на Рис.2.

Очевидно, что соотношение (П2.2) остается в силе, если соответствующий ток считать отрицательным.

Легко видеть, что формула (П2.2) была бы справедлива и для длинной стрелки, если бы магнитное поле катушек было однородным, т.е. если бы магнитная индукция выражалась формулой (П2.1) не только в центре стрелки, но и во всех других точках.

К сожалению это не так: в различных точках пространства индукция магнитного поля витков различна и по величине, и по направлению, и взаимодействие магнитных моментов отдельных элементарных участков стрелки с неоднород-

ным суммарным магнитным полям витков и Земли приведет к тому, что для угла, определяющего положение длинной стрелки, формула (П2.2) несправедлива. Вообще, даже приближенный аналитический расчет угла α невозможен в силу того, что неизвестно распределение магнитного момента вдоль стрелки. Поэтому следует обратиться к анализу размерностей.

Из соображений симметрии следует, что $\mu\alpha$ может быть записан в виде:

$$\mu\alpha = A \cdot l + D \cdot l^3 + \dots, \quad (\text{П2.3})$$

где A, D, \dots некоторые величины, единицы измерения которых есть $[A] = A^{-1}$, $[D] = A^{-3}$, поскольку $\mu\alpha$ — безразмерная величина.

Далее из общих соображений следует, что чем больше радиус витков или чем больше величина h , тем более однородным является поле витков по длине стрелки, и тем более точно должна быть справедлива формула (П2.2). Математически это означает, что при отдельном стремлении величин $\frac{l}{R}$

и $\frac{l}{h}$ к нулю, где l — длина стрелки, величина A должна стремиться к $\frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(R^2 + h^2)^{3/2} B_r}$, а величина D должна стремиться к нулю (остальные, не выписанные в (П2.3) коэффициенты, разумеется тоже).

Таким образом, для величины A мы имеем выражение

$$A = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(R^2 + h^2)^{3/2} B_r} \left[1 + C_1 \frac{l}{\sqrt{R^2 + h^2}} + C_2 \frac{l^2}{R^2 + h^2} + \dots \right], \quad (\text{П2.4})$$

где C_1, C_2 — некоторые безразмерные постоянные. Только такая зависимость, как нетрудно убедиться, приводит к выполнению предельных соотношений $\lim_{l \rightarrow 0} A = \lim_{h \rightarrow \infty} A = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(R^2 + h^2)^{3/2} B_r}$.

Как показывает более подробный анализ, величина C_1 равна примерно 0,5, а величина C_2 еще меньше. Анализировать вид величины D и остальных членов мы не будем и предоставим возможность сделать это самостоятельно. Изложенная теория позволяет найти приближенное значение горизонтальной составляющей индукции B_r магнитного поля Земли следующим образом. Пусть при каждом значении тока I_k ($k=1, 2, \dots$) получено соответствующее значение α_k . Обозначая

для краткости $y_i = I g \alpha_i$, с помощью метода наименьших квадратов (МНК) для зависимости

$$y = A \cdot I + B \cdot I^3, \quad (\text{П2.5})$$

найдем величину А. Соответствующее выражение имеет вид (проверьте это самостоятельно):

$$A = \frac{(\sum I_i^6) \cdot (\sum y_i I_i) - (\sum I_i^3) \cdot (\sum y_i I_i^3)}{(\sum I_i^6) \cdot (\sum I_i^3) - (\sum I_i^3)^2}. \quad (\text{П2.6})$$

Тогда согласно (П2.4) для B_r имеем выражение

$$B_r = \frac{C}{A}, \quad (\text{П2.7})$$

где $C = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}$ — постоянная установки. Относительная погрешность определения B_r оценивается выражением

$$\frac{\Delta B_r}{B_r} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 + h^2}}. \quad (\text{П2.8})$$

Сделаем одно замечание. Из вышеизложенного, разумеется, не вытекает, что в (П2.5) следует ограничиваться только третьей степенью тока и нужно было бы пользоваться общим выражением (П2.3), но тогда возникла бы (кроме, конечно, чисто вычислительных) еще одна проблема: какой степенью тока можно ограничиться. Анализ этой проблемы достаточно сложен, и мы его полностью проводить не будем и ограничимся полуинтуитивными соображениями: если ток I мал, то члены пятой, седьмой и т.д. степени в (П2.3) не играют роли и весь вопрос, следовательно, состоит в том, насколько малым должен быть ток. Оказывается, что используемые на данной установке токи в этом смысле являются малыми. В этом можно отчасти убедиться и практически, записав вместо (П2.5) выражение

$$y = A \cdot I + D \cdot I^3 + E \cdot I^5,$$

и определив с помощью МНК снова коэффициент А. Если он будет равен коэффициенту А для зависимости (П2.5) с относительной погрешностью (П2.8), то это подтверждает вы сказанное выше утверждение. Рекомендуется сделать это самостоятельно.

б) МОДЕЛЬ II

Пусть ток в катушках отсутствует и стрелка расположена в плоскости магнитного меридиана. Поворачивая подставку с катушками, можно установить против северного полюса стрелки деление шкалы, соответствующее любому выбранному углу $\beta \neq 0$. При включении тока стрелка занимает новое положение, определяемое углом α .

Очевидно, модель I является частным случаем модели II, соответствующим $\beta=0$.

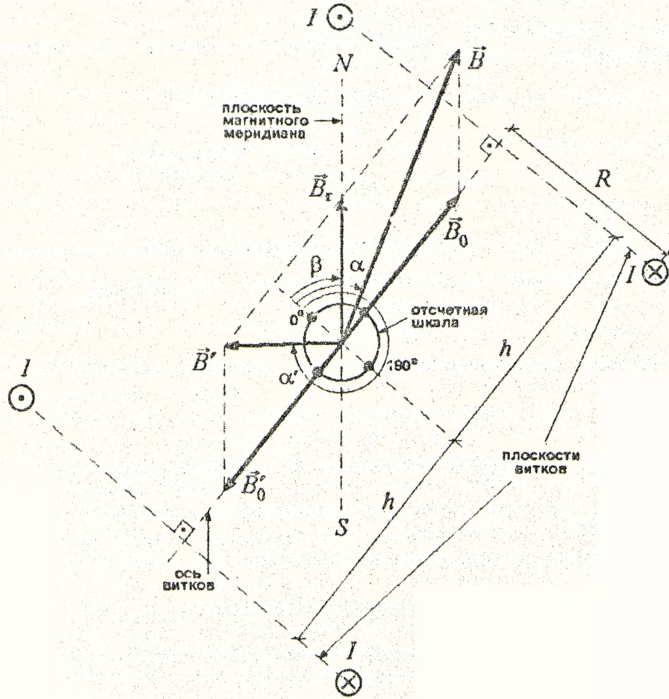


Рис. 3

На Рис.3 показано сечение установки горизонтальной плоскостью. На рисунке показаны вектор \vec{B}_r горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли и вектор \vec{B}_0 магнитной индукции поля витков в центре стрелки, перпендикулярный плоскости витков, т.е. направленный вдоль общей оси витков, которая, в свою очередь, проходит через деления "90°" и "270°" шкалы. Модуль вектора \vec{B}_0 дается формулой (П2.1).

Если бы стрелка была короткой (ниже мы уточним смысл этих слов), то при включенном токе I она бы установилась в направлении вектора $\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_0$. Угол α , соответствующий

положению северного конца стрелки при включенном токе I , можно найти, используя теорему синусов для Рис.3:

$$\frac{B_0}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{B_r}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{B_r}{\sin \alpha}$$

Тогда с учетом (П2.1) получим

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(h^2 + R^2)^{3/2} B_r} \cdot I = \frac{C}{B_r} \cdot I, \quad (\text{П2.9})$$

где $C = \frac{\mu_0 \cdot R^2 \cdot N}{2(h^2 + R^2)^{3/2}}$ — постоянная установки.

При изменении направления тока на противоположное, вектор индукции магнитного поля, создаваемого витками, также изменит направление на противоположное, сохранив модуль: $\vec{H}'_0 = -\vec{H}_0$ (Рис.3). Короткая магнитная стрелка при этом установилась бы вдоль вектора $\vec{H}' = \vec{H}_r + \vec{H}'_0$. Соответствующий угол α' , определяющий положение северного конца стрелки, также показан на Рис.3. Легко видеть, что соотношение (П2.9) остается в силе, если соответствующий ток считать отрицательным.

Как и в случае модели I, выполнить аналитический расчет угла α для длинной магнитной стрелки практически невозможно. Поэтому следует обратиться к анализу размерностей. Поскольку $y = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$ — безразмерная функция тока, то ее можно разложить в ряд по току

$$y = A \cdot I + D \cdot I^2 + E \cdot I^3 + \dots \quad (\text{П2.10})$$

и при малых токах ограничиться тремя членами разложения. Здесь A , D , E — некоторые величины, единицы измерения которых есть $[A] = A^{-1}$, $[D] = A^{-2}$, $[E] = A^{-3}$. Далее, из общих соображений следует, что чем больше радиус витков или чем больше величина h в сравнении с длиной стрелки l , тем более однородным является поле витков по длине стрелки и тем более точной, следовательно, должна быть формула

(П2.9). Математически это означает, что $\lim_{h \rightarrow 0} A = \lim_{l \rightarrow 0} A = \frac{C}{B_r}$;

$\lim_{h \rightarrow 0} D = \lim_{l \rightarrow 0} D = 0$ и т.д. Таким образом, для A мы должны иметь следующее выражение

$$A = \frac{C}{B_r} = (1 + C_1 \frac{l}{\sqrt{R^2 + h^2}} + C_2 \frac{l^2}{R^2 + h^2} + \dots), \quad (\text{П2.11})$$

где C_1 , C_2 — некоторые безразмерные постоянные. Более подробный анализ показывает, что постоянная C_1 близка к 0,5, а C_2 — еще меньше. Анализировать вид величин D , E мы

не будем и предоставляем возможность сделать это самостоятельно.

Изложенная теория позволяет найти приближенное значение горизонтальной составляющей B_r индукции магнитного поля Земли следующим образом. Пусть при каждом значении тока I_k ($k=1, 2, \dots$) получено экспериментально соответствующее значение угла α_k при некотором фиксированном β . С помощью метода наименьших квадратов для зависимости (П2.10) найдем величину A . Соответствующее выражение имеет вид (проверьте это самостоятельно):

$$A = \frac{U_1 \cdot W_2 - U_2 \cdot W_1}{V_1 \cdot W_2 - V_2 \cdot W_1}, \quad (\text{П2.12})$$

где для краткости введены обозначения

$$U_1 = (\sum I_k^4) \cdot (\sum y_k I_k^2) - (\sum I_k^2) \cdot (\sum y_k I_k^4);$$

$$U_2 = (\sum I_k^2) \cdot (\sum y_k I_k^4) - (\sum I_k^4) \cdot (\sum y_k I_k^2);$$

$$V_1 = (\sum I_k^4) \cdot (\sum I_k^2) - (\sum I_k^2) \cdot (\sum I_k^4); \quad V_2 = (\sum I_k^2) \cdot (\sum I_k^4) - (\sum I_k^4) \cdot (\sum I_k^2);$$

$$W_1 = (\sum I_k^4)^2 - (\sum I_k^2) \cdot (\sum I_k^4); \quad W_2 = (\sum I_k^2) \cdot (\sum I_k^4) - (\sum I_k^4) \cdot (\sum I_k^2).$$

$$y_k = \frac{\sin(\alpha_k - \beta)}{\sin \alpha_k}.$$

Тогда согласно (П2.9) для B_r имеем выражение

$$B_r = \frac{C}{A}. \quad (\text{П2.13})$$

Относительную погрешность определения B_r можно оценить по формуле

$$\frac{\Delta B_r}{B_r} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 + h^2}}. \quad (\text{П2.14})$$

Сделаем еще одно замечание. Разложение (П2.10) справедливо (с достаточной точностью) лишь для малых токов. Но насколько они должны быть малыми для данной установки, чтобы с относительной погрешностью, определяемой формулой (П2.14), можно было им пользоваться — этот вопрос требует отдельного и довольно сложного анализа, и мы его проводить не будем. Косвенные практические обоснования применимости разложения можно получить, например, сравнивая значения B_r , полученные по формуле (П2.13) при различных углах β , или добавляя в разложение (П2.10) еще один член с I^6 , проводя заново вычисление коэффициента A и сравнивая его с полученным для разложения (П2.10) и т.д.

в) МОДЕЛЬ III

Пусть ток в обмотках отсутствует и стрелка расположена в плоскости магнитного меридиана. Поворачивая подставку с обмотками, можно установить против северного полюса

стрелки деление шкалы, соответствующее любому выбранному углу $\beta \neq 0$. При включении тока стрелка занимает новое положение, определяемое углом α .

На Рис.4 показано горизонтальное сечение установки горизонтальной плоскостью. Вектор \vec{H}_1 изображает горизонтальную составляющую магнитной индукции поля Земли, а вектор \vec{H}_0 — магнитную индукцию поля витков в центре стрелки. Модуль вектора H_0 определяется формулой (П2.1), направлен он вдоль оси витков.

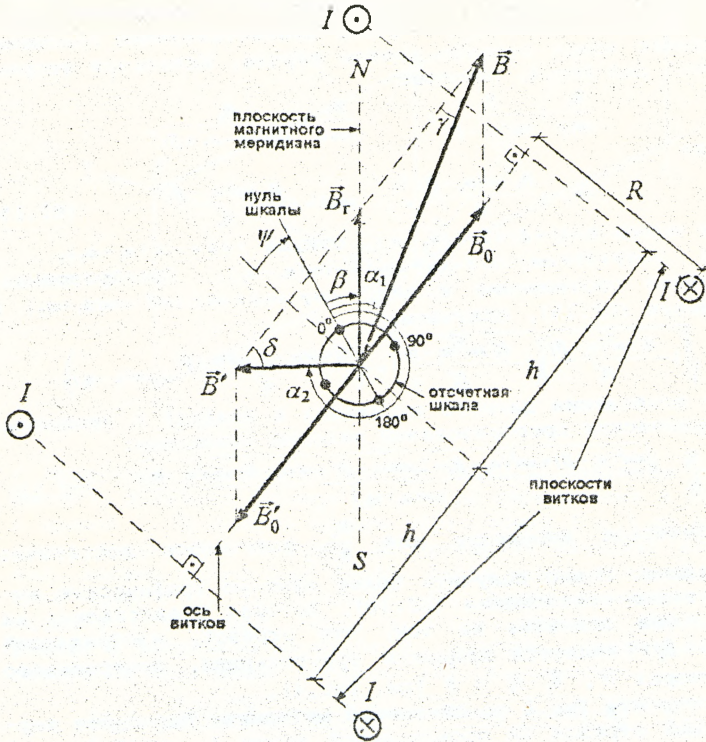


Рис. 4

В отличие от моделей I и II здесь не предполагается, что ось витков проходит через деления "90°" и "270°" шкалы. Иначе говоря, плоскости витков и плоскость, проходя-

шая через деления "0°" и "180°" шкалы, могут составлять любой угол $\psi \neq 0$.

Если бы стрелка была короткой, то при включенном токе она бы установилась в направлении вектора $\vec{H} = \vec{H}_r + \vec{H}_0$, направление которого определяется углом α . При изменении направления тока на противоположное, вектор магнитной индукции поля витков в центре стрелки также изменит направление на противоположное, сохранив модуль: $\vec{H}_r' = -\vec{H}_r$. Короткая магнитная стрелка установилась бы в направлении вектора $\vec{H}' = \vec{H}_r' + \vec{H}_0$. Пусть α_2 — угол, соответствующий положению северного конца стрелки в этом случае. Используя теорему синусов для Рис. 4, получим:

$$\frac{H_r}{\sin \gamma} = \frac{H_0}{\sin(\alpha_1 - \beta)}; \quad \frac{H_r}{\sin \delta} = \frac{H_0}{\sin(2\pi - \alpha_2 + \beta)}$$

откуда

$$\sin \gamma = \frac{H_r \sin(\alpha_1 - \beta)}{H_0}, \quad \sin \delta = -\frac{H_r \sin(\alpha_2 - \beta)}{H_0} \quad (\text{П2.15})$$

Далее имеем $\pi - (\gamma + \delta) = 2\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$, откуда $\gamma + \delta = -(\pi + \alpha_1 - \alpha_2)$. Тогда $\cos(\gamma + \delta) = \cos \gamma \cdot \cos \delta - \sin \gamma \cdot \sin \delta = -\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$. Преобразовывая последнее соотношение к виду $\cos \gamma \cdot \cos \delta = \sin \gamma \cdot \sin \delta - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ и используя (П2.15), получаем:

$$\left(1 - \frac{H_r^2 \sin^2(\alpha_1 - \beta)}{H_0^2}\right) \left(1 - \frac{H_r^2 \sin^2(\alpha_2 - \beta)}{H_0^2}\right) = \left(\frac{H_r^2 \sin(\alpha_2 - \beta) \sin(\alpha_1 - \beta)}{H_0^2} + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right)$$

После возведения данного выражения в квадрат и несложных алгебраических преобразований находим отношение:

$$\frac{H_0}{H_r} = \frac{\sqrt{\sin^2(\alpha_1 - \beta) + \sin^2(\alpha_2 - \beta) + 2 \sin(\alpha_1 - \beta) \sin(\alpha_2 - \beta) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}}{|\sin(\alpha_1 - \alpha_2)|} \quad (\text{П2.16})$$

Аналитическое выражение для $\frac{H_0}{H_r}$ получилось достаточно громоздким. Можно получить более изящную графическую интерпретацию соотношения (П2.16), которая представлена на Рис. 5. Она основана на том, что отрезок, изображающий вектор H_r , является медианой треугольника, построенного на векторах \vec{H}' , $\vec{H}_0 - \vec{H}_r'$ и \vec{H} (см. Рис. 4).

Постройте Рис. 5 по следующей методике. Нарисуйте вертикальный отрезок OA произвольной длины L_r , изображающий в некотором масштабе неизвестный по модулю вектор \vec{H}_r . Под выбранным для измерения углом β нарисуйте прямую, определяющую положение нуля шкалы. Затем, отложив углы α_1 и α_2 , начертите прямые 1 и 2 (см. Рис. 5), определяющие положение стрелки при двух противоположных направлениях тока.

Из точки A отрезка OA опустите перпендикуляр AB на прямую 1. Из точки A проведите отрезок AC параллельно прямой 1 до (точки пересечения с прямой 2) и, аналогично, из точки

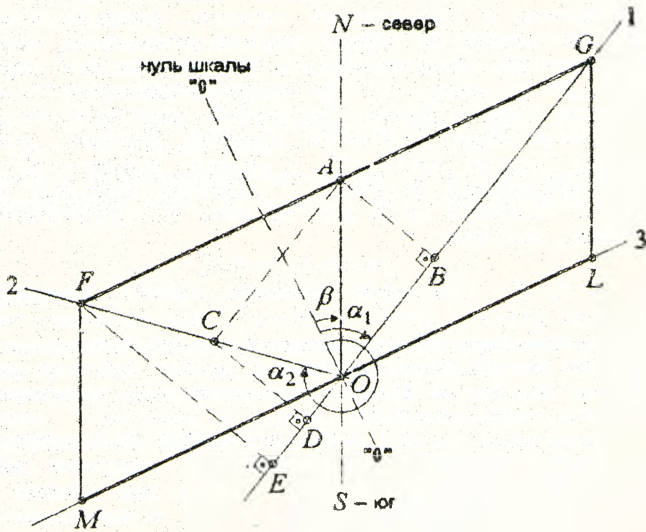


Рис. 5

С проведите отрезок $(D) \perp AB$. От точки D отложите отрезок $DE=OD$ и проведите прямую $EF \parallel (D)$ до пересечения в точке F с прямой 2. Проведите прямую через точки F и A до пересечения с прямой 1 в точке G . Проверьте качество построения: должно получиться $FA=AG$. Далее через точку O проведите прямую 3, параллельную FG , затем проведите через точки F и G прямые $FM \parallel OA$ и $GL \parallel OA$. Отрезки $OL=OM$ изображают в выбранном масштабе H_0 , поэтому, измерив длину L_0 любого из них, можно согласно (П2.16) написать:

$$\frac{B_0}{H_0} = \frac{L_0}{L_r} = \frac{\sqrt{\sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha_2 - \beta) + 2\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha_2 - \beta) \cdot \cos(\alpha - \alpha_2)}}{\sin(\alpha - \alpha_2)} \quad (\text{П2.17})$$

Используя для B_0 выражение (П2.1), представим (П2.17) в виде:

$$y = \frac{L}{H_r} \cdot f, \quad (\text{П2.18})$$

где

$$y = \frac{\sqrt{\sin^2(\alpha_1 - \beta) + \sin^2(\alpha_2 - \beta) + 2 \sin(\alpha_1 - \beta) \cdot \sin(\alpha_2 - \beta) \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}}{|\sin(\alpha_1 - \alpha_2)|} \quad (\text{П2.19})$$

Легко видеть, что формулы (П2.18), (П2.19) были бы справедливы и для длинной стрелки, если бы поле витков было однородным по длине стрелки. Поскольку, однако, оно не однородно, то формула (П2.18) для длинной стрелки неверна. Из-за того, что неизвестно распределение магнитных моментов вдоль стрелки, рассчитать аналитически углы α_1 и α_2 , определяющие положение длинной стрелки, невозможно, поэтому следует обратиться к анализу размерностей.

Безразмерная величина y является функцией тока I в витках. Разлагая ее в ряд по току и ограничиваясь тремя членами, получим:

$$y = A \cdot I + D \cdot I^2 + E \cdot I^3, \quad (\text{П2.20})$$

где A , D , E — некоторые величины, единицы измерения которых есть $[A] = A^{-1}$, $[D] = A^{-2}$, $[E] = A^{-3}$. Для зависимостей A , D и E от длины стрелки справедливы все рассуждения, изложенные при рассмотрении моделей I и II. Поэтому анализировать их вид мы не будем и предоставляем возможность сделать это самостоятельно.

Изложенная теория позволяет найти приближенное значение горизонтальной составляющей B_r индукции магнитного поля Земли следующим образом. Пусть при каждом значении тока I_k ($k=1, 2, \dots$) найдены углы α_{1k} , α_{2k} и вычислена величина y_k по формуле (П2.19). Используя метод наименьших квадратов для зависимости (П2.20), найдем величину A . Она вычисляется по формулам (П2.12). Затем по формулам (П2.13) и (П2.14) могут быть найдены B_r и относительная погрешность ее определения.

Заметим, что ограничение третьей степенью тока в разложении (П2.20) требует обобщения, которое является достаточно сложным и поэтому не приводится. Ясно, что для больших токов нужно учитывать следующие члены разложения, так что фактически мы без достаточных оснований предполагаем их малыми. Косвенным основанием для такого предположения может служить совпадение значений для B_r , полученных при различных значениях угла β (разумеется с относительной погрешностью, определяемой формулой (П2.14)).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Перечислите основные предположения для моделей, используемых в данной работе.

2. Получите выражение для магнитной индукции на оси симметрии витка с током, части витка, множества витков, навитых на цилиндр (соленоид), на конус.
3. Получите на основе МНК выражения для всех коэффициентов в зависимостях $y = A \cdot I + D \cdot I^2 + E \cdot I^3$, используемых в выбранной для работы модели.
4. Объясните детально смысл построения на Рис.5.
5. Пользуясь выражением для вращающего момента, действующего на магнитный момент \vec{p}_m в магнитном поле \vec{B} : $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$, рассмотрите равновесие стрелки (одна часть которой имеет магнитный момент p_m , а другая — p_m) заданной длины в неоднородном магнитном поле, индукция которого изменяется лишь по модулю, заданным простым образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Детлаф, Б.М.Яворский. Курс физики: Учебное пособие для втузов. - М.: Высшая школа, 1989. - §22.2. - С.237-240.
2. И.В.Савельев. Курс физики: Учеб.: В 3-х т. Т.2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. - М.: Наука, 1989. - С.127-134.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Чопчиц Николай Игнатьевич
Прокопеня Александр Николаевич
Хуснутдинова Венера Ямалетдиновна
Смаль Александр Сергеевич
Прокопеня Ирина Николаевна

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ.
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.
Методические указания по выполнению
лабораторной работы Э5.

Ответственный за выпуск Прокопеня А.Н.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 20.06.97 г. Формат 60x84/16. Печать оф-
сетная. Усл.п.л. 1,4. Уч.изд.л. 1,56. Тираж 200 экз.
Заказ №399. Бесплатно. Отпечатано на ризографе Брестского
политехнического института.
224017. Брест, ул. Московская, 267.